Universidade Federal do Rio de Janeiro
Escola Politécnica

ESTUDO COMPARATIVO ENTRE DIFERENTES MODELOS DE CÁLCULO DE *VALUE AT RISK* PARA MEDIÇÃO DOS RISCOS FINANCEIROS DE UMA CARTEIRA DE OPÇÕES

Ana Luíza de Castro Mansur
Eduardo Riedlinger Mont´Alverne Bordalo

Projeto de Graduação apresentado ao Curso de Engenharia de Produção da Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Engenheiro.

Orientador: José Roberto Ribas, D.Sc

Rio de Janeiro
Novembro de 2012

ESTUDO COMPARATIVO ENTRE DIFERENTES MODELOS DE CÁLCULO DE *VALUE AT RISK* PARA MEDIÇÃO DOS RISCOS FINANCEIROS DE UMA CARTEIRA DE OPÇÕES

Ana Luíza de Castro Mansur

Eduardo Riedlinger Mont´Alverne Bordalo

PROJETO DE GRADUAÇÃO SUBMETIDO AO CORPO DOCENTE DO CURSO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO DA ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE ENGENHEIRO DE PRODUÇÃO.

Examinado por:

____

Prof. José Roberto Ribas, D.Sc

(Orientador)

____

Prof. Régis da Rocha Motta, Ph.D.

____

Prof. Armando Celestino Gonçalves Neto, D.Sc.

Rio de Janeiro, RJ – Brasil

Novembro de 2012

Mansur, Ana Luíza de Castro
Bordalo, Eduardo Riedlinger
Mont´Alverne

Estudo Comparativo entre Diferentes Modelos de Cálculo de *Value at Risk* para Medição dos Riscos Financeiros de uma Carteira de Opções / Ana Luíza Mansur e Eduardo Riedlinger Mont´Alverne Bordalo. – Rio de Janeiro: UFRJ/Escola Politécnica, 2012.

IX, 74 p.: il.; 29,7 cm

Orientador: José Roberto Ribas, D.Sc

Projeto de Graduação – UFRJ/ Escola Politécnica/ Curso de Engenharia de Produção, 2012.

Referências Bibliográficas: p. 73.

1.*Value at Risk* (VaR) 2. Carteira de Opções 3. Métodos Delta Normal e Simulação de Monte Carlo.

I. José Roberto Ribas. II.Universidade Federal do Rio de Janeiro, Escola Politécnica, Curso de Engenharia de Produção. III. Estudo Comparativo entre Diferentes Modelos de Cálculo de *Value at Risk* para Medição dos Riscos Financeiros de uma Carteira de Opções.

Agradecimentos

Agradecemos a nossa família, por todo o suporte e carinho. Dedicamos a eles esse momento crucial da nossa formação.
Aos nossos pais, que através do exemplo, nos ensinaram o significado da palavra amor.

Aos nossos amigos de faculdade, que fizeram desta uma fase muito além de estudos. Agradecemos pelo companheirismo, pelas histórias vividas juntas e por tornar a rotina diária mais feliz.

Aos nossos amigos do Colégio e do Trabalho, muito obrigado pela amizade, incentivo e colaboração para nossa formação pessoal, acadêmica e profissional.

Um agradecimento especial ao nosso orientador José Roberto Ribas pelo comprometimento com o projeto e pela contribuição para a nossa formação. Por nos desafiar a superar os nossos próprios limites.

Por fim agradecemos ao amigo Daniel Tonholo, responsável por nos fazer pessoas mais curiosas intelectualmente. Seu conhecimento e seu entusiasmo com o assunto foram uma grande inspiração, enriquecendo muito este trabalho.

Resumo do Projeto de Graduação apresentado à EscolaPolitécnica/ UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Engenheiro de Produção.

Estudo Comparativo entre Diferentes Modelos de Cálculo de *Value at Risk* para Medição dos Riscos Financeiros de uma Carteira de Opções

Ana Luíza de Castro Mansur
Eduardo Riedlinger Mont´Alverne Bordalo

Novembro/2012

Orientador: José Roberto Ribas, D.Sc.

Curso: Engenharia de Produção

Neste trabalho são analisados dois métodos de cálculo de *Value at Risk*: Simulação de Monte Carlo e Delta Normal, para medição do risco de uma carteira de opções de compra. Também, é estudado o comportamento das suas medidas de risco durante um período de trinte e seis dias até o seu vencimento. O método Delta Normal utiliza uma aproximação linear que facilita os cálculos do risco de uma carteira, enquanto que o Método de Monte Carlo utiliza uma distribuição empírica, que é obtida a partir dos preços simulados dos fatores de risco.
Foi realizado um estudo prático, no qual foram utilizadas três opções de ação das empresas: Vale, OGX e Gerdau. Nesse estudo, foi analisada a evolução do risco de cada opção no tempo e comprovada a hipótese de que o método de Simulação de Monte Carlo é mais preciso do que o Método Delta Normal.

Palavra-chave: *Value at Risk* (VaR), Carteira de Opções, Métodos Delta Normal e Simulação de Monte Carlo.

Abstract of Undergraduate Project presented to POLI/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Engineer.

Study of different Methods of Value at Risk calculation to measure financial risks of an option's portfolio

Ana Luíza de Castro Mansur
Eduardo Riedlinger Mont´Alverne Bordalo

Novembro/2012

Advisor: José Roberto Ribas, D.Sc.

Course: Industrial Engineering

In this work, we have studied two methods of Value at Risk calculation: Monte Carlo Simulation and Delta Normal, in order to measure the risk of an option's portfolio and to analyze its risk measures during the period of thirty six days until its expiration. Delta Normal method uses a linear approximation that makes the calculus of the portfolio risk easier. In other hand, Monte Carlo simulation uses an empirical distribution that came from the simulated prices of the risk factors.

A practical work using tree stock options of the companies: Vale, OGX and Gerdau was developed. In this study, we have analyzed the risk evaluation of each one of the options during a time period and we have proved the theory that de Monte Carlo Method is more accurate then the Delta Normal Method.

Keywords: Value at Risk (VaR), Option's Portfolio, Delta Normal and Monte Carlo Simulation Methods.

SUMÁRIO

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

1. Introdução

1.1. Apresentação do Tema

Atualmente, os ativos negociados no mercado financeiro vêm apresentando crescente complexidade, com grande destaque para os derivativos. Estes produtos representaram uma nova gama de operações a serem exploradas, ampliando também, dessa forma, a quantidade de fatores de risco aos quais as carteiras estão expostas. Assim, tornou-se imprescindível o desenvolvimento de técnicas que possibilitem a avaliação do potencial de perda de uma carteira de investimentos.

Foi neste contexto que a metodologia de *Value at Risk* (VaR) se difundiu amplamente. Trata-se, de maneira geral, de um método baseado em técnicas estatísticas que apresenta a perda máxima esperada por uma posição em certo período de tempo para um determinado nível de significância. Atualmente, foram desenvolvidos diversos modelos para sua mensuração, tendo sido adotado globalmente por instituições financeiras e não financeiras, órgãos reguladores, fundos de investimento, etc.

1.2. Objetivos do Trabalho

O objetivo desse trabalho é analisar a diferença da estimativa do risco de uma carteira de opções de compra utilizando os modelos de cálculo Delta Normal e Simulação de Monte Carlo. A partir de dados de opções de ação brasileiras, poderá ser estruturado um estudo prático que visa comparar os valores do *Value at Risk* obtidos para a carteira e para cada uma das opções, usando-se os modelos anteriormente citados.

Também objetiva-se compreender o comportamento da medida de risco de cada opção, sua variação em relação ao tempo e a outros fatores que serão posteriormente explicados.

Por fim, visa-se demonstrar o ganho de diversificação existente quando se calcula o risco de uma carteira. Através do estudo prático, serão observados os impactos do cálculo do risco em uma carteira.

1.3. Metodologia da Pesquisa

O trabalho terá como base uma pesquisa bibliográfica e uma aplicação prática dos modelos de *Value at Risk* selecionados.

A pesquisa bibliográfica atuará como um embasamento teórico para o trabalho. O referencial utilizado é constituído, em sua grande maioria, de artigos científicos que abordam casos dos principais mercados financeiros internacionais, além de livros cujos autores se tornaram referência no tema. Desta forma, será possível um estudo mais profundo, com um estruturado ferramental teórico para uma correta interpretação dos dados.

A aplicação prática dos modelos com ativos reais do mercado brasileiro permitirá um estudo aplicado à realidade brasileira, possibilitando uma comparação entre eles. Assim, será possível identificar aquele que melhor se adequa às condições de mercado no Brasil, destacando as vantagens e desvantagens. Além disso, o modelo será construído baseado em *best practices* do mercado, com parâmetros alinhados aos cenários que se deseja analisar.

1.4. Descrição dos Capítulos

Esse trabalho é apresentado em quatro principais capítulos: Introdução, Revisão da Literatura, Estudo de Caso e Considerações Finais.

No primeiro capítulo, Introdução, o tema e os principais objetivos são anunciados.

No capítulo dois, Revisão da Literatura, é fornecida a base para a compreensão dos conceitos relevantes ao estudo, possibilitando um melhor entendimento dos resultados obtidos no caso prático realizado. Essa seção é dividida em cinco itens: conceituação e contextualização, derivativos, volatilidade e correlação, *value at risk* (VaR) e modelos de cálculo de Value at Risk.

O primeiro item contextualiza o trabalho e introduz os conceitos básicos de risco de mercado aos leitores. O segundo item apresenta os contratos futuros e a termo e explica detalhadamente os conceitos relacionados as opções. A parte teórica escrita nesse item é de suma importância para a compreensão do trabalho. O tema “Volatilidade e Correlação” é apresentado no terceiro item, enquanto que no quarto e quinto itens explica-se o conceito de VaR e as diferentes metodologias utilizadas para o seu cálculo.

No capítulo três são apresentados o trabalho prático e os resultados obtidos.

Por fim, realizam-se algumas considerações sobre estudos futuros e possíveis continuações desse trabalho.

2. Revisão da Literatura

2.1. Conceituação e Contextualização

2.1.1. Introdução ao Risco

A gestão do risco financeiro tornou-se, nos últimos anos, tema recorrente de estudos em instituições financeiras e não financeiras, fundos de investimentos, órgãos reguladores, meio acadêmico, entre outros. A necessidade de uma precisa mensuração do risco ao qual se está exposto ficou ainda mais em evidência após as recentes crises financeiras, que desencadearam longos períodos de instabilidade nos mercados, desconfiança e perdas irreparáveis.

Os casos mais emblemáticos de má gestão de risco (Jorion, 1997) são:

- Metallgesellschaft, em 1993, com prejuízo de US$ 1,3 bilhão;
- Orange County, 1994, prejuízo de US$ 1,7 bilhão;
- A falência do Barings Bank, em 1995, com prejuízo de US$ 1,3 bilhão;
- Caso Daiwa Bank, em 1995, com perdas de US$ 1,1 bilhão.

Na história recente do mercado financeiro, outra crise provocada pela má mensuração e gestão de risco abalou os mercados mundiais, causando reflexos ainda hoje presentes: a crise financeira de 2008. Como relatado por Lowenkron (2009):

> *Em agosto de 2007, ao analisar as perdas ocorridas em alguns de seus principais fundos com base nos resultados dos modelos de gestão de risco, o diretor financeiro da Goldman Sachs declarou ao Financial Times estar vendo movimentos "de 25 desvios-padrão por vários dias seguidos". Uma ilustração interessante do que tais movimentos significam foi fornecida por Haldane (2008): se assumirmos uma distribuição normal, é esperado que um movimento com magnitude de 7,26 desvios-padrão ocorra apenas uma vez a cada 13,7 bilhões de anos. Astrônomos estimam que a idade do universo seja aproximadamente esta. Portanto, para que fosse possível se observar um movimento de "25 sigmas" por vários dias seguidos, como identificado na declaração acima, precisaríamos que a idade do universo fosse multiplicada milhões de vezes. Dado o absurdo da implicação desses números, o diagnostico só pode ser o de que o erro em vários modelos de gestão de risco foi além do aceitável.*

Visando evitar presenciar de forma despreparada momentos de crise, como os já citados, as metodologias de mensuração e gestão do risco tornaram-se foco. Entretanto, a crescente valorização deste campo de estudo é um processo iniciado há apenas algumas décadas. A grande expansão desta indústria foi consequência, principalmente, do aumento da volatilidade das variáveis financeiras (Jorion, 1997). Este aumento pode ser observado desde a década de 70, com o fim do sistema de taxa de câmbio fixa (1971), o choque dos preços do petróleo (1973), a queda da bolsa de Nova Iorque (1987), o estouro do Sistema Monetário Europeu (setembro/1992), a queda do índice Nikkei (1989-1992), entre outros.

Associado a isso, o processo de internacionalização do mercado financeiro nas últimas décadas também desempenhou um importante propulsor no crescente aprimoramento e utilização de técnicas de controle de risco. Este processo tende a produzir uma maior instabilidade nos mercados, ampliando, assim, as possibilidades de perdas significativas. Como mencionado por Mollica (1999), a crise dos mercados asiáticos em outubro de 1997 expôs de forma dramática a intensa relação entre os mercados de todo o mundo. O ataque aos regimes cambiais daqueles países e a subsequente ruptura dos mesmos repercutiu fortemente em diversos outros mercados, tanto de países desenvolvidos como de emergentes. O índice Dow Jones da Bolsa de Nova Iorque registrou quedas históricas. No Brasil, a taxa de juros primária dobrou para conter um ataque especulativo ao Real. Neste panorama, a necessidade de mapeamento das relações entre os diversos mercados se torna evidente.

É essencial que seja ressaltado o papel do avanço da tecnologia da informação na expansão das técnicas de gerenciamento de risco. O aumento da capacidade de processamento dos computadores, com drástica redução no tempo de cálculo, deixou de representar um elemento restritivo no desenvolvimento de novas técnicas de controle de risco. Este fator influenciou diretamente também o forte crescimento do volume de transações financeiras realizadas. O número de ações transacionadas por dia na Bolsa de Nova Iorque passou de 3,5 milhões em 1970 para cerca de 40 milhões em 1990, o volume transacionado de moedas passou de alguns bilhões de dólares em 1965 para mais de 1 trilhão por dia em 1996 (Mollica, 1999).

Não somente o volume movimentado aumentou significativamente. A complexidade dos instrumentos financeiros utilizados acompanhou o novo dinamismo do mercado com o surgimento dos derivativos – ativos cujo valor depende do valor de outros ativos, sendo opções, contratos futuros, swaps os mais comuns (estes ativos serão abordados de forma mais detalhada no item 2.2). Estes instrumentos abriram um novo horizonte de possibilidades de alocação de recursos. Entretanto, isso representou um aumento na complexidade das carteiras, expandindo as fontes de risco e o volume de perdas em situações de estresse.

A associação de todos os fatores supracitados fez com que o aprimoramento de metodologias de identificação e mensuração de todas as fontes de risco se tornasse prioridade para muitos, de modo que fosse possível escolher a quais riscos deseja-se estar exposto. Visto que se trata de uma simplificação da realidade, qualquer modelo está errado em algum nível. O crucial é constituir uma ferramenta útil para a tomada de decisão, como colocado por Keynes, "*it is better to be roughly right than precisely wrong*"[1].

2.1.2. Conceitos de Risco

Para a compreensão da gestão de risco e da sua crescente importância no cenário mundial, é crucial o pleno entendimento do conceito de risco: "o risco pode ser definido como a volatilidade de resultados inesperados, normalmente relacionada ao valor de ativos ou passivos de interesse" (Jorion, 1997). Já Bessis (1998) define risco como impactos adversos na lucratividade causados por fontes diversas de incerteza.

De forma geral, as empresas estão expostas a três tipos de risco: operacional, estratégico e financeiro.

Os *riscos operacionais* consistem naqueles relacionados ao setor da economia em que a empresa opera, que são assumidos de forma voluntária a fim de criar vantagem competitiva. Para êxito de todas as atividades operacionais, uma exposição consciente e precavida a riscos operacionais é essencial.

Os *riscos estratégicos* são aqueles decorrentes de oscilações fundamentais no ambiente econômico ou político.

Os *riscos financeiros* consistem nas possíveis perdas no mercado financeiro, como as advindas das oscilações de taxa de juro e câmbio, por exemplo. Esta classificação pode ser desmembrada de acordo com as diversas fontes de incerteza (Jorion, 1997):

- Riscos de Mercado: aquele que advém da oscilação nos preços de ativos e passivos financeiros, sendo medidos pelas mudanças no valor das posições em aberto ou nos ganhos;
- Riscos de Crédito: perda potencial devido à inabilidade da contraparte de cumprir suas obrigações, sendo medido pelo custo de reposição de fluxos de caixa, caso a outra parte fique inadimplente;

[1] Tradução Livre: É melhor estar grosseiramente certo do que precisamente errado.

- Riscos de Liquidez: subdividido em duas formas. A primeira refere-se às operações que não podem ser conduzidas a preço de mercado devido a uma atividade insuficiente do mercado. O segundo relaciona a impossibilidade de cumprir as obrigações relativas aos fluxos de caixa;
- Riscos Operacionais: refletem as perdas potenciais resultantes de sistemas inadequados, controles defeituosos, má administração ou falha humana;
- Riscos Legais: surgem quando uma contraparte não possui autoridade legal ou regulatória para se envolver em uma operação.

Consultando a bibliografia sobre o assunto, percebe-se que o termo risco possui algumas variações quanto a sua conceituação. Neste trabalho, será utilizada a definição de forma mais abrangente, ou seja, a oscilação ou a incerteza em torno de um valor esperado. Também, o termo risco de mercado será adotado de acordo com J.P. Morgan (1996) e por Jorion (1997), ou seja, como o risco financeiro decorrente de mudanças nas condições de mercado, como taxas de câmbio, juros, preços de *commodities*, preços de ações, entre outros.

Para iniciar-se a gestão de risco, é necessária a identificação dos chamados *fatores de risco* da instituição financeira. Maluf (1996) define fator de risco como todo e qualquer parâmetro de mercado cuja oscilação pode afetar o resultado da instituição por afetar os valores de suas carteiras. Dentre estes fatores, pode-se mencionar, para o caso de uma instituição financeira:

a) Taxas de câmbio das moedas dos ativos em carteira;
b) Preço de ações;
c) Taxa de juros das moedas operadas;
d) Preços de *commodities*;
e) Volatilidade dos ativos-objetos de opções.

2.2. Derivativos

O evento mais significativo em finanças na última década foi, de longe, o extraordinário desenvolvimento e expansão de derivativos financeiros. Estes instrumentos elevam a habilidade de diversificar risco e alocá-lo para os investidores mais aptos e dispostos a tomá-lo – um processo que, sem dúvida, aprimorou o crescimento produtivo nacional e o padrão de vida, disse Alan Greenspan em março de 1999, enquanto exercia o cargo de presidente do *Federal Reserve* dos Estados Unidos, em conferência na Futures Industry Association.

Um contrato de derivativo pode ser definido como "um instrumento financeiro cujo valor depende (ou deriva) do valor de outro instrumento mais básico – variáveis subjacentes" (Hull J. C., 2003). Os derivativos abrangem desde instrumentos básicos, como contratos a termo (*forward contracts*), futuros e swaps (lineares), até mesmo bastante complexos, como algumas notas estruturadas ou opções exóticas. Independente da sua estrutura, qualquer ativo com características de derivativo pode ser precificado como a soma de vários componentes.

Neste item, serão definidos os dois principais tipos de derivativos, futuros/a termo e opções, focando em suas estruturas e diferenças. Visto que o foco do presente trabalho é em opções de compra europeias, este derivativo será apresentado de forma mais detalhada, de modo a possibilitar uma melhor compreensão dos capítulos seguintes.

2.2.1. Contratos Futuros e a Termo

Os contratos futuros e a termo são a classe mais simples de derivativos. Consistem em acordos privados de troca de determinado ativo em certa data futura, cujos parâmetros de negociação são a quantidade, a data e o preço pelo qual a troca será feita. Uma das pontas de um destes contratos concorda em comprar o ativo subjacente numa data futura acordada num determinado preço. A outra ponta concorda em vender este ativo na mesma data, pelo mesmo preço. O contrato futuro ou a termo pode ser contrastado com o contrato spot, que envolve a compra ou venda de um ativo no próprio dia.

As principais diferenças entre os contratos futuros e a termo residem nas suas formas de negociação. O contrato a termo é um acordo feito de modo independente entre as partes, sem a intermediação de nenhum mercado organizado (no caso do Brasil, a Bolsa de Mercadorias e Futuros – BM&F Bovespa). Isso significa que as condições do acordo são totalmente customizáveis, podendo ser de qualquer valor sobre qualquer ativo. Entretanto, devido a esta característica, este contrato não pode ser negociado livremente com outras contrapartes. Além disso, estes contratos não são fungíveis, ou seja, um contrato *forward,* como são chamados internacionalmente, não é intercambiável por outro contrato *forward* com termos similares.

Nestes contratos, cada parte deve ser capaz de confiar que a outra irá honrar seu acordo, uma vez que estão expostas à habilidade e à vontade alheias de manter os termos.

Consequentemente, há um risco de crédito envolvido, o qual é normalmente tomado por bancos. Estas instituições atuam como intermediários, assegurando que, caso seus clientes falhem em honrar o acordo, o banco irá assumir a obrigação.

É importante ressaltar que neste tipo de contrato não há troca financeira entre as partes até a troca efetiva de mercadorias ou ativos financeiros no vencimento. Não há fluxo de caixa, exceto nos casos de acordo de *mark-to-market* entre uma das partes do contrato e o banco. É importante ressaltar também que o preço de entrega, especificado no contrato a termo, é determinado no momento da negociação.

Em contraposição, os contratos futuros são negociados através de agentes em um mercado organizado de futuros. As partes podem representar a si próprias ou clientes no mercado. Há regras e regulamentações específicas que determinam os termos do contrato e o procedimento para negociação. Ou seja, os contratos são de uma determinada quantidade de um determinado ativo a ser entregue num prazo determinado na negociação – contratos padronizados. Uma vez que todos os termos dos contratos futuros são determinados, eles podem ser negociados livremente com outras contrapartes.

Ao passo que o preço de entrega dos contratos *forward* é acordado no momento da negociação, os contratos futuros sofrem ajustes diários, que consistem na média dos preços negociados no dia. Com a aproximação do mês de vencimento de um contrato futuro, o preço futuro converge para o preço à vista do ativo subjacente, se igualando no vencimento. Isso ocorre de modo a evitar que haja arbitragem entre os mercados.

Outra importante característica destes ativos é o fato de que, uma vez finalizada a negociação, a transação é passada para uma *Exchange Clearing Corporation,* ou seja, câmaras que intermediam a liquidação das operações. Uma vez que a *Clearing* deverá viabilizar esta liquidação, ela exige uma margem inicial. Neste caso, a margem consiste em um depósito de boa fé, demonstrando a capacidade e a disposição em honrar com as obrigações contratuais.

Um segundo tipo de margem é cobrado em função do ajuste diário do contrato futuro, utilizado para calcular as perdas e ganhos diários que são depositados nas contas de margem.

De acordo com Jorion (1998), o preço de um contrato a termo/futuro é:

$$f_t = S_t e^{-y\tau} - K e^{-r\tau} \tag{1}$$

Onde:

S_t = preço a vista de um ativo;

f_t = valor atual do contrato;

r = taxa livre de risco;

y = taxa de retorno do ativo;

t[2] = prazo para o vencimento;

K = preço de compra do ativo.

e = logaritmo neperiano.

2.2.2. Opções

As opções são contratos que permitem ao seu titular comprar ou vender um ativo subjacente a um dado preço em uma determinada data futura. Por exemplo, digamos que eu tenha uma casa para alugar e pretendo vendê-la. Resolvo assinar um *leasing*, com opção de comprar da casa por R$300.000, de doze meses com uma contraparte. Como vendedor, eu posso cobrar o aluguel da casa por esses doze meses e, em contrapartida, a contraparte tem esse tempo para decidir se compra ou não a casa ao final do período, pelo preço acordado. Na verdade, esse *leasing* com possibilidade de compra representa uma opção de compra, que dá ao titular o direito de comprar a casa por R$300.000 de forma que se ele não quiser comprá-la, não há nenhuma obrigação.

Uma variedade de fatores pode ajudar o titular a decidir se compra ou não o imóvel, incluindo apreciação da propriedade, meios de transporte na região, clima, custo com reparos e outros. Os preços das casas podem aumentar ou cair durante o período de *leasing*, o que pode vir a ser outro fator decisivo na escolha. Caso a contraparte decida comprar a casa, ela estará exercendo o seu direito, que é garantido pelos termos do contrato. É basicamente assim que as opções de compra funcionam.

No mercado de opções, a opção de compra dá ao investidor o direito de comprar um ativo (índice, futuro, ação) a um preço pré-determinado em um específico período de tempo. O

[2] No presente trabalho, t será adotado para denominar o prazo até o vencimento, enquanto que T denotará o tempo no qual ocorre o vencimento

comprador da opção pode decidir se quer exercer o seu direito ou se deixará a opção expirar. Os contratos das opções podem ser descritos segundo quatro fatores:

a. O tipo do ativo subjacente (ação, índice, etc.);
b. A data de vencimento;
c. O preço de exercício;
d. O tipo da opção: de compra ou de venda.

Opções de Compra

Uma opção de compra (*call*) representa o direito de comprar um ativo em determinada data por certo preço (de exercício). O direito de comprar pertence ao titular da opção, que é quem compra a opção pagando por ela um determinado valor (prêmio). O lançador é quem vende a opção para o titular. Caso o direito de comprar seja exercido pelo titular, o lançador é obrigado a vender o ativo subjacente da opção.

O prêmio de compra antes do vencimento é determinado por vários fatores, que serão vistos mais a seguir. Na data de vencimento, seu valor é:

$$C_T = \max\{(S_T - K), 0\}, \qquad (2)$$

Onde,

S_T = cotação à vista do ativo;

K = preço de exercício.

Na data de vencimento, se o ativo está cotado acima do preço de exercício, a opção de compra valerá S_T-K, pois o titular exercerá o direito de comprar o ativo a K podendo vendê-lo por S_T. Se o ativo estiver cotado ao preço de exercício, ou abaixo, o direito de comprar por K não é exercido. Nesse caso, diz-se que a opção vira pó.

O *payoff* da opção de compra na sua data de vencimento segue o modelo abaixo:

Gráfico 1 - Payoff do Titular de uma Opção de Compra com preço de exercício de R$30

Fonte: Os autores

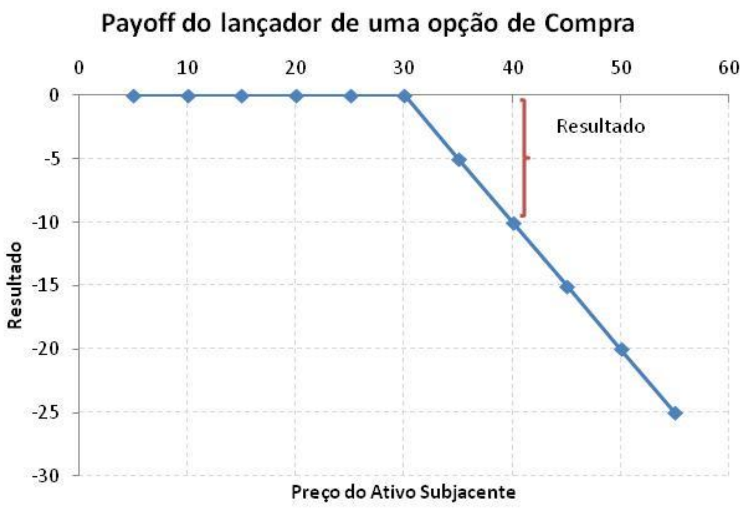


Gráfico 2 - Payoff do Lançador de uma Opção de Compra com preço de exercício de R$30

Fonte: Os autores

Opções de Venda

Uma opção de venda (*put*) representa o direito de vender um ativo em determinada data por certo preço (de exercício). O direito de vender pertence ao titular da opção, ou seja, aquele que compra a opção, pagando por ela um prêmio. Diferentemente das opções de compra, caso o direito seja exercido pelo titular, o lançador é obrigado a comprar o ativo subjacente da opção.

Na data de vencimento, o prêmio da opção de venda é:

$$P_T = \max\{(K - S_T), 0\}, \quad (3)$$

onde, S_T = cotação à vista do ativo e K = preço de exercício.

Na data de vencimento, se o ativo está cotado abaixo do preço de exercício, a opção de compra valerá K-S_T, pois o titular exercerá o direito de vender o ativo a K podendo comprá-lo por S_T. Se o ativo estiver cotado ao preço de exercício, ou acima, o direito de vender por K não é exercido.

O *payoff* da opção de venda na sua data de vencimento segue o modelo abaixo:

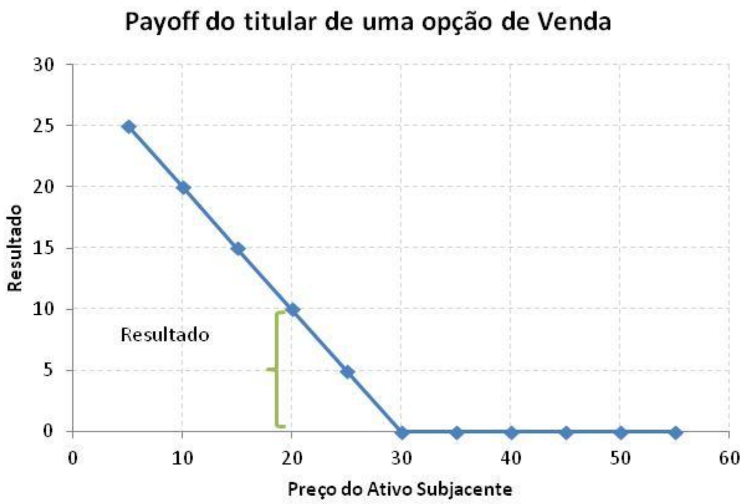


Gráfico 3 - Payoff do Titular de uma Opção de Venda com preço de exercício de R$30

Fonte: Os autores

Gráfico 4 - Payoff do Lançador de uma Opção de Venda com preço de exercício de R$30

Fonte: Os autores

Mercado de Opções no Brasil

No mercado brasileiro, as opções são negociadas na BM&F Bovespa. A liquidez das opções de ações está concentrada nas opções de compra de ações, que representam mais de 90% do volume negociado no mercado de opções de ação.

A identificação das opções é feita pelo símbolo do ativo-objeto associado a uma letra e a um número de série. A letra identifica se ela é uma opção de compra ou de venda e o mês de vencimento.

Tabela 1 - Nomenclatura Opções

Opção		Vencimento
Compra	Venda	
A	M	Janeiro
B	N	Fevereiro
C	O	Março
D	P	Abril
E	Q	Maio
F	R	Junho
G	S	Julho
H	T	Agosto
I	U	Setembro
J	V	Outubro
K	W	Novembro
L	X	Dezembro

Um exemplo de opção negociada na bolsa é: **VALEI40**. Essa opção é uma opção de compra de Vale com vencimento no mês de Setembro e preço de exercício igual a R$40.

Classificação das Opções

As opções podem ser americanas ou europeias. A opção americana pode ser exercida a qualquer momento, até a data de vencimento. Já a opção europeia só pode ser exercida na data do seu vencimento. As opções de ação no Brasil são americanas.

Serão utilizadas no estudo prático opções de compra americanas. Demonstra-se, porém, que nunca é vantajoso exercer uma opção de compra americana antes do seu vencimento. Assim, as opções de compra americanas analisadas serão tratadas com se fossem europeias, pois só serão exercidas no vencimento. A demonstração desta especificidade é encontrada em Hull J. (2003).

Classificação das séries das opções

As séries das opções são classificadas de acordo com o preço de exercício e o preço à vista do ativo subjacente observado no momento. As classificações são:

i. Dentro do dinheiro (*in-the-money*);
ii. No dinheiro (*at-the-money*);
iii. Fora do dinheiro (*out-of-the-money*).

No jargão de Mercado, utiliza-se a expressão *deep-in-the-money* para indicar quando opções estão “muito dentro do dinheiro”.

Tabela 2 - Classificação das Séries das Opções

Fonte: Os autores

	Opção	
Classificação	**Compra**	**Venda**
Dentro do Dinheiro	$S_T > K$	$S_T < K$
No Dinheiro	$S_T = K$	$S_T = K$
Fora do Dinheiro	$S_T < K$	$S_T > K$

Onde:

S_T = Preço do ativo subjacente;

K = Preço de Exercício.

2.2.2.1 Fatores que afetam o preço das opções

O preço de uma opção depende de algumas variáveis, que combinadas geram um valor que representa o custo de obtenção desse ativo. Para compreender como esse preço se comporta quando ocorrem mudanças nos valores das variáveis é necessário conhecer a função de precificação do ativo.

A precificação de um instrumento financeiro pode ser expressa através uma função do tipo f: $R_n \rightarrow R$, que associa o seu preço às variáveis que o influenciam. Na função descrita anteriormente, *n* representa o número de variáveis e *R* é um número real que representa o preço.

No caso das opções de ação, enquanto a opção ainda não atingir o seu vencimento, seu preço é função de seis variáveis (f: $R_6 \rightarrow R$). Assim como em um contrato a termo/futuro, a opção permite que o comprador compre ou venda um ativo em uma determinada data futura. Logo, seu preço deve ser influenciado por pelo menos quatro variáveis que também influenciam o preço dos contratos a termo/futuros (preço spot do ativo subjacente, taxa de juros livre de risco, pagamento de dividendos e tempo até o vencimento). Contudo, as opções também são influenciadas por outras duas variáveis: o preço de exercício e a volatilidade do ativo subjacente. Essas variáveis encontram-se resumidas abaixo:

1. O preço do ativo subjacente (S_0);
2. O preço de exercício (K);
3. O tempo para o vencimento (t);
4. A volatilidade dos retornos do ativo subjacente (σ);
5. A taxa livre de risco (r);
6. Os dividendos esperados durante a validade da opção.

Uma explicação intuitiva de como o preço das opções é influenciado por cada um desses fatores será descrita a seguir. Antes disso, porém, cabe recordar algumas definições introduzidas no início do trabalho. Uma opção de compra/venda garante ao comprador o direito (não é uma obrigação) de comprar/vender um determinado ativo subjacente a um preço previamente acordado, em uma data particular pré-determinada. Para obter esse direito, o comprador paga um prêmio pela opção. Consequentemente, no vencimento, apenas dois fatores influenciarão o valor desse prêmio: o preço do ativo subjacente e o preço de exercício. As equações 2 e 3 já apresentadas representam essa afirmação.

O foco deste item será em opções de ações, visto que este tipo de ativo será aplicado no modelo prático do capítulo 3.

(i) Preço do Ativo Objeto e Preço de Exercício

A diferença entre o preço do ativo subjacente e o preço de exercício define se a opção está fora do dinheiro, no dinheiro ou dentro do dinheiro. No caso das opções de compra, quando o preço do ativo subjacente é maior do que o preço de exercício, a opção está dentro do dinheiro. Quando o preço do ativo for menor do que o preço do exercício, ela está fora do dinheiro. Para as opções de venda ocorre exatamente o contrário: a opção está dentro do dinheiro se o preço do ativo subjacente é menor do que o preço de exercício e fora do dinheiro caso o preço do ativo subjacente seja maior do que o preço de exercício. Em ambos os casos, a opção está no dinheiro quando os preços do ativo e de exercício são iguais.

Quanto maior for o preço do ativo subjacente em relação ao preço de exercício, maior será $Max(S_T - K, 0)$ e, portanto, mais valiosa será a opção de compra; considerando-se todas as outras variáveis constantes. Seguindo o mesmo raciocínio, o termo $Max(K - S_T, 0)$ será menor fazendo com que as opções de venda sejam menos valiosas quando S_T aumenta.

Analisando os mesmos termos acima, fixando o preço do ativo subjacente (S_T), fixando todas as outras variáveis e alterando apenas o preço de exercício *(K),* conclui-se que quanto maior for o preço de exercício em relação ao preço do ativo-objeto, maior será o valor das opções de venda e menor será o valor das opções de compra.

Por exemplo, considere que uma ação Z está sendo negociada a um preço de R$50 e que existem duas opções de compra idênticas exceto pelo preço de exercício. Uma das opções possui um preço de exercício igual a R$60 e a outra R$80. Ambas estão fora do dinheiro, pois $S_T < K$. Porém, quando comparada com a segunda opção, a primeira tem maior probabilidade de estar dentro do dinheiro no vencimento, considerando que todos os outros fatores são iguais. Se elas fossem opções de venda estariam dentro do dinheiro e a segunda opção teria maior probabilidade de continuar dentro do dinheiro no vencimento.

Assim, podemos resumir a influência do preço do ativo objeto e do preço de exercício da seguinte forma: quanto mais no dinheiro a opção estiver, maior será o seu valor e quanto mais fora do dinheiro ela estiver, menor será o seu valor. Os gráficos a seguir ratificam esse comportamento.

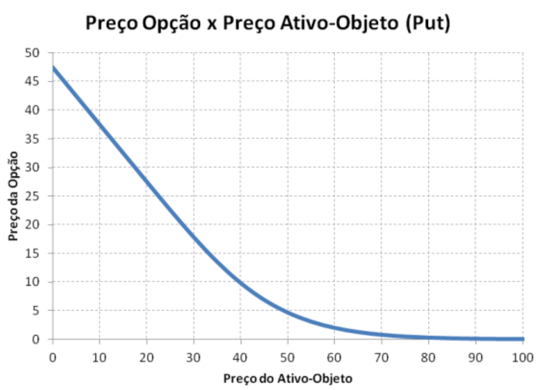


Gráfico 5 - Prêmio x Preço Ativo Subjacente (call/put)

Fonte: Os autores

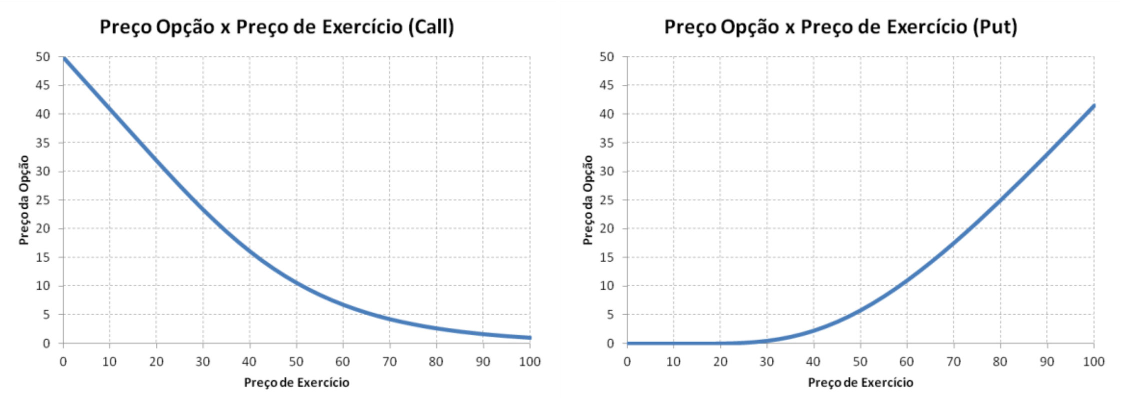


Gráfico 6 - Prêmio x Preço Exercício (call/put)

Fonte: Os autores

Analisando os gráficos, percebe-se que os prêmios das opções não variam linearmente com os fatores que o influenciam. Se essa variação fosse linear, as derivadas das funções deveriam ser valores constantes, o que não pode ser evidenciado nas imagens acima.

Esse ponto é muito importante, pois a hipótese de linearidade é utilizada por alguns modelos de cálculo de VaR. Para alguns ativos, como as opções, esse tipo de modelo pode causar distorções no cálculo do risco.

(ii) Tempo para o Vencimento (T –t)

O tempo para o vencimento influencia os preços das opções de duas formas. A primeira é relacionada com a influência do tempo no valor provável do preço do ativo subjacente na data de vencimento. Definiremos esse primeiro termo como sendo o efeito de volatilidade. A segunda maneira está relacionada com a influência do tempo no valor presente de preço de exercício da opção. Definiremos esse segundo termo como efeito de desconto.

No caso do efeito de volatilidade, quanto mais tempo até o vencimento maior é a probabilidade de no vencimento o preço do ativo subjacente seja diferente do preço de exercício. Essa probabilidade agrega valor à opção e, portanto, quanto maior ela for, maior será o seu preço. No caso de uma opção de compra, se o preço do ativo for maior do que o preço de exercício o comprador terá um ganho. Caso o preço ande no sentido contrário e fique menor do que o preço de exercício, o máximo que o comprador pode perder é o prêmio pago pela opção. Como o comprador tem um limite máximo de perda e pode ter ganhado ilimitado, fica claro porque a probabilidade de mudança no preço agrega valor à opção.

Utilizaremos um exemplo para que o efeito de volatilidade fique claro. Considere uma opção de compra com um preço de exercício de R$50, uma ação que está sendo negociada a R$50 e com o vencimento em um dia. A probabilidade do preço da ação subir ou cair mais do que a média diária é muito baixa e, por isso, essa opção com apenas um dia para o vencimento possui baixa probabilidade de no vencimento estar *deep in the money*. Isso faz com que ela possua um valor baixo. Por outro lado, se essa opção estivesse a seis meses do vencimento, existiria uma maior probabilidade do preço do ativo subjacente, no vencimento, ser diferente do preço de exercício. Essa diferença será maior quanto maior for a volatilidade do ativo. Logo, a opção com seis meses até o vencimento possui maior probabilidade de estar significativamente dentro do dinheiro na data de vencimento.

O efeito de desconto ocorre quando se desconta o preço de exercício *(K)* a valor presente. As fórmulas abaixo exemplificarão a relação do tempo com o valor do *payoff* da opção no presente. Considere a mesma opção de compra citada no parágrafo anterior e uma taxa de juros livre de risco de 5% a.a.

O valor do *payoff* de um investidor no vencimento é: $c_T = Max(S_T - K, 0)$. Se quisermos analisar o *payoff* do investidor a seis meses do vencimento, teríamos a seguinte equação[3]:

$$c_t = Max\left(S_t - \frac{K}{e^{rt}}, 0\right). \quad (6)$$

Onde:

K = Preço de Exercício;
S_t = Preço do Ativo Subjacente a seis meses do Vencimento;
r = Taxa de juros livre de risco anualizada;
t = Tempo para o vencimento.

De acordo com a fórmula, quanto maior o tempo até o vencimento (*t*), menor será o valor presente do preço de exercício e consequentemente, maior será o ganho do investidor. Assim, para uma opção de compra, quanto maior o tempo para o vencimento, maior o valor da opção.

No caso de uma opção de venda teríamos a situação inversa, pois a fórmula do *payoff* seria o valor presente do preço de exercício subtraído do preço do ativo subjacente. Como foi visto, quanto maior o tempo para o vencimento, menor o valor presente do preço de exercício. No caso da opção de venda, quando menor esse valor presente, menor será o ganho do investidor e, portanto, menor será o valor da opção.

No caso de opções de compra, o efeito de desconto reforça o efeito de volatilidade, enquanto que no caso de opções de venda o efeito de desconto atua no sentido oposto do

[3] O mercado brasileiro utiliza juros compostos ao passo que o mercado americano utiliza juros contínuos. No modelo de precificação adotado a taxa juros é tratada continuamente, por isso, será utilizado esse padrão para todo o trabalho.

efeito de volatilidade. Os gráficos abaixo ilustram os efeitos em opções de compra e de venda. Como esperado, a curva do gráfico que representa o preço da opção pelo tempo até o vencimento das opções de venda é menos acentuada do que a curva do gráfico das opções de compra.

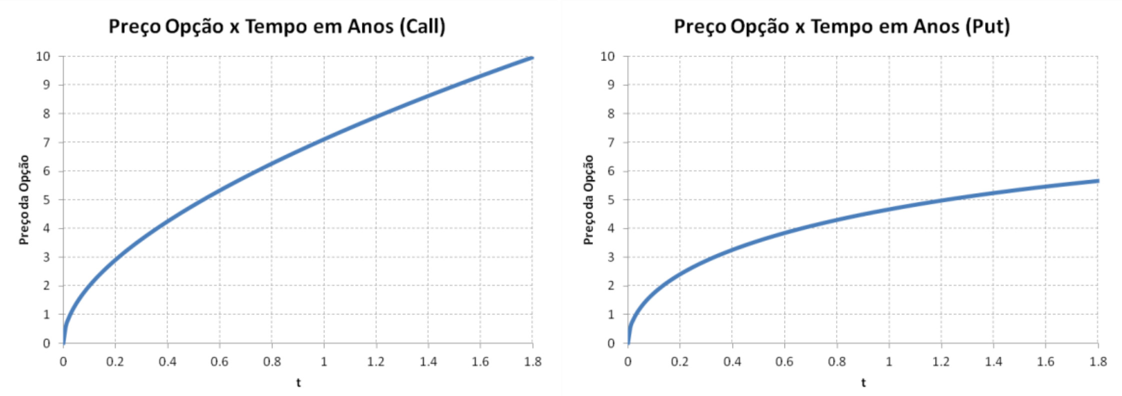


Gráfico 7 - Prêmio x Tempo (call/put)

Fonte: Os autores

(iii) Volatilidade do Ativo Objeto

Tanto as opções de compra quanto as de venda são influenciadas positivamente pela volatilidade do ativo objeto. Quanto mais volátil for o ativo maior será o valor da opção. Isso ocorre, pois quanto maior a volatilidade, maior é a chance do preço do ativo ficar a cima (opções de compra) ou abaixo (opções de venda) do preço de exercício na data de vencimento. Como dito antes, é verdade que o preço do ativo pode se movimentar para o sentido no qual a opção fica fora do dinheiro, porém, como a opção não precisa ser obrigatoriamente exercida, a maioria desse efeito acaba sendo desconsiderada. Assim, o potencial de ganho é maior quando a volatilidade é maior e a opção torna-se mais valiosa.

A volatilidade é uma variável que não é conhecida e que deve ser estimada quando a opção está sendo precificada. Existem três conceitos diferentes de volatilidade que são importantes e que afetam o preço das opções. O primeiro é a volatilidade histórica, que nada mais é do que a volatilidade calculada utilizando-se a série histórica dos retornos do ativo. Ela é normalmente utilizada como base para previsão da volatilidade do ativo ao longo da vida da opção. O segundo conceito é o de volatilidade realizada, que é uma medida de volatilidade calculada na data de vencimento da opção, indicando o quão volátil o preço do ativo foi durante a vida da opção.

O terceiro conceito é o de volatilidade implícita. Para se encontrar a volatilidade implícita é necessário utilizar a função inversa de precificação das opções, considerando como preço da opção o seu preço de negociação no mercado. A volatilidade implícita é na verdade uma conta de chegada, para que o preço da opção se iguale ao preço que ela está sendo negociada no mercado.

Suponha que utilizamos a volatilidade histórica para calcular o preço de uma opção de compra e que chegamos a seguinte equação:

$$c_t = f(S_t, \sigma^2, K, t, r). \tag{7}$$

Onde,

S_t = Preço do ativo subjacente;

σ^2 = Volatilidade histórica;

K = Preço de exercício;

t = Tempo para o vencimento;

r = Taxa de juros livre de risco.

Esta função consiste no modelo proposto por Black&Scholes [4] para precificação de derivativos.

Porém, ao procurar os preços dessa opção no terminal *Bloomberg*, ou com uma corretora, descobrimos que a opção está sendo negociado a um preço c_1 diferente de c_t. O fator que explica essa diferença entre os preços é a volatilidade implícita, que é considerada como sendo o consenso do mercado para as expectativas futuras da volatilidade do ativo subjacente. Percebe-se que as entidades que estão negociando as opções no mercado não estão de acordo com o valor da medida da volatilidade histórica e por isso existem diferenças entre o preço fornecido pelo modelo de Black&Scholes e pelo preço de negociação do mercado. Quando se calcula o risco de uma opção deve-se levar em consideração a volatilidade implícita, pois é ela que melhor representa a expectativa do mercado em relação à volatilidade daquele ativo.

$$c_1 = f(S, Vol\ Implícita, K, t, r) \tag{8}$$

[4] Modelo proposto por Fisher Black e Myron Scholes em 1973 para precificação de ativos, sendo um dos mais difundidos no mercado atualmente por sua simplicidade e eficácia.

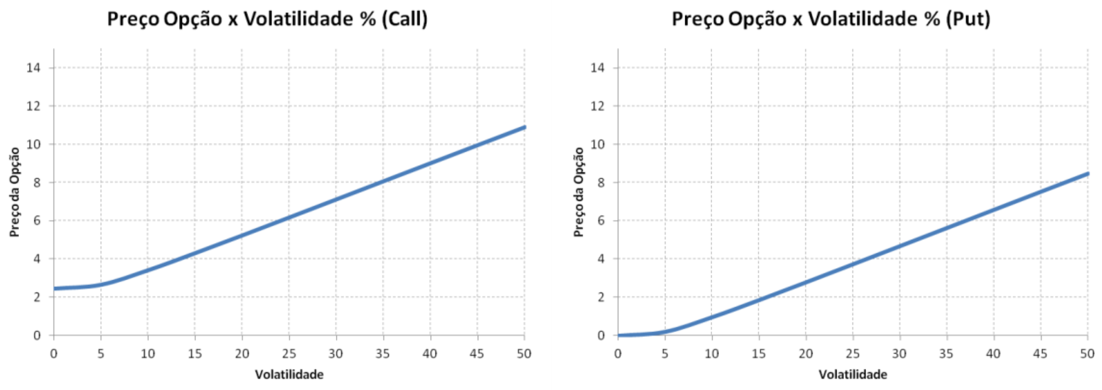


Gráfico 8 - Prêmio x Volatilidade (call/put)

Fonte: Os autores

(iv) Taxa de Juros Livre de Risco[5]

Para entender a influência da taxa livre de risco nos preços das opções vamos recapitular que: quanto mais dentro do dinheiro a opção estiver, maior será o seu valor. Devemos também lembrar que o preço de exercício não precisa ser pago (opção de compra) ou recebido (opção de venda) até a data de vencimento. Assim, em qualquer data antes do vencimento, o preço da opção será influenciado pela diferença entre o preço do ativo subjacente e o valor presente do preço de exercício, descontado a taxa livre de juros.

Utilizando-se da fórmula apresentada no item (ii): $c_t = Max\left(S_t - \frac{K}{e^{rt}}, 0\right)$, percebe-se intuitivamente que quanto maior a taxa de juros (r), maior o valor da opção de compra. No caso de uma opção de venda, teremos que: $p_t = Max\left(\frac{K}{e^{rt}} - S_t, 0\right)$ e portanto, quanto maior a taxa de juros (r), menor o valor da opção.

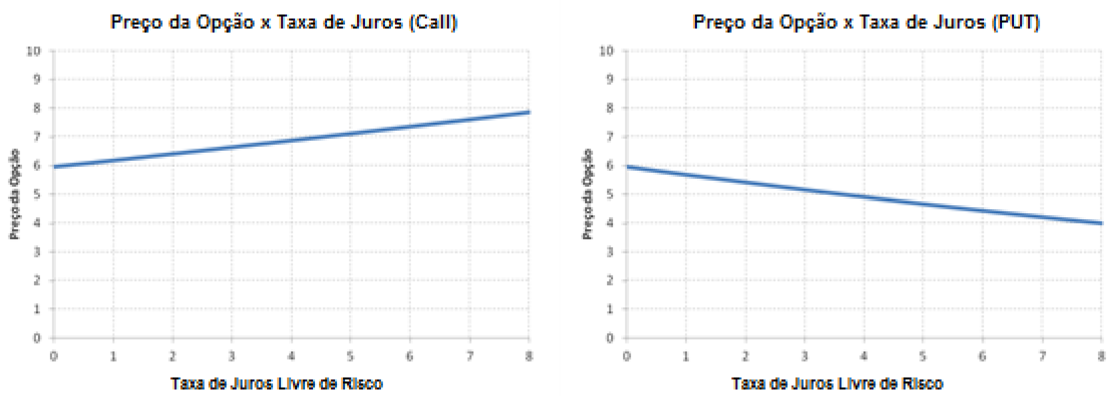


Gráfico 9 - Prêmio x Taxa de Juros Livre de Risco (call/put)

Fonte: Os autores

[5] É prática no mercado internacional de opções utilizar a LIBOR como taxa de juros livre de risco.

(v) Pagamento de Dividendos

Os dividendos influenciam os preços das ações devido ao ajuste realizado na sua série de preços. Na data de pagamento do dividendo, que é especificada pela bolsa de valores, o preço das ações é ajustado e cai de um montante proporcional ao valor dos dividendos.

As opções de compra perderão valor se comparadas com as mesmas opções caso a empresa não tivesse pagado dividendos. Já as opções de venda, contrariamente se valorizarão.

Até o momento apresentamos seis fatores que influenciam os preços das opções, porém, existe outro fator muito importante que deve ser mencionado: oferta e demanda. Se a demanda exceder a oferta no mercado de negociação, os preços das opções aumentarão. Quando o preço de mercado de uma opção varia e os outros fatores que influenciam o seu preço permanecem fixos, a volatilidade implícita será o fator que variará. Nessas circunstâncias as mudanças na volatilidade implícita podem ser consideradas como sendo um reflexo das mudanças de oferta e demanda pela opção em questão assim como um consenso a cerca da volatilidade futura do ativo objeto.

Para finalizar esse tópico, resumimos na tabela abaixo as influências das seis variáveis descritas nos preços das opções de compra e venda.

Tabela 3 - Influência de Variáveis no Preço de uma Opção

	Preço Ativo Objeto		Preço Exercício		Tempo até Vencimento		Taxa de Juros Livre de Risco		Volatilidade Ativo Objeto		Dividendos	
	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-
Call	↑	↓	↓	↑	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↓	↑
Put	↓	↑	↑	↓	↑	↓	↓	↑	↑	↓	↑	↓

Fonte: Os autores

Agora que já sabemos quais variáveis influenciam o prêmio das opções e o porquê, detalharemos um pouco mais o conceito do significado do prêmio. Na literatura corrente, encontraremos artigos e livros que decompõem o valor do prêmio em duas componentes: valor intrínseco e valor no tempo. Nós acreditamos que essa decomposição não representa o seu real significado e preferimos dividi-lo em três componentes: valor intrínseco, valor no tempo e valor de segurança.

O valor intrínseco é a parte do prêmio que representa o quanto a opção está dentro ou fora do dinheiro, ou seja:

i. Opção de Compra: $Max(S_T - K, 0)$;
ii. Opção de Venda: $Max(K - S_T, 0)$.

O valor de segurança equivale a um montante pago pelo direito de não exercer a opção, sem penalidade financeira. Seu valor é influenciado pela volatilidade do ativo subjacente e é igual para opções de compra e de venda que possuam o mesmo preço de exercício e o mesmo tempo de maturidade. A volatilidade do ativo influencia de maneira similar os dois tipos de opções (compra e venda).

Consequentemente, a diferença entre o prêmio das opções de compra e de venda que possuam mesmo preço de exercício e maturidade advém das outras duas componentes: valor intrínseco e o valor no tempo.

O componente do valor no tempo é positivo para opções de compra, pois reflete o fato de que o comprador não precisa desembolsar dinheiro para pagar pelo ativo subjacente, uma vez que o desembolso financeiro só ocorrerá na data de vencimento. Nesse caso, o investidor tem a possibilidade de colocar esse dinheiro não desembolsado para render a taxa de juros livre de risco durante o período no qual a opção é válida. Já no caso das opções de venda, esse valor é negativo e só se aplica a opções de venda que se encontram dentro do dinheiro. Ele representa os juros perdidos pelo comprador, pois ele só receberá o dinheiro da venda do ativo na data de vencimento da opção, não podendo colocar esse dinheiro para render. No caso de opções de venda fora do dinheiro, não existe incentivo para o comprador exercê-la e, portanto, não há juros perdidos.

O exemplo a seguir ilustrará esses pontos: suponha uma ação que esteja sendo negociada a R$ 45, que possua uma opção de compra e uma de venda com preço de exercício de R$45 e tempo até o vencimento de um ano. Considere a taxa de juros livre de risco de 7.5% a.a e a volatilidade dos retornos da ação de 35% a.a. Utilizando-se o modelo de Black&Scholes (fórmula de precificação das opções) que será apresentado mais adiante e utilizando os dados fornecidos, encontramos um prêmio de R$4.54 para uma opção de venda e R$7.79 para uma opção de compra.

Tabela 4 - Prêmio Opção de Compra x Venda

	Prêmio (preço da opção)
Opção de Compra	R$7.79
Opção de Venda	R$4.54

Fonte: Os autores

As duas opções estão no dinheiro *(S_T=K)* e, portanto, não possuem valor intrínseco. Primeiramente, suponha que um investidor decidiu que ao invés de desembolsar R$45 em t para comprar uma ação, tenha comprado a opção de compra (descrita acima) e tenha investido em um banco o valor presente do preço de exercício da mesma $R\$45 \times (1 - e^{-7.5\%})$. Na data de vencimento T, ele receberá J = $R\$45 \times e^{7.5\%}$ = R$ 3.25 de juros (considerando-se juros contínuos) provenientes do depósito realizado. Dependendo do preço da ação S_T no vencimento, ele poderá exercer a opção e ganhar um montante além dos juros, caso a opção esteja dentro do dinheiro ou caso a opção esteja fora do dinheiro, ele simplesmente não exercerá o seu direito e ficará apenas com os juros. O componente do valor no tempo para uma opção de compra é o juros acumulado no período até o vencimento da opção, proveniente da aplicação de um montante não desembolsado em t para a compra da ação.

Como foi demonstrado, o valor no tempo da opção de compra seria de R$3.35. O restante do prêmio da opção, que é igual a R$4.54 x (R$7.79 - R$3.25) é equivalente a componente de segurança, ou seja, o valor pago pelo direito de não ser obrigado a exercer o contrato.

Outro investidor poderia ao invés de comprar a ação, vendê-la a R$45 e aplicar esse dinheiro no banco, recebendo juros no futuro. Porém, se optar por essa estratégia e o preço da ação subir, ele não terá ganhado algum com a ação, pois já terá vendido os papéis no passado e aplicado o dinheiro. Alternativamente, poderia ter comprado uma opção de venda que está sendo negociada a R$4.54. Essa opção permitiria que ele obtivesse ganhos caso o preço da ação no vencimento estivesse abaixo do preço de exercício (teria o direito de vender a ação por R$45 enquanto ele estivesse sendo negociada a um preço abaixo de R$45) e forneceria proteção contra perdas (teria o direito de não exercer a opção, não sendo obrigado a vender a ação caso ela estivesse sendo negociada a um preço superior a R$45) no caso de uma alta do preço. Quando a opção de venda não está dentro do dinheiro, ela não possui valor intrínseco e como o comprador não é incentivado a exercer o sua direito, ela não possui valor no tempo.

A questão da opção de venda não possuir valor no tempo quando está no dinheiro ou fora do dinheiro fica clara se analisarmos o caso de uma opção de venda que esteja dentro do dinheiro. Suponha que a opção de venda seja a mesma do parágrafo anterior, porém, a ação agora está sendo negociada a R$40. Nesse cenário, o investidor é incentivado a exercer a opção imediatamente (diferentemente de quando a opção de venda está no dinheiro ou fora do dinheiro), pois venderia em t a ação por $R\$45 \times (1 - e^{-7.5\%})$.. Ele poderia investir esse dinheiro no banco à taxa de juros livre de risco, recuperando em T um montante de juros de R$3.25.

Como o titular só pode exercer a opção na data de vencimento (T), ele deixa de ganhar esse montante, explicando porque o valor no tempo das opções de venda dentro do dinheiro é negativo. Segundo o modelo de Black&Scholes, o preço justo dessa opção de venda seria de R$6.59. Na tabela abaixo decompomos o seu prêmio:

Tabela 5 - Decomposição Preço de uma Opção de Venda

Prêmio da Opção de Venda	R$6.59
Valor no Tempo	-R$3.25
Valor Intrínseco	R$5.00
Valor de Segurança	R$4.85

Fonte: Os autores

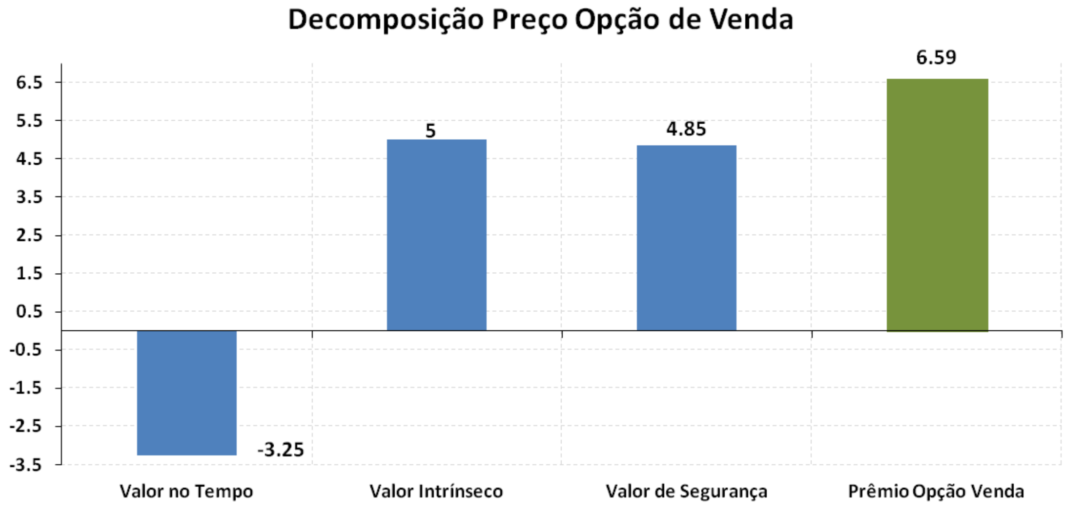


Gráfico 10 - Decomposição Preço Opção de Venda

Fonte: Os autores

É bastante útil pensar nesse método de decomposição do prêmio das opções, pois, entendemos quais parcelas contribuem para o preço desse ativo. Além disso, a diferença entre opções e contratos futuros/termos é evidênciada. Ambos são contratos negociados no futuro a um preço pré-determinado e por isso, possuem as componentes valor no tempo e valor intrínseco. As opções porém, possuem um componente adicional, que é o valor de segurança.

2.2.2.1. Modelo de Black&Scholes

No início dos anos 1970, Fischer Black, Myron Scholes e Robert Merton revolucionaram a teoria de precificação de opções criando o modelo de Black&Scholes. O modelo contribuiu para o crescimento e sucesso da engenharia financeira entre 1980 e 1990 e influenciou a maneira como os negociadores precificam as opções. Scholes e Merton receberam em 1997 o prêmio Nobel de economia, dada a importância do modelo. Infelizmente, Black faleceu em 1995 e não participou da premiação (Hull J. C., 2003).
Nós apresentaremos o modelo desenvolvido para precificar opções europeias de compra e de venda que leva em consideração o não pagamento de dividendos durante o seu período

de maturidade. Antes de definirmos o modelo, é preciso compreender as distribuições de probabilidade dos preços e dos retornos dos ativos e alguns outros conceitos estatísticos.

Distribuição dos preços dos Ativos

Grande parte dos modelos adotados em finanças assume que a mudança percentual no preço dos ativos em um curto período de tempo é distribuída Normalmente. Assim, define-se:

$$\mu: Retorno\ Esperado\ do\ Ação;$$
$$\sigma: Desvio\ Padrão\ do\ preço\ da\ Ação.$$

A média da mudança percentual do preço em um tempo δt é $\mu\delta t$ e o desvio padrão é $\sigma\sqrt{\delta t}$. Essas fórmulas são válidas pois as distribuições normais consideradas são independentes. Temos que:

$$\frac{\delta S}{S} = \phi(\mu\delta t, \sigma\sqrt{\delta t}). \quad (9)$$

Onde δS representa uma mudança no preço da ação no tempo δt e $\phi(m, dp)$ denota uma distribuição normal com média *m* e desvio padrão *dp*. Nós trabalharemos, porém, com um modelo de variação logarítmica, devido a algumas características dessas funções. Acreditamos que esse modelo possui melhor ajuste à distribuição normal, além de facilitar os cálculos.

$$\ln S_T - \ln S_0 \sim \phi[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma\sqrt{T}], \quad (10)$$

$$\ln \frac{S_T}{S_0} \sim \phi[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma\sqrt{T}], \quad (11)$$

$$\ln S_T \sim \ln S_0 + \phi[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma\sqrt{T}]. \quad (12)$$

Nas equações apresentadas, S_T é o preço da ação em T e S_0 é o preço da ação em *t*. Pode-se retirar duas conclusões a cerca do que foi mostrado:

1. $\ln S_T$ é normalmente distribuído;

2. S_T possui uma distribuição Lognormal.

Uma variável que possua distribuição lognormal pode assumir qualquer valor entre zero e infinito e a diferença dessa distribuição para a distribuição normal advém do formato de sua função de probabilidade, que faz com que na distribuição lognormal, a média, a moda e a mediana sejam todas diferentes.
Pode-se demonstrar a partir das equações apresentadas que o valor esperado de S_T e sua variância são:

$$E(S_T) = S_o e^{\mu t}, \quad (13)$$

$$var(S_T) = {S_0}^2 e^{2\mu T}(e^{\sigma^2 T} - 1). \quad (14)$$

Distribuição dos retornos dos Ativos

Dada a distribuição dos preços dos ativos, obtêm-se uma ideia primária da distribuição dos seus retornos. Partiremos da distribuição dos preços para desenvolver novas equações e definir a distribuição dos retornos.

Definindo a taxa contínua de retorno entre $t_0 \; e \; T$ como γ, temos que:

$$S_t = S_0 e^{\gamma t}, \quad (15)$$

$$\gamma = \frac{1}{T}\ln\frac{S_T}{S_0} \quad (16)$$

Substituindo a equação (i) na equação (ii), temos:

$$\gamma \sim \phi[(\mu - \frac{\sigma^2}{2}), \frac{\sigma}{\sqrt{T}}] \quad (17)$$

Ou seja, a taxa de retorno contínua também segue uma distribuição normal, porém com média e desvio padrão diferentes da distribuição dos preços. Uma observação interessante é que o desvio padrão da distribuição dos retornos diminui com o tempo, ou seja, temos mais certeza da média do retorno anual dado um período de vinte anos do que um período de um ano.

Dado que conhecemos as distribuições dos preços e dos retornos dos ativos, introduziremos o modelo padrão utilizado para descrever a possível trajetória dessa variável durante um dado período de tempo.

Processo estocástico em tempo contínuo e discreto

Um processo estocástico é uma sequência de variáveis aleatórias provenientes de uma mesma família de distribuições. Para a maioria dos casos, as variáveis aleatórias são contínuas e distribuídas normalmente, porém, também podem ser discretas.
Um processo estocástico contínuo possui dinâmicas que são representadas por equações diferenciais estocásticas. Essa representação é dividida em dois termos: o primeiro que define uma parte determinística e o segundo, que define uma parte estocástica. Um processo de Wiener, também conhecido como Movimento Browniano, descreve a parte estocástica.
Assim, um processo de Wiener é um processo contínuo com incrementos estacionários independentes e normalmente distribuídos. Referimos-nos aos incrementos como Z(t).

$$E(dZ) = 0 \quad \text{e} \quad V(dZ) = dt \qquad (18)$$

Agora, introduzimos o modelo padrão para o preço de ativos e seus retornos em tempo contínuo e discreto. Para representar a dinâmica dos preços dos ativos, geralmente utiliza-se o movimento geométrico browniano que é descrito pela seguinte equação diferencial estocástica:

$$\frac{d(S_t)}{(S_t)} = \mu dt + \sigma dZ(t) \qquad (19)$$

Segundo artigos apresentados por Black & Scholes (1973) e Merton (1973), os parâmetros μ e σ são constantes. Um trabalho apresentado por Mandlebrot (1963) defende que a volatilidade dos ativos não pode ser considerada como uma constante, porém, o framework apresentado por Black&Scholes continua a ser utilizado como um padrão pelo mercado.

Lema de Ito

Segundo Ito, a equação diferencial estocástica de uma função *f* qualquer de S e *t* pode ser derivada de:

$$df(S,t) = \left\{ f_t(S,t) + \mu S(t) f_s(S,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S(t)^2 f_{ss}(S,t) \right\} dt + f_s(S,t)\sigma S(t) dZ(t) \qquad (20)$$

A aplicação do lema de Ito para *f* = lnS mostra que a representação de um movimento geométrico browniano para o preço dos ativos em tempo contínuo é equivalente a um processo aritmético browniano para o logaritmo dos preços em tempo discreto:

$$dlnS(t) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dZ(t) \tag{21}$$

Derivando a fórmula do modelo

Assumimos que os preços das ações seguem o seguinte processo:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dZ \tag{22}$$

Black & Scholes por meio de cálculos estocásticos chegam a seguinte equação diferencial:

$$\left(\frac{\delta f}{\delta t} + rS\frac{\delta f}{\delta S} + \frac{1}{2}\frac{\delta^2 f}{\delta S^2}\sigma^2 S^2\right) dt = rf \tag{23}$$

A solução dessa equação depende das condições de contorno escolhidas. No caso de opções europeias de compra temos a seguinte condição:

$$f = max(S_T - K, 0)\ quando\ t = \tag{24}$$

Qualquer função $f(S,t)$ que seja solução dessa equação diferencial, representará o preço teórico da opção.
Manipulando as equações [22] e [23] e utilizando-se as condições de contorno, obtêm-se as fórmulas abaixo para os preços das opções europeias de compra e venda em um tempo t_0:

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2), \tag{25}$$

$$p = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1). \tag{26}$$

Onde,

$$d_1 = \frac{\ln\left(S_0/_K\right) + \left(r + \sigma^2/_2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{27}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(S_0/_K\right) + \left(r - \sigma^2/_2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{t} \tag{28}$$

A função *N(x)* é a função cumulativa de probabilidade de uma distribuição normal padronizada. Ou seja, *N(x)* representa a probabilidade de que uma variável com distribuição normal $\phi(0,1)$ seja menor do que *x*. As variáveis *c* e *p* são os respectivos preços das opções de compra e de venda, S_0 é o preço da ação no tempo zero, K é o preço de exercício, r é a taxa de juros livre de risco, σ é a volatilidade dos retornos da ação e T é o tempo para a maturidade da opção.

Propriedades das fórmulas de Black&Scholes

Para uma opção de compra temos a seguinte fórmula de precificação: $c = S_0N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)$. De maneira a facilitar a compreensão, podemos reescrevê-la da seguinte forma:

$$c = e^{-rT}[\, S_0N(d_1)e^{rT} - KN(d_2)], \tag{29}$$

$$c = e^{-rT}[E(Lucro) - E(Custo)]. \tag{30}$$

A expressão $N(d_2)$ é a probabilidade que a opção seja exercida e, logo, o termo $KN(d_2)$ será a probabilidade de que o preço de exercício seja pago. A expressão $S_0N(d_1)e^{rT}$ é o valor esperado de uma variável que é igual a S_T quando $S_T > K$ e igual a zero nos outros casos.
Quando o valor do preço da ação se torna muito grande, a opção de compra será quase certamente exercida, se tornando muito similar a um contrato futuro com preço de entrega K. Seu preço esperado seria:

$$f_t = S_0 - Ke^{-rT} \tag{31}$$

Isso ocorre, pois, quando S_0 é muito grande, d_1 e d_2 também são muito grandes e N(d_1) e N(d_2) se aproximam de 1. Já o preço de uma opção de venda, aproxima-se de zero, pois N($-d_1$) e N($-d_2$) se aproximam de zero.

Agora, o que aconteceria com o preço da opção quando a volatilidade σ se aproximasse de zero. O ativo ficaria virtualmente livre de risco e seu preço cresceria a uma taxa S_0e^{rT}, dado que N(d_1) e N(d_2) teriam valores próximos a um.

O payoff para uma opção de compra seria:

$$\max(S_0e^{rT} - K, 0) \tag{32}$$

Descontando esse payoff a uma taxa r, o valor da opção no presente seria:

$$e^{-rT}\max(S_0e^{rT}-K,0)=\max(S_0-Ke^{-rT},0) \qquad (33)$$

2.2.2.2. Gregas

O risco das opções é analisado em função das letras “gregas”, que representam derivadas da função do modelo de precificação das opções. De acordo com a fórmula de Black-Scholes, o prêmio de uma opção é função do preço do ativo subjacente (S), da volatilidade dos retornos do ativo subjacente (σ^2), do preço de exercício (K), do prazo para o vencimento da opção (t) e da taxa de juros livre de risco (r).

$$C=f(S,\sigma^2,K,t,r) \qquad (34)$$

Essa função pode ser expandida utilizando-se a série de Taylor, que permite calcular o valor de uma função por aproximação local através de um polinômio:

$$C_1-C_0=\Delta(S_1-S_0)+\frac{\Gamma}{2}(S_1-S_0)^2+\Phi({\sigma^2}_1-{\sigma^2}_0)+\Theta(t_1-t_0)+\rho\,(r_1-r_0)+\cdots \qquad (35)$$

Δ (delta) = derivada parcial do preço da opção em relação ao preço do ativo-objeto
Γ (gama) = derivada parcial segunda do preço da opção em relação ao preço do ativo-objeto
Φ (vega) = derivada parcial do preço da opção em relação à volatilidade
Θ (theta) = derivada parcial do preço da opção em relação ao prazo de vencimento
Ρ (rho) = derivada parcial do preço da opção em relação ao a taxa de juros sem risco

As gregas medem diferentes dimensões do risco em uma posição de opções, sendo utilizadas pelos negociantes para gerenciar os riscos de suas carteiras. As gregas apresentadas segundo a série de Taylor serão discutidas a seguir.

(i) Delta - O delta é definido como sendo a mudança no prêmio da opção devido a uma mudança no preço do ativo subjacente. Essa medida é, em essência, a primeira derivada da função do preço e seu valor varia de -1 a 1. As opções de compra possuem delta positivo, enquanto que as opções de venda possuem delta negativo.
Conforme visto anteriormente, quando maior o preço do ativo subjacente maior o preço da opção de compra. Um Delta positivo gera um aumento no preço do ativo subjacente, aumentando o valor da opção de compra. Já no caso das opções de venda, temos o caso

contrário. Podemos assim resumir que as opções de compra possuem delta positivo enquanto que as opções de venda possuem delta negativo.

Além disso, quanto mais *deep in the money* a opção estiver, maior será o delta. Podemos pensar no Delta como sendo a probabilidade da opção estar dentro do dinheiro no vencimento. Ou seja, quando mais no dinheiro mais próximo de 1 é o Delta e quanto mais fora do dinheiro, mas próximo de zero. Quando a opção está muito dentro do dinheiro ele começa a se comportar como um futuro, pois o delta se aproxima de 1 e suas variações tornam-se mais lineares.

O método analítico mais simples analisa os riscos das opções usando o delta, ou seja, ele considera apenas o primeiro termo da série de Taylor, considerando que o único fator de risco das opções é a variação do preço da ação. Porém, essa aproximação só é válida para pequenas variações de preço e utilizar apenas o delta no cálculo do VaR pode levar a erros substanciais.

O delta não varia apenas com o preço do ativo subjacente. A volatilidade é um dos fatores que altera o valor do delta. Um aumento na volatilidade faz com que os deltas das opções se aproximem de 0.5. Assim, para opções dentro do dinheiro, o delta diminuirá, enquanto que, para opções fora do dinheiro, ele aumentará. Essas mudanças são intuitivas, uma vez que com o aumento da volatilidade, há um aumento da incerteza e torna-se menos claro em que região o preço do ativo subjacente estará na data de vencimento da opção.

(ii) Gama – O gama é a derivada segunda da função de preço em relação ao preço do ativo subjacente e nos diz o quão rápido o delta da opção muda para cada ponto de mudança no preço do ativo subjacente. Alguns se referem ao gama como sendo o delta do delta. Porém, o gama é diferente do delta pois o seu valor é sempre expresso por um número positivo, independente de ser relativo a uma opção de compra ou a uma opção de venda.

Outra característica interessante do gama é que ele é maior para opções que se encontram no dinheiro. Isso quer dizer que os deltas de opções no dinheiro são mais sensíveis à mudanças nos preços dos ativos subjacentes.

Além disso, quanto mais volátil for o mercado onde se negociam as opções, mais importante é esse termo, pois $(S_1 - S_0)^2$ observará níveis mais altos[6]. Essa parcela é incoporada em alguns modelos análiticos, porém é apenas uma aproximação, pois a hipótese de normalidade deixa de ser satisfeita com a presença do termo ao quadrado.

É importante lembrar que o valor do gama não depende somente do preço do ativo subjacente, mas também é influenciado pela volatilidade e pelo tempo. O delta de opções será normalmente mais elevado para ações que sejam mais voláteis, pois a volatilidade da

[6] Considera-se S_0 e S_1 como os preços do ativo subjacente em tempos t_0 e t_1, respectivamente, sendo $t_1 > t_0$

ação e o delta da opção estão relacionados com o movimento das ações. Além disso, os deltas de opções fora do dinheiro e no dinheiro decaem mais rapidamente do que o de opções dentro do dinheiro quando eles se aproximam do vencimento.

(iii) Rho – O rho representa o quanto uma mudança de 1 ponto na taxa de juros livre de risco mudaria no preço da opção. A variação no preço da opção não é muito sensível a essa variável e, por isso, não nos aprofundaremos nesse ponto.

(iv) Theta – O theta de uma opção é o decaimento temporal da opção. O theta também pode ser definido como o montante pelo qual o preço da opção excede o seu valor intrínseco. Ele diminui quando uma opção de aproxima do vencimento.
O theta é um dos mais importantes conceitos para quem deseja trabalhar com opções, pois ele explica o efeito do tempo no prêmio de opções que tenham sido compradas ou vendidas. Quanto menos tempo uma opção tem até o seu vencimento, mais rápido ela perderá o seu valor. Quanto mais longe do vencimento, menor será o decaimento temporal do valor da opção.
Como as opções perdem valor quando o tempo passa, o theta é expresso como um número negativo. Por essa razão, opções com menor tempo até o vencimento terão maiores thetas (com sinal negativo) do que as que possuem mais dias até o vencimento.

(v) Vega - O vega nos diz quanto o preço da opção mudará para cada mudança percentual de um ponto na volatilidade implícita. O vega tende a ser maior para opções que estão no dinheiro e diminui quando a opção alcança a sua data de vencimento. É interessante notar que o vega não possui correlação com a flutuação no preço do ativo subjacente, assim como o delta e o gama. Isso ocorre porque o vega depende da medida da volatilidade implícita ao invés da volatilidade estatística. A explicação de volatilidade implícita pode ser encontrada na seção 3.1.1, item (iii).
O vega é normalmente maior para opções no dinheiro, pois elas representam a maior incerteza da região, dentro ou fora do dinheiro, na qual a opção estará no seu vencimento. Ele é expresso como um número negativo.

2.3. Volatilidade e Correlação

Os modelos de VaR adotados na gestão de risco de instituições financeiras utilizam uma estimativa de volatilidade para a sua elaboração. Alguns modelos de previsão de volatilidade, como o da média móvel e o da média móvel exponencial, são propostos na literatura como alternativa para essa estimativa.

No âmbito financeiro, a volatilidade pode ser definida como uma medida estatística da dispersão dos retornos de um dado ativo. Ela tem por objetivo medir o quão incerto ou arriscado é esse ativo.

Os preços de um ativo que possua alta volatilidade têm maior probabilidade de, em um curto período de tempo, mudar drasticamente de valor.

2.3.1. Modelos de Estimação de Volatilidade

Existem diversos modelos que propõem metodologias para estimação de volatilidade. Dentre os mais utilizados, podemos citar: média móvel, média móvel ponderada (EWMA[7]), modelos auto-regressivos com heterocedasticidade (ARCH) e modelos ARCH Generalizados (GARCH).

Apresentaremos a seguir somente os modelos Média Móvel e EWMA, cuja metodologia consiste em modelos paramétricos baseados em séries temporais dos retornos dos ativos.

Média Móvel

Esse método é muito rudimentar, porém, devido à sua simplicidade e facilidade de implementação é largamente aplicado. Ele utiliza uma janela móvel de tamanho fixo para estimar a volatilidade em cada dia, sendo o tamanho das janelas definido pelo usuário do modelo.

Supondo a observação de retornos r_t sobre *M* dias, tem-se que a estimativa de volatilidade é calculada a partir da média móvel:

$$\sigma_t{}^2 = \left({}^1/_M\right) \sum_{i=1}^{M} r_{t-1}{}^2 \qquad (36)$$

A cada dia, a previsão é atualizada, agregando-se a informação do dia anterior e desconsiderando-se a informação de $(M+1)$ dias atrás. Além disso, os pesos dos retornos passados são iguais a $\left({}^1/_M\right)$ para todos os dias considerados na janela de estimação.

As desvantagens desse modelo advêm do fato que as informações recentes recebem o mesmo peso que as mais antigas apesar de as mais recentes serem provavelmente mais

[7] Em inglês, a sigla EWMA siginifica *Exponentially Weighted Moving Average*

relevantes. Além disso, se houver um grande retorno a *M* dias atrás ele será desconsiderado na próxima estimativa e afetará a previsão da volatilidade.

Média Móvel Ponderada

O modelo de média móvel ponderada (EWMA) é derivado de uma metodologia proposta pelo Riskmetrics, desenvolvido pelo banco J.P.Morgan (1996). Neste documento admite-se que as observações mais recentes dos retornos contribuem de forma mais significativa na obtenção de estimativas para a volatilidade histórica.

Para o cálculo da volatilidade, utiliza-se uma suavização exponencial, que é controlada por um fator de decaimento λ e pressupõe-se a distribuição normal dos retornos. As estimativas para a média e variância EWMA são representadas pelas seguintes fórmulas:

$$\mu_{EWMA} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda^i x_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda^i} \quad (37)$$

$$VAR_{EWMA} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda^i \left(x_i - E(x_i)\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \lambda^i} \quad (38)$$

Manipulando-se as fórmulas [1] e [2] é possível encontrar uma equação recursiva para o cálculo da volatilidade EWMA que, de acordo com (Jorion, 1997) é representada por:

$$\sigma_t{}^2 = \lambda \sigma_{t-1}{}^2 + (1-\lambda) r_t{}^2 \quad (39)$$

Onde, σ_t representa a volatilidade dos retornos do ativo em *t*, r_t representa o retorno do ativo em *t* e λ representa o fator de decaimento. O valor de λ geralmente usado é de 0.94, sugerido pelo Riskmetrics.

Segundo Jorion (1997), o modelo exponencial é particularmente de fácil implementação, pois depende de um único parâmetro (λ) , o que o torna mais robusto quanto a erros de estimativa, se comparado com outros modelos. Além disso, o estimador é recursivo: a previsão de hoje baseia-se na previsão anterior e todo o histórico é resumido no termo σ_{t-1}.

A desvantagem dessa metodologia é proveniente da escolha do valor do fator de decaimento. Para simplificar os cálculos utiliza-se um fator constante, porém ele poderia variar de acordo com as séries e com o tempo, perdendo consistência entre períodos diferentes.

A grande vantagem desse método é que ele é fácil de usar e aproxima muito bem o comportamento dos dados reais. Na parte prática do trabalho, utilizaremos esse método com uma janela de 120 dias e fator de decaimento de 0.94.

Correlação

A correlação, como veremos a seguir, é extremamente importante para o cálculo do risco de um portfólio. Como no caso da volatilidade, vários métodos podem ser usados para capturar a variação temporal da correlação. A medida de correlação é derivada da covariância, que é definida como:

$$Cov\,(X,Y) = E\,[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)], \tag{40}$$

Onde,

$\mu_X = E(X)$;

$\mu_Y = E(Y)$.

A covariância, matematicamente, representa o primeiro momento central da distribuição de probabilidade conjunta de *X* e *Y*. Se *X* e *Y* forem independentes sua covariância e sua correlação serão zero. O inverso, porém, não é verdadeiro; se as variáveis possuem covariância zero não necessariamente são independentes. A independência total entre duas variáveis deve ocorrer em todos os momentos da sua função de probabilidade conjunta.

A covariância é determinada pelo grau de dependência entre *X* e *Y* e pelo tamanho de *X* e *Y*. Por exemplo, a estimativa de covariância de retornos anuais terá uma ordem de magnitude muito maior do que a de retornos mensais. Por essa razão, normalmente prefere-se trabalhar com uma estatística associada, que é conhecida como correlação.

A correlação é a medida mais comum de dependência entre duas variáveis. Se uma variável *X* tende a crescer quando *Y* cresce e tende a decrescer quando *Y* decresce então *X* e *Y* possuem correlação positiva. Se *X* tende a decrescer quando *Y* cresce e tende a crescer quando *Y* decresce, então possuem correlação negativa. Por último, caso os movimentos de *X* não possuam nenhuma associação com os movimentos de *Y*, ambos possuem correlação zero.

Como a covariância não é independente da ordem de grandeza das unidades medidas é muito difícil utilizar seu valor para realizar comparações entre diferentes séries. Nesses casos, é melhor utilizar a correlação, que é uma medida normalizada da covariância, ou seja, não depende da ordem de grandeza das séries analisadas. A definição formal de correlação é:

$$Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}. \tag{41}$$

A correlação é apenas a covariância dividida pelo produto dos desvios padrões das duas variáveis analisadas. A correlação é sempre um número entre -1 e 1. Um valor próximo a 1 indica que os retornos são fortemente dependentes e que eles tendem a se mover juntos segundo uma mesma direção. Já um valor próximo a -1, também indica que os retornos são fortemente relacionados, porém eles tendem a se mover em direções opostas.

A correlação de uma variável com ela mesmo é sempre 1, pois como $Cov(X,X) = {\sigma_X}^2$, temos que: $Corr(X,Y) = \frac{{\sigma_X}^2}{{\sigma_X}^2} = 1$.

O gráfico [11] exemplifica o comportamento de algumas variáveis com diferentes valores de correlação.

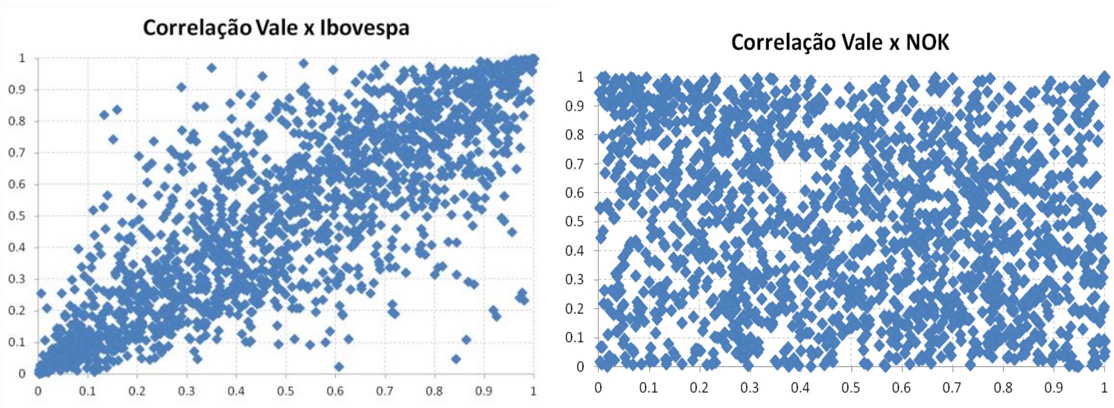


Gráfico 11 - Gráficos de Correlação

Fonte: Os autores

Nos gráficos apresentados, percebe-se que a ação da Vale possui uma alta correlação com o Ibovespa (0.82), ou seja, quando o Ibovespa está em alta/baixa, a ação acompanha esse movimento. Já no segundo gráfico, quando comparamos a ação da Vale com o NOK (coroa norueguesa), concluímos que as variáveis não possuem correlação (-0.15), já que não é possível encontrar um padrão de movimento entre os dois ativos.

2.4. *Value at Risk* (VaR)

Com a crescente valorização da necessidade de desenvolvimento de técnicas robustas de cálculo de risco, diversos modelos e *best practices* surgiram nas últimas décadas. A preocupação dos órgãos reguladores em controlar o mercado que rapidamente se tornava mais complexo acompanhava a necessidade das instituições financeiras em mensurar o risco envolvido em suas posições de ativos. Foi neste contexto que um modelo se destacou: o *Value-at-Risk* (VaR). Divulgado em 1994, o documento *RiskMetrics*, elaborado pelo banco J.P. Morgan, foi rapidamente difundido e abraçado por todo o mercado.

De forma geral, este modelo baseia-se na noção de que o risco intrínseco a uma carteira consiste no fato de que seu retorno, em um dado horizonte de tempo, não pode ser conhecido previamente. Há diversos retornos possíveis, cuja probabilidade de ocorrência irá determinar o potencial de perda da carteira. Dessa forma, o conhecimento da distribuição de probabilidade dos retornos permite estudos acerca das variações adversas de um portfólio.

O Value-at-Risk (VaR) mede a perda máxima esperada em certo horizonte de tempo dado um intervalo de confiança (Jorion, 1997). O banco JP Morgan (1996) define VaR como a medida da mudança potencial máxima no valor de uma carteira de instrumentos financeiros com uma dada probabilidade em um horizonte de tempo pré-definido.

Tomemos como exemplo uma carteira hipotética, com VaR de R$ 10 milhões, para um horizonte de um dia e probabilidade de 5%. Isso significa que há uma probabilidade de 5% que, ao longo de um dia, a carteira possa acumular perdas iguais ou maiores a R$10 milhões. A escolha do intervalo de confiança é arbitrária (Jorion, 1997). Entretanto, de acordo com o propósito – avaliação da precisão do modelo de risco, determinação do volume de capital da instituição ou comparação de sistema de risco distintos -, existem diretrizes (Mollica, 1999).

A metodologia do VaR apresenta algumas vantagens que foram determinantes na sua grande aceitação no mercado. A principal consiste em sua capacidade de agregar, em uma só medida, o risco total de uma carteira, incluindo em seu cálculo todos os ativos e passivos. Dessa forma, o VaR possibilitou a integração e a comparação dos riscos envolvidos em diversos ativos em diferentes mercados, proporcionando um controle mais global e mais passível ao estabelecimento de limites.

Também, o fato de consistir em somente uma medida torna a sua comunicação mais fácil e compreensível, tanto aos gestores como acionistas, permitindo o controle e a limitação dos riscos envolvidos, mesmo na ausência de todos os conhecimentos técnicos inerentes à forma de cálculo do VaR.

É importante ressaltar que o cálculo do VaR está diretamente relacionado ao de marcação a mercado. Isso se deve ao fato de que este método irá mensurar a variabilidade do valor de mercado da carteira no horizonte de tempo determinado. Consequentemente, isso representa uma barreira a sua aplicação para ativos pouco líquidos, cujo preço de mercado não é bem definido.

2.4.1. Fórmula Geral para Cálculo do VaR

De forma bastante simplificada, o documento RiskMetrics (1996) mostra que o VaR de uma carteira composta por somente um ativo pode ser calculado através da seguinte fórmula:

$$VaR = W \times Z(\alpha) \times \sigma \times \sqrt{t} \tag{42}$$

Onde,

W é a exposição, ou seja, o valor de mercado da carteira.

Z(α) representa a quantidade de desvios-padrão de uma distribuição normal padrão, indicando o grau de confiança escolhido.

σ representa o desvio padrão do fator de risco do ativo no período de tempo *t*.

Tomemos como exemplo o caso de uma carteira composta por um único ativo, cujo valor de mercado é R$1.000.000,00. Para calcular o VaR com 5% de nível de significância, considerando uma volatilidade diária do ativo de 2%, basta substituir os valores na equação [42].

$$VaR = R\$1.000.000{,}00 \times 1{,}65 \times 0{,}02 \times \sqrt{1} = \text{R\$33.000,00} \tag{43}$$

Ou seja, há 5% de probabilidade que esta carteira apresente perdas iguais ou superiores a R$33.000,00 no intervalo de um dia.

Determinação dos Parâmetros do VaR:

De acordo com a equação genérica [42], o cálculo do VaR implica na escolha de dois parâmetros: o nível de confiança e o período de tempo. O nível de confiança engloba aspectos subjetivos, não havendo unanimidade entre os principais utilizadores desta metodologia. O banco J.P. Morgan, precursor do uso do VaR, adota um intervalo de 95%. Em contrapartida, o Comitê de Basiléia[8] recomenda um nível de 99%.

A determinação do nível de confiança deve considerar os seguintes fatores:

- Quanto maior o nível de confiança do VaR. maiores são os requisitos de capital, podendo sobrecarregar os custos de capital imobilizado necessários;
- O nível de confiança escolhido deve proporcionar a comparação entre instituições, obedecendo a critérios uniformes;
- O nível de confiança deve estar alinhado com as práticas de controle e gestão de risco das instituições, de modo a fornecer aos gestores uma medida coerente e realista do mercado.

A definição do período de tempo deve considerar alguns fatores. Primeiramente, deve-se analisar qual o objetivo do cálculo do VaR. Em relatórios internos, o período de um dia é mais coerente. Entretanto, em relatórios semestrais, por exemplo, um horizonte mais extenso é mais razoável com a informação que se deseja transmitir.

Além disso, a liquidez dos ativos da carteira é determinante. A posição em ativos muito líquidos pode ser rapidamente desfeita em casos de grandes perdas. Porém, ativos pouco líquidos, como aqueles não negociáveis em bolsa, requerem períodos maiores para que a exposição a eles seja desfeita.

2.4.2. VaR de carteiras compostas por múltiplos ativos

A mensuração do VaR, de forma geral, pode ser obtida através da equação [42]. Entretanto, quando se trata de uma carteira composta por múltiplos ativos, o VaR dependerá da volatilidade dos retornos da carteira como um todo. A forma de cálculo deste VaR está intimamente relacionada à Teoria de Portfólio (Markowitz), que deverá ser compreendida *a priori*.

A Teoria de Portfólio adota a premissa de que os investidores são racionais. Por isso, assume que ele irá sempre buscar a carteira eficiente, de acordo com a sua aversão ao risco. Considera-se que a composição da carteira é feita com base no retorno esperado e no

[8] O Comitê de Basiléia é um comitê de autoridades de supervisão bancária. Criado em 1975 pelos Presidentes dos bancos centrais dos países do G-10, é composto por autoridades de supervisão bancária e bancos centrais da Bélgica, Canadá, França, Alemanha, Itália, Japão, Luxemburgo, Holanda, Espanha, Suécia, Suíça, Reino Unido e Estados Unidos. Reúne-se no Banco de Compensações Internacionais, na Basiléia, onde se encontra sua sede permanente.

desvio padrão dos retornos, o qual pode ser entendido como o risco da carteira. Mantendo as outras variáveis constantes, um investidor visará montar uma carteira que maximize seu retorno esperado dado um nível de risco ou minimize o risco dado um retorno esperado.

Logo, dentro de uma carteira, o risco de um ativo não corresponde à volatilidade de seus retornos, e sim ao quanto este ativo contribui para o risco total da carteira. O VaR de uma carteira não consiste simplesmente na soma dos VaRs individuais dos ativos que a compõem, uma vez que estes não reagem todos da mesma maneira às variações nos fatores de risco.

Dessa forma, o problema consiste em estimar os movimentos relativos das taxas de rentabilidade dos ativos que compõem a carteira, ou seja, a matriz de covariâncias (Σ). Com esta matriz, o cálculo do VaR segue a mesma metodologia.

Tomemos como exemplo uma carteira simples, com dois ativos. O VaR é calculado através da equação 44 (Sain, 2011):

$$VaR = \sqrt{VaR_1^2 + VaR_2^2 + 2 \times \rho_{1,2} \times VaR_1 \times VaR_2} \tag{44}$$

Considerando que a exposição ao ativo 1 seja de R$1.000.000,00 e ao ativo 2 de R$5.000.000,00, a volatilidade do primeiro igual a 2% e do segundo de 3%. Adotando uma correlação entre os ativos de 0,75, o VaR diário calculado, com nível de significância de 95%, é:

VaR_1 = R$1.00.000,00 x 0,02 x 1,65 = R$33.000,00

VaR_2 = R$5.000.000,00 x 0,03 x 1,65 = R$247.500,00

$$VaR = \sqrt{R\$33.000^2 \; + R\$247.500^2 \; + 2 \times 0{,}75 \times R\$33.000 \times R\$247.500} = R\$273.123{,}60$$

Generalizando a mensuração do VaR para uma carteira com n ativos:

$$VaR_{1\ldots N} = Z(\propto) \times \sqrt{\begin{bmatrix} W_1 & \ldots & W_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \ldots & \sigma_{1N} \\ \vdots & & & & \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \sigma_{N3} & \cdots & \sigma_N^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_N \end{bmatrix}} \tag{45}$$

2.5. *Modelos de Cálculo de Value at Risk*

No capítulo anterior explicamos que o Value-at-Risk de uma carteira de ativos é definido como a perda máxima esperada para essa carteira, dado um nível de confiança α. A estatística VaR pode ser expressa pela seguinte fórmula:

$$VaR = W * \sigma * Z(\alpha) * \sqrt{t} \qquad (46)$$

Para o cálculo do VaR é necessário uma estimativa da volatilidade e da distribuição de probabilidade dos retornos dos ativos. A fórmula [46] é obtida considerando que os retornos dos ativos seguem uma distribuição normal.

A possibilidade de utilizar diferentes estimativas para a volatilidade e para a distribuição dos retornos abriram as portas ao desenvolvimento de várias metodologias para o cálculo do VaR. Os métodos de cálculo são agrupados em duas categorias principais: métodos paramétricos e métodos não paramétricos (numéricos ou de simulação), dos quais, os mais conhecidos são a simulação histórica e a simulação de Monte Carlo.

Os métodos paramétricos são métodos que envolvem hipóteses sobre a forma como os retornos dos fatores de risco e os retornos da carteira se distribuem. Essa escolha implica diretamente no cálculo do risco, a partir das volatilidades, das correlações e de outros parâmetros que caracterizam a distribuição escolhida. Os problemas surgem quando nos afastamos das hipóteses de partida, seja porque os retornos dos fatores de risco não seguem uma distribuição normal, seja pelo fato de os retornos da carteira não serem uma função linear dos riscos.

Os métodos não paramétricos utilizam simulações para gerar diversos cenários, nos quais é baseada a distribuição de probabilidade da carteira. Diferentemente dos métodos paramétricos, esses métodos não pressupõe a priori uma distribuição de probabilidade para a carteira.

Os métodos de simulação histórica são procedimentos que envolvem a produção de cenários para os fatores de risco a partir dos seus dados históricos, com base nos quais é estimada a distribuição de perdas e ganhos da carteira. Com posse dessa estimação, é possível inferir o valor do VaR.

Os métodos de simulação de Monte Carlo consistem na geração aleatória de cenários para os fatores de risco, com a condição de que estes cenários sejam consistentes com a matriz de volatilidades e correlações histórica dos fatores.

No nosso trabalho apresentaremos três metodologias diferentes para o cálculo do VaR e dedicaremos especial atenção aos problemas oriundos da obtenção de estimativas nos casos em que as carteiras incluem instrumentos financeiros cujos *payoffs* estão relacionados de forma não linear com os fatores de risco subjacente. Nós consideraremos que os retornos dos ativos seguem uma distribuição normal como pressuposto por muitos modelos, de modo que não entraremos em detalhes sobre o estudo de outras possíveis distribuições.

Alguns pesquisadores na área de risco de mercado vêm estudando novas metodologias que incorporam a variabilidade do risco ao longo do tempo, assim como algumas soluções para criar modelos para o problema de eventos extremos, mais conhecido como *fat tails* (caudas largas) das distribuições de probabilidade.

Antes de explicarmos as diferentes metodologias para estimar o VaR, detalharemos um pouco mais o conceito de produto linear. Um produto linear é aquele cuja variação do preço de um ativo é linearmente relacionada à variação do valor da sua exposição. No caso das ações, por exemplo, a sensibilidade do valor de uma posição *W* a uma mudança no seu preço é constante ao longo do tempo. Uma posição em opções, ao contrário, apresenta uma variação no resultado decorrente de uma mudança nos fatores que determinam o seu preço. Essa variação não é linear e pode ser claramente observada nos gráficos abaixo.

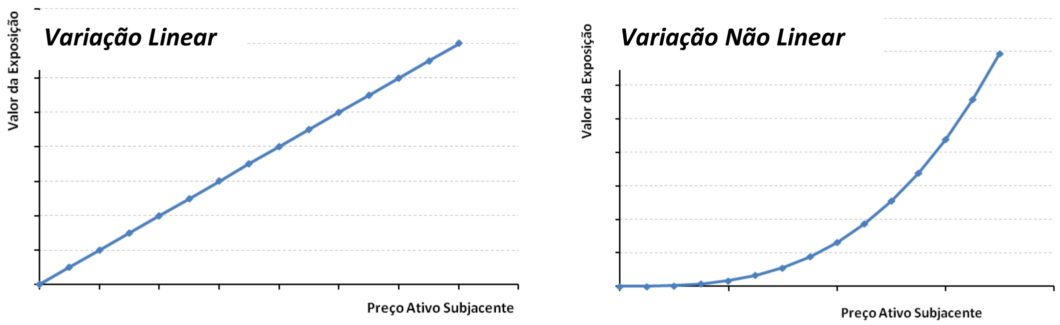


Gráfico 12 - Exposição x Preço do Ativo Subjacente

Fonte: Os autores

Calcular a sensibilidade de cada posição a uma oscilação no fator de risco correspondente é importante porque, para uma mesma oscilação, a variação no valor de duas posições distintas dependerá diretamente da sensibilidade de cada uma destas posições a uma variação no fator de risco. Para operações de renda fixa temos a *duration* e convexidade; para ações temos o beta e para opções temos as gregas.

Para efeitos de modelagem, podemos aproximar a variação no valor da posição de um ativo não linear por um comportamento linear, ou então utilizar fatores de ordem mais elevada.

2.5.1. VaR Delta Normal

A aproximação por Delta Normal é uma das abordagens mais simples. Este modelo adota a premissa de que os retornos dos fatores de risco possuem distribuição normal e, para posições em derivativos, sugere uma aproximação linear de primeira ordem (Δ, delta) para a relação entre os retornos dos ativos e os retornos dos respectivos fatores de risco.

O modelo propõe que as variações no valor da carteira são aproximadas pelo seu delta, ao passo que as alterações nos fatores de risco são aproximadas para uma distribuição normal. Desta característica advém o nome Delta-Normal.

Considera-se F(d_P) a distribuição de probabilidade do valor do ativo, onde d_P é uma função do horizonte de previsão (d*t*) e da variação nos fatores de risco subjacentes. No modelo Delta-Normal, assume-se que F(d_P) é composto por variáveis normalmente distribuídas. Consequentemente, F(d_P) também é assumido como distribuído normalmente. Logo, o VaR corresponderá a um percentil desta distribuição, sendo uma função da variância dos fatores de risco.

Para ativos lineares, o VaR Delta-Normal é equivalente ao VaR paramétrico. Para os ativos não lineares, pode-se manipular a fórmula do VaR paramétrico utilizando uma exposição aproximada. No caso das opções, essa aproximação é realizada a partir do primeiro termo da série de Taylor da sua função de precificação. Assim, temos:

$$Prêmio \approx \frac{df}{dP} \times P = \Delta \times P \tag{47}$$

$$W = Prêmio = \Delta \times P \tag{48}$$

$$VaR = W \times \sigma \times Z(\alpha) = \Delta \times P \times \sigma \times Z(\alpha) \tag{49}$$

Onde,

W é a exposição, ou seja, o valor de mercado da carteira;

Z(α) representa a quantidade de desvios-padrão de uma distribuição normal padrão, indicando o grau de confiança escolhido;

σ representa o desvio padrão do fator de risco do ativo no período de tempo *t*.

Apesar da facilidade do modelo, algumas falhas normalmente são apontadas na aproximação Delta-Normal. Primeiramente, como toda metodologia baseada em séries históricas, muitas vezes o horizonte de tempo de observação não é suficiente para incorporar os chamados eventos extremos (quebras de bolsas, moratória de países, entre outros). Isso se deve ao fato de que estes eventos não ocorrem com periodicidade suficiente para que sejam representados na janela de observação da distribuição.

Outra constante crítica reside na aproximação por distribuições normais, considerando que as distribuições dos retornos dos ativos exibem as chamadas "*fat tails*", aspecto mensurado pelo coeficiente de achatamento (Kurtosis) da distribuição.

Por último, o Delta Normal é incapaz de medir, adequadamente, o VaR para ativos relacionados de forma não linear com os fatores de risco subjacentes, como o caso das opções de que trata este trabalho. É possível admitir que a distribuição dos retornos dos fatores de risco é normal. Entretanto, a relação entre os retornos da carteira e os fatores de risco não é linear, consequentemente a distribuição dos retornos da carteira não pode ser mais considerada normal.

2.5.2. VaR Simulação Histórica

Dowd (1998) *apud* Sain (2001) afirma que o objetivo do modelo de Simulação Histórica é utilizar a distribuição histórica de retornos dos ativos de uma carteira para calcular o VaR da mesma. Por isso, para este modelo não há a necessidade do cálculo de volatilidades e correlações, uma vez que tais valores estão implícitos nos cenários utilizados.

Considerando uma carteira de n ativos sendo r_{it} o retorno do i-ésimo ativo no instante *t* e w_i o peso atual deste ativo, a série histórica dos retornos da carteira para a qual se deseja calcular o VaR é:

$$Y_t = \sum_{i=1}^{n} w_i r_{it} \qquad (50)$$

onde t = 1,..,T, sendo T o número de observações na série histórica dos retornos.

A partir da série histórica, elabora-se a distribuição empírica dos retornos, a partir do qual se obtém o VaR ao nível de significância desejado encontrando o percentil equivalente. Isso significa que, em uma série de 1000 observações de retornos da carteira, o VaR a 5% de significância equivale à 50ª maior perda da carteira.

A aplicação deste modelo apresenta algumas vantagens. Primeiramente, trata-se de uma metodologia não paramétrica, ou seja, dispensa a arbitragem de parâmetros, como volatilidade e correlação, para a obtenção do VaR. Dessa forma, problemas derivados de erros de estimação e modelagem são anulados.

A segunda vantagem reside na não adoção de premissas quanto à distribuição dos retornos dos ativos. Dessa forma, características específicas de cada série, como, por exemplo, excesso de curtose e assimetrias das distribuições, podem ser implicitamente captadas. Também, considera-se de forma implícita os efeitos de não linearidades tais como o risco Gamma, visto que o retorno do portfólio está sendo calculado em cada instante de tempo.

Entretanto, o modelo apresenta restrições. A Simulação Histórica assume que os cenários passados são os melhores estimadores dos resultados futuros. Consequentemente, o VaR é extremamente sensível à janela utilizada para construção da distribuição empírica, à inclusão/exclusão de períodos com *outliers* ou de períodos longos com poucas oscilações nos retornos. Este fato torna-se mais evidente para cálculo de VaR com níveis de significância muito baixos, inferiores a 1% (Mollica, 1999).

A dificuldade de adaptação das estimativas às mudanças estruturais no mercado financeiro é outra limitação ao modelo. Isso deriva da aplicação de pesos iguais a todas as observações históricas, fazendo com que eventos ocorridos em um passado distante impactem de forma igual aos eventos recentes. Esta limitação se agrava ao tratar da agregação de diversos instrumentos de uma mesma carteira, pois para que a correlação implícita seja considerada, deve ser adotada uma única janela para todos os fatores de risco.

2.5.3. VaR Simulação de Monte Carlo

A simulação é uma técnica numérica que pode ser usada para precificar ativos ou calcular medidas de risco. Segundo Jorion (1997), esse tipo de modelo envolve um alto custo de investimento quanto ao desenvolvimento de sistemas. Ele, porém, sempre resolverá um problema financeiro de maneira precisa.

O trabalho de Filho (2012) traz uma citação de Saliby e Araújo (2001) que consideram que, “apesar de tudo, os métodos por simulação de Monte Carlo são considerados os mais robustos e mais poderosos para o cálculo do *value-at-risk*, pois contemplam uma grande variedade de riscos financeiros. Todas as variáveis do modelo podem vir a ser tratadas como probabilísticas caso isso venha a ser de interesse”.

O método de Simulação de Monte Carlo consiste na geração de inúmeros cenários aleatórios para os preços de diversos ativos em um momento futuro, precificar a carteira composta por esses ativos em cada um dos cenários gerados e determinar a distribuição de probabilidade simulada da carteira. Esse modelo é capaz de capturar a não linearidade de instrumentos financeiros tais como opções e por isso, é um método tão reconhecido.

Nesse item, descreveremos como os números aleatórios são gerados e depois transformados para representar valores aleatórios de uma dada distribuição univariada. Os valores gerados serão posteriormente utilizados para simular a evolução do preço de um único ativo financeiro. Porém, em muitos casos, queremos computar o VaR ou precificar uma carteira de ativos que dependem de mais de uma variável. Precisamos assim, simular a evolução dos preços de diversos ativos e essas simulações devem refletir todas as co-dependências que são observadas entre os seus retornos.

Números Aleatórios

O objetivo da geração de números aleatórios é produzir uma sequência de números entre zero e um que sejam uniformemente distribuídos e que não possuam periodicidade. Ou seja, todo número pertencente ao intervalo $[0,1]$ deve possuir igual probabilidade de ocorrer e, independente do seu tamanho, a sequência de números obtidos não deve se repetir.

A única forma de se gerar números aleatórios é medindo, sem erro, um fenômeno físico que seja realmente aleatório. Na prática, os computadores geram números pseudo-aleatórios, que se aproximam muito bem dos números realmente aleatórios. Esse números pseudo-aleatórios são gerados por uma semente inicial, como por exemplo, o clock do computador que posteriormente segue uma sequência determinística.

Uma verdadeira sequência de números aleatórios pode acabar não cobrindo todo o espectro do intervalo, a não ser que ela seja muito longa. As sequências de baixa discrepância, como as de Faure e de Sobol são geradoras de números *quasi-aleatórios* que necessitam de uma quantidade menor de números na série para cobrir todo o intervalo $[0,1]$. Mesmo que eventualmente se repitam depois de certo tempo, bons geradores de números aleatórios possuem alta periodicidade.

Simulação de uma dada Distribuição de Probabilidade

Para simular o retorno de uma distribuição empírica é necessário gerar uma sequência de números aleatórios com uma quantidade *n* de observações desejadas. Sabe-se que a função acumulada de probabilidade $\mathrm{F(x)}$ possui valores entre zero e um. Logo, qualquer número $\propto$ que esteja contido nesse intervalo satisfaz $\propto = \mathrm{F(x)}$ e é possível descobrir o valor de x utilizando a inversa da função. Assim, uma série de números uniformes será convertida em simulações, as quais ocorrerão com maior frequência na região mais próxima ao retorno esperado do que nas caudas.

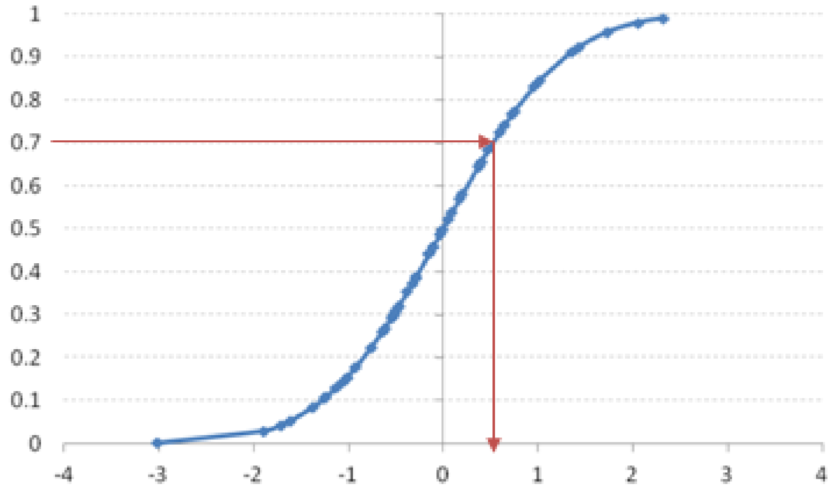


Gráfico 13 - Simulação Distribuição Univariada

Fonte: Os autores

Assumindo-se um modelo lognormal[9] para os preços dos ativos e, dados um horizonte de tempo de estimação de *t* dias, um preço inicial P_0 e uma volatilidade σ tem-se que:

$$P_t = P_0 e^{\sigma\sqrt{t}Z}, \tag{51}$$

Onde,

$Z \sim N(0,1)$;

P_t = Preço do Ativo Subjacente no tempo t.

Portanto, gerando-se variáveis aleatórias com distribuição normal padrão e fazendo uso da equação apresentada, é possível criar diversos cenários simulados.

[9] Em probabilidade e estatística, uma variável aleatória X tem a distribuição log-normal quando o seu logaritmo tem a distribuição normal.

Simulação de um sistema com distribuições correlacionadas

A simulação correlacionada é necessária para se computar o VaR Monte Carlo de carteiras. Suponha que queiramos obter duas sequências de números aleatórios que representem os retornos de dois ativos correlacionados. Por simplicidade, assume-se que os retornos de cada ativo são normalmente distribuídos com média μ_1 e μ_2, desvio padrão σ_1 e σ_2 e correlação ρ. Inicialmente é necessário calcular-se a matriz de covariâncias:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1\sigma_1 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2\sigma_2 \end{pmatrix} \quad (52)$$

Posteriormente, é necessário encontrar a Matriz de Cholesky (C), ou seja, a matriz triangular inferior tal que $\Sigma = CC'$. Gera-se um vetor (n_x1) Y de variáveis aleatórias normais padrões independentes e por fim, realiza-se um produto matricial $Z = CY$. Os elementos de Z terão variância unitária e correlações dadas por Σ.

Dados os valores de Z obtidos com o método acima, para gerar cenários com preços simulados, basta substituí-los na equação ${P_t}^{(1)} = {P_0}^{(1)}\, e^{\sigma_1\sqrt{t}Z_1}$ para cada um dos ativos simulados.

2.5.3.1. VaR Simulação de Monte Carlo

Segundo Oliveira (2009), a simulação de Monte Carlo é realizada em três passos:

1. Estimativas de volatilidades e correlações através do modelo EWMA: utilizando-se dados históricos dos ativos, ou dos fatores de risco selecionados;
2. Geração de Cenários: usando-se as estimativas calculadas em (1), produz-se um grande número de cenários de preços futuros de acordo com um modelo lognormal;
3. Precificação do Portfólio: para cada cenário simulado, avalia-se o preço do portfólio;
4. Sumário: de posse dos preços da carteira, calcula-se o VaR ou outras medidas de risco desejadas.

1. Estimativa de volatilidade e correlações: tópico abordado no item 2.3. do trabalho;

2. Geração de Cenários: tópico abordado no início desse item. Esse ponto será discutido detalhadamente no item 3.2., que descreve o passo a passo do método de simulação de Monte Carlo.

3. Precificação do Portfólio: escolhe-se um modelo de precificação e aplica-se aos preços simulados nos cenários. Para ativos lineares, os preços simulados são o próprio preço do ativo ou são aplicados em fórmulas simples de precificação. Para o caso das opções utilizamos o modelo de Black&Scholes.

4. Sumário: Com a série de ativos reprecificados, podemos encontrar os preços do portfólio, obtendo assim a distribuição de probabilidade simulada da carteira, que é uma boa aproximação da distribuição real.

Para calcularmos o VaR do portfólio, basta ordenar os retornos obtidos em cada cenário e encontrar a observação que corresponde ao nível de confiança desejado.

3. Estudo de Caso

Esta seção descreve a parte prática do trabalho, detalhando os objetivos e metodologias utilizadas. De modo a validar os diferentes métodos de cálculo do VaR apresentados anteriormente e melhor compreender o comportamento de opções no mercado, foi elaborado um modelo prático comparativo.

3.1. Seleção de dados para o estudo

O estudo tem como ponto de partida a escolha dos dados que serão utilizados para confrontar a teoria exposta. Como é de interesse analisar não somente o risco individual de cada ativo mas também o risco da carteira, foi necessário buscar um conjunto de opções. Optamos por trabalhar com três opções porque, além de simplificar os cálculos realizados, facilita a compreensão dos resultados e fornece uma massa significativa de dados para posterior análise. Uma série de condições que será apresentada a seguir norteou a escolha dos ativos.

De modo a alcançar um dos objetivos globais deste trabalho, que é analisar o comportamento do risco dos ativos no tempo, procurou-se por opções já vencidas que foram analisadas segundo uma janela de trinta e seis dias anteriores ao seu vencimento. Ou seja, calculou-se o risco dessas opções e de sua carteira durante 36 dias até o seu vencimento.

Outra condição é que todas as opções vencessem no mesmo dia. Caso os vencimentos fossem diferentes, poderia haver uma distorção no valor do risco da carteira devido ao vencimento de uma delas.

VALE
OGX
GERDAU

27/07/2012 — 17/09/2012 - Vencimento

Um ponto muito importante para o estudo é que as opções sejam líquidas, ou seja, que elas sejam negociadas diariamente. Caso essa condição não seja satisfeita, não haverá mudança diária no preço da opção. Se não houver mudanças nos preços das opções, não é possível analisar as medidas de risco no tempo.

Esse foi um dos fatores que também direcionou o estudo para as opções de compra, já que no Brasil é o mercado mais líquido e que possui maior volume de negociação. Além disso, as opções de compra são mais facilmente compreendidas e os resultados obtidos podem ser expandidos para o caso de opções de venda.

De acordo com as condições descritas, foi realizada uma busca no terminal *Bloomberg* para procurar opções candidatas ao estudo. Foram encontrados cerca de 10 diferentes ativos que atendiam aos critérios impostos e optou-se pelas opções de ação das seguintes empresas: Vale [VALE5 BZ 09/17/12 C38], OGX [OGXP3 BZ 09/17/12 C5] e Gerdau [GGBR4 BZ 09/17/12 C18. 91].

Essas empresas foram escolhidas pois, além de nos interessarmos pelo seu setor de atuação, ambas possuem ações que são voláteis e muito negociadas na bolsa de valores. Como suas as ações possuem alta volatilidade, existe maior probabilidade de ocorrer mudanças nos seus preços durante os trinta e seis dias analisados, possibilitando a geração de diferentes tipos de cenários para o estudo.

3.2. Cálculo dos diferentes tipos de VaR

Neste item, será explicado em detalhes a sequencia de passos realizados para calcular as estimativas de VaR utilizando o modelo Delta Normal e a Simulação de Monte Carlo.

Considerou-se que os retornos dos ativos subjacentes seguem uma distribuição normal e utilizou-se, para a estimação da volatilidade, o método de média móvel ponderada (EWMA), com janela fixa de cento e vinte dias e fator de decaimento λ igual a 0.94.

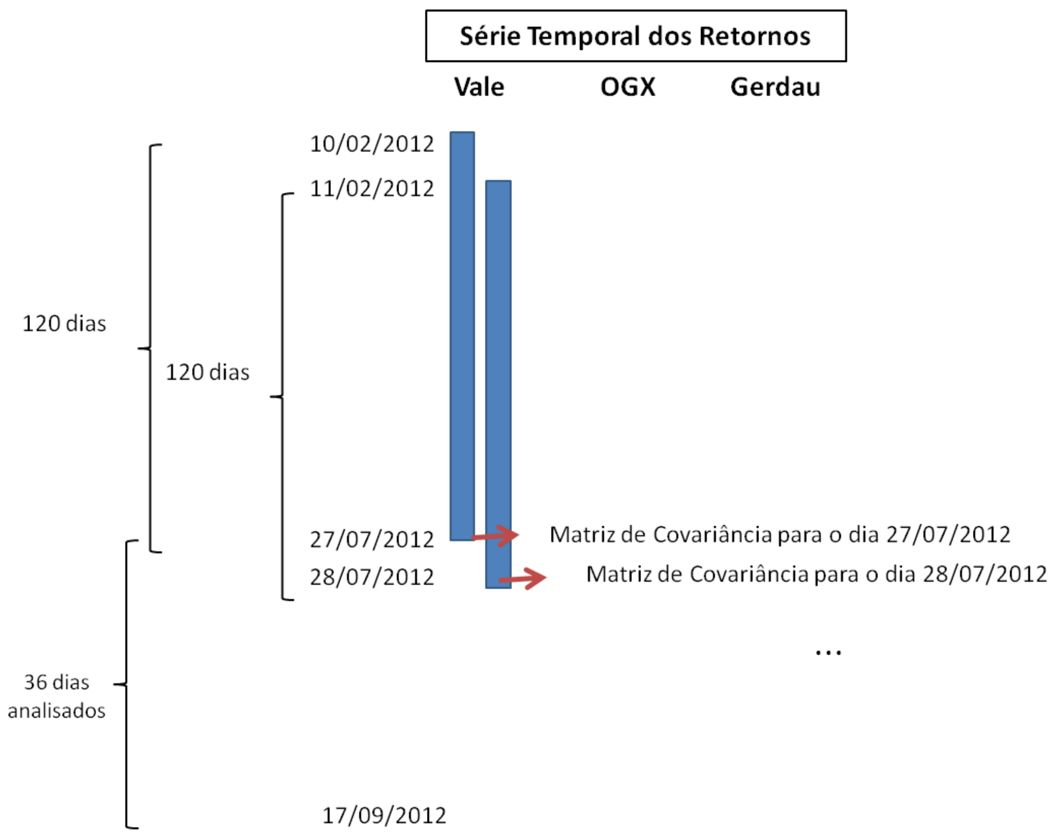
O último fator que deve ser decidido antes do início dos cálculos é a exposição financeira em cada uma das opções. Optou-se por mantê-la fixa em R$10.000 por opção. Ou seja, é como se as posições da carteira fossem ajustadas diariamente para que exposição em cada uma das opções seja sempre de R$10.000. Esse valor foi mantido fixo para facilitar as análises temporais do risco, de forma que mudanças no valor do risco ao longo dos dias serão explicadas por outros fatores que não a exposição.

Todas as estimativas foram calculadas utilizando-se um código de Matlab desenvolvido pelos autores e disponibilizado nos anexos. O método de Simulação de Monte Carlo é explicado inicialmente sendo seguido pela explicação do método Delta-Normal.

VaR Simulação de Monte Carlo

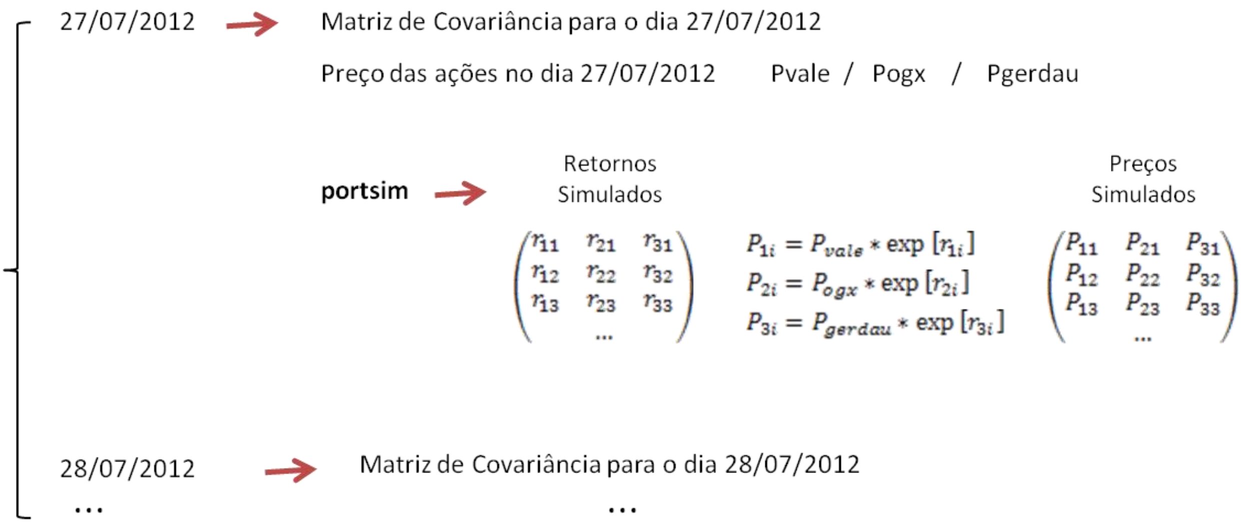
O primeiro passo foi adquirir a série temporal dos retornos das ações de Vale, OGX e Gerdau a partir do dia 10/02/2012, equivalente a cento e vinte dias anteriores a primeira data para qual será calculado o risco das opções, 27/07/2012. Como citado no item anterior, a janela da média móvel ponderada utilizada para estimação da volatilidade é fixa e igual a cento e vinte dias.

Com posse dessas séries, será realizado o primeiro passo do cálculo do VaR de Monte Carlo; a estimação da matriz de covariância EWMA entre os ativos, em cada um dos dias analisados (27/07/2012 a 17/09/2012). O esquema a seguir exemplifica esse passo:

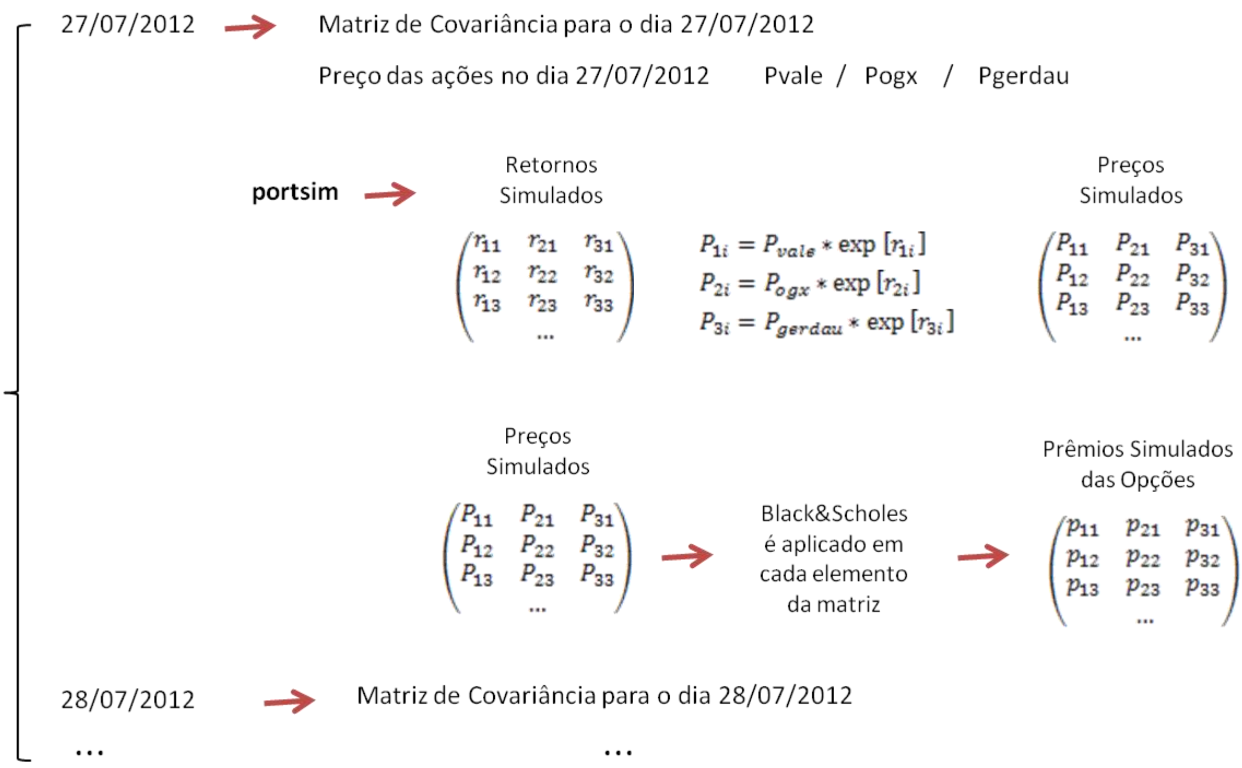


O segundo passo do método é gerar, para cada um dos trinta e seis dias, uma série de retornos simulados que mantenha a variância e as correlações obtidas no primeiro passo. Para realizar essa etapa, utilizou-se a função ***portsim*** do Matlab que realiza uma simulação Monte Carlo de retornos de ativos correlacionados. As entradas da função são as médias EWMA dos retornos de cada ativo, a matriz de covariância EWMA e o número de simulações desejadas. Ela fornece como saída uma matriz nx3 com os retornos simulados; sendo n o número de simulações desejadas. Para esse trabalho adotamos vinte mil simulações, número considerado necessário para manter a estabilidade do modelo.

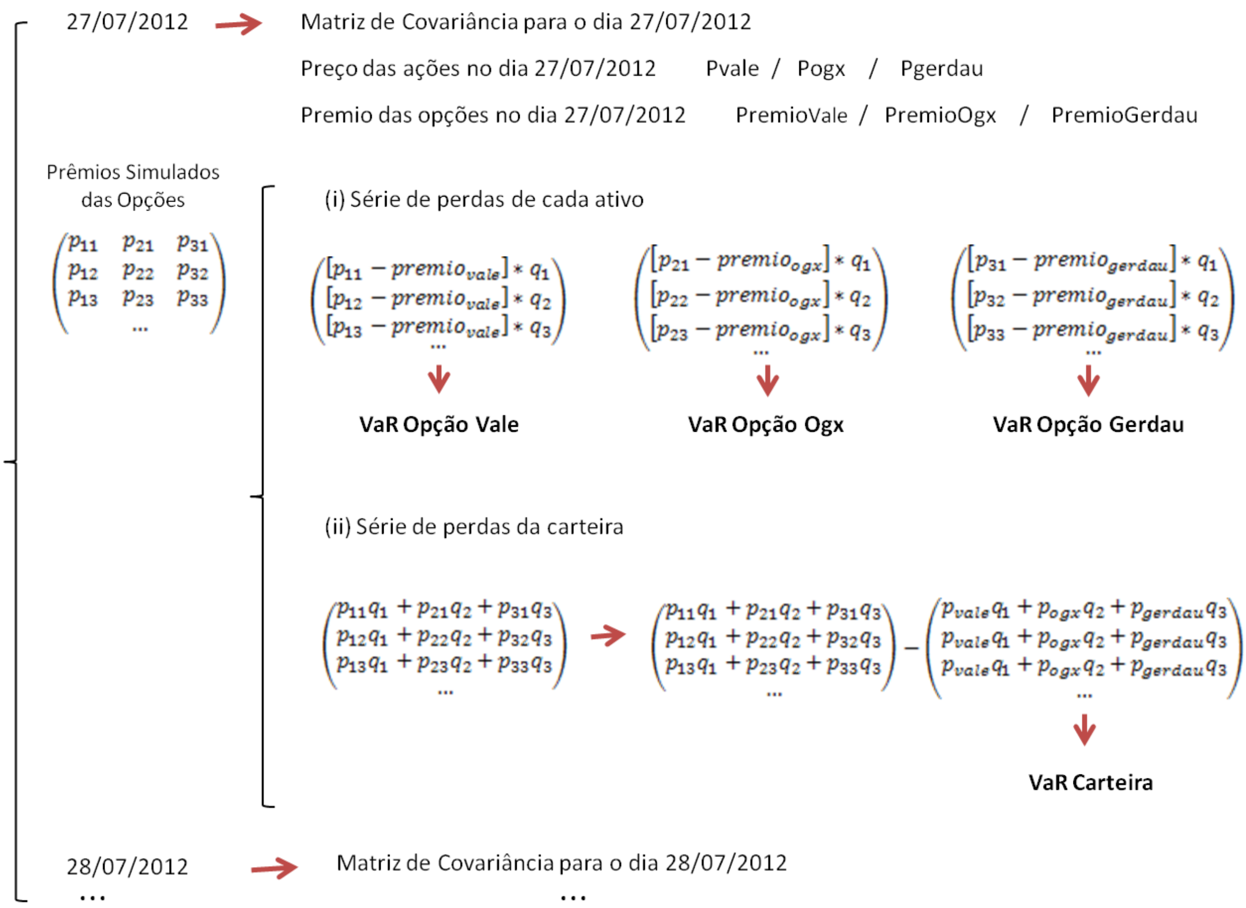
Dada a matriz de retornos simulados dos ativos subjacentes, calculam-se os preços simulados que os ativos teriam nesse dia. Para realizar essa etapa, multiplica-se o preço do ativo subjacente no dia pela exponencial dos retornos simulados (estamos considerando retornos contínuos no trabalho). Assim temos:



Com posse dos preços simulados, pode-se utilizar o modelo de Black&Scholes para reprecificar a opção e descobrir o quanto ela estaria valendo nesse cenário. O passo 2 é concluído ao obter-se a série de prêmios simulados da opção.



Finalmente chegamos ao passo 3 do método, que é dividido em duas partes: na primeira gera-se a série das perdas com cada uma das opções e calcula-se o VaR individual. Na segunda, calcula-se o valor da perda da carteira e o VaR do conjunto. Esses passos são exemplificados abaixo:



A seguir, o segundo método de cálculo, o VaR Delta-Normal, será explicado. Esse método por ser paramétrico, não utiliza séries de retornos simulados, pois, supõe que a distribuição das perdas da carteira é normal.

VaR Delta Normal

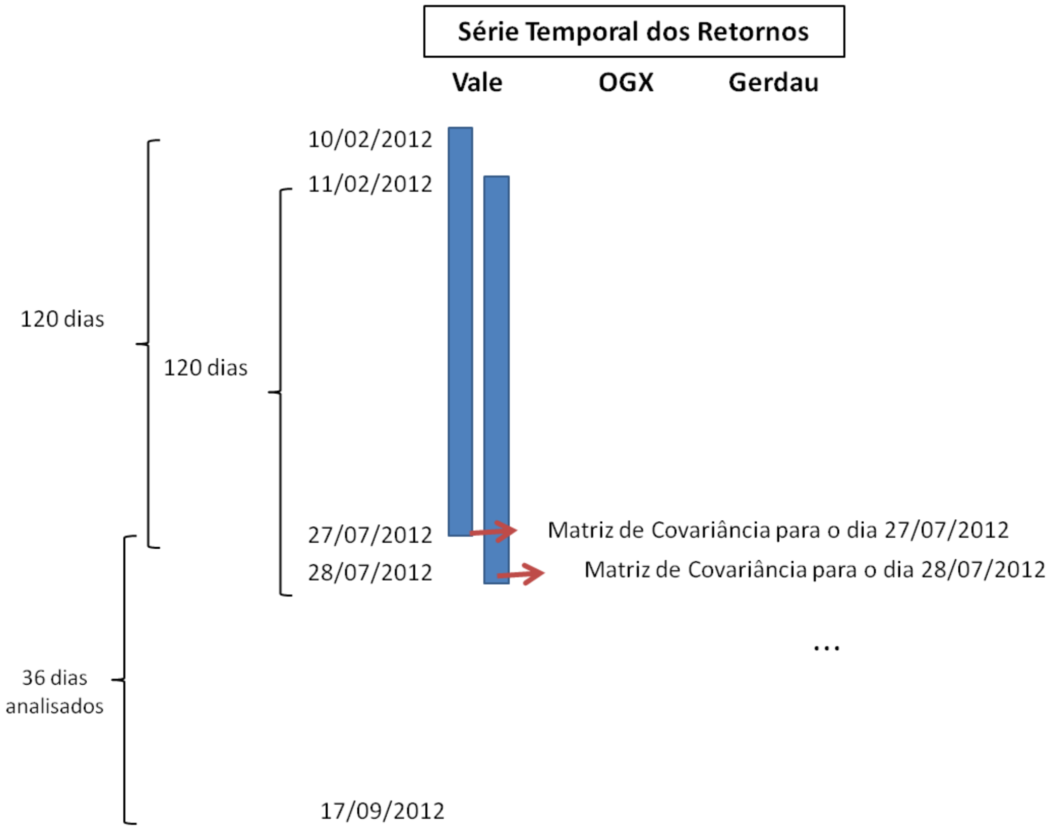
Os passos do método Delta Normal são mais simples que os do método de Simulação Monte Carlo. São necessários apenas quatro parâmetros para o cálculo do risco: os preços dos ativos subjacentes, os deltas e as quantidades das opções e a matriz de covariância EWMA.

O cálculo das matrizes de covariância é realizado no passo um do método anterior e o seu resultado é utilizado nesse outro modelo. Para calcular o delta das opções em cada um dos dias estudados, utilizamos a função ***blsdelta*****,** do Matlab, que utiliza as seguintes entradas: preço do ativo subjacente, o preço de exercício da opção, a taxa de juros livre de risco, o tempo para o vencimento e a volatilidade implícita. No capítulo de opções detalhou-se o conceito de volatilidade implícita e a forma como calculá-la.

As quantidades de cada uma das opções são facilmente obtidas, pois se considerou uma exposição fixa de R$10.000 em cada uma delas. Assim, as quantidades podem ser expressas pela seguinte fórmula:

$$q_i = \frac{Prêmio\ da\ Opção_i}{R\$10.000} \tag{53}$$

Tendo todos os parâmetros calculados, basta aplicar a fórmula paramétrica do modelo e obter o valor do VaR de cada ativo e o valor do VaR da carteira. O esquema a seguir representa o passo a passo desse modelo:



27/07/2012 → Matriz de Covariância para o dia 27/07/2012

Preço das ações no dia 27/07/2012 Pvale / Pogx / Pgerdau

blsdelta → Deltas das opções $delta_{vale\ i}$ $delta_{ogx\ i}$ $delta_{gerdau\ i}$

(i) VaR de cada Ativo

$$VaR_{Vale\ i} = delta_{vale\ i} * \sigma_{Vale\ i} * P_{Vale\ i} * q_{Vale\ i} * Z(\propto)$$

$$VaR_{OGX\ i} = delta_{OGX\ i} * \sigma_{OGX\ i} * P_{OGX\ i} * q_{OGX\ i} * Z(\propto)$$

$$VaR_{Gerdau\ i} = delta_{Gerdau\ i} * \sigma_{Gerdau\ i} * P_{Gerdau\ i} * q_{Gerdau\ i} * Z(\propto)$$

(ii) VaR da Carteira

$$VaR_{Carteira} = \left([Exp_1 \quad Exp_2 \quad Exp_3] * \sum * \begin{bmatrix} Exp_1 \\ Exp_2 \\ Exp_3 \end{bmatrix} \right)^{0.5} * Z(\propto)$$

$$Exp_1 = delta_{vale\ i} * P_{Vale\ i} * q_{Vale\ i}$$

$$Exp_2 = delta_{ogx\ i} * P_{ogx\ i} * q_{ogx\ i}$$

$$Exp_3 = delta_{gerdau\ i} * P_{gerdau\ i} * q_{gerdau\ i}$$

$\sum$ = Matriz de Covariância entre os ativos

28/07/2012 → Matriz de Covariância para o dia 28/07/2012

... ...

3.3. Apresentação dos Resultados Obtidos

Utilizando o código desenvolvido em Matlab e seguindo os passos descritos no item anterior, podemos apresentar os resultados obtidos com o exemplo prático. O objetivo desta seção é testar a teoria apresentada nos capítulos anteriores, aplicando-a a dados reais.

Este item será dividido em três partes. Na primeira parte, discutiremos as diferenças entre o cálculo do VaR utilizando o método Delta Normal e a Simulação de Monte Carlo. Essas diferenças serão analisadas sob a ótica da medida de risco da carteira e dos ativos individualmente.

A segunda parte apresentará uma discussão sobre o ganho de diversificação do VaR devido a interação entre múltiplos ativos. Objetiva-se cofirmar que, à medida que novos ativos na carteira são acrescentados, o risco final do conjunto será sempre menor ou igual a soma dos riscos individuais de cada um dos ativos. Utilizaremos as estimativas de VaR geradas pela Simulação de Monte Carlo para analisar este impacto.

Na terceira e última parte, analisaremos as medidas de risco no tempo, usando as estimativas geradas pelo método de Monte Carlo para cada uma das opções.

É importante mencionar que, apesar do VaR ser um indicador de perda, ele será apresentado com sinal positivo, visando facilitar a visualização gráfica dos resultados.

Como apresentado no item 3.1, o modelo elaborado foi aplicado em uma carteira composta pelas opções de ação de compra de Vale [VALE5 BZ 09/17/12 C38], OGX [OGXP3 BZ 09/17/12 C5] e Gerdau [GGBR4 BZ 09/17/12 C18.91]. Foi considerada uma exposição diária igual para todas as opções, no valor de R$10.000, totalizando um portfólio de R$30.000.

(i) Diferença entre o Método Delta Normal e a Simulação de Monte Carlo

Serão analisadas as diferenças entre os modelos Delta Normal e Simulação de Monte Carlo, tomando como base a carteira selecionada. O gráfico [14] apresenta os valores percentuais do VaR diário da carteira para ambos os métodos.

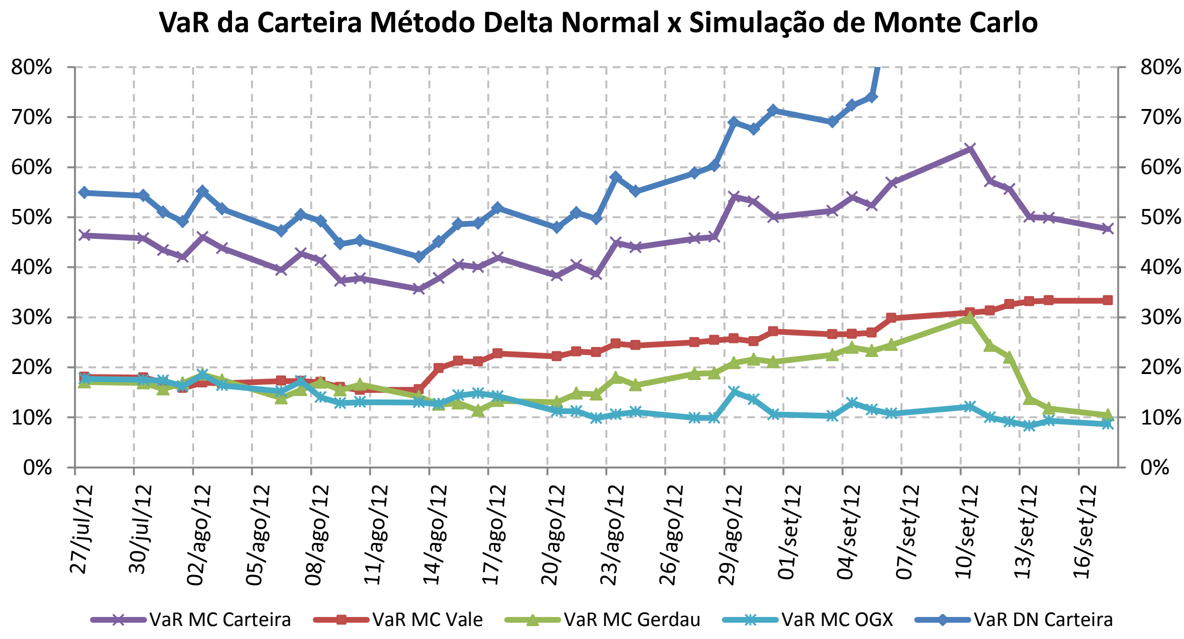


Gráfico 14 - VaR da Carteira Método Delta Normal x Monte Carlo

Fonte: Os autores

Devido ao fato da carteira estar comprada (jargão de mercado utilizado para indicar que a valorização do ativo implica em ganhos), espera-se que o VaR Delta Normal seja maior do que o VaR de Monte Carlo.

Esse fenômeno ocorre devido à aproximação linear realizada no método Delta Normal. No Gráfico 15, a curva azul representa o prêmio da opção em função do preço do ativo subjacente (S_n), segundo o modelo de Black&Scholes. Dado um S_0, é feita uma aproximação linear neste ponto, utilizando a derivada da função em relação a S_n.

De acordo com o nível de confiança adotado, será verificado um preço mínimo esperado (S_m). A perda máxima esperada com a opção é calculada aplicando-se o preço mínimo na aproximação linear traçada anteriormente. Como o preço da opção é uma função convexa, existirá um erro entre o valor do prêmio calculado pela aproximação e o valor real. Assim, a perda calculada pelo método Delta Normal será uma aproximação da perda real esperada.

A simulação de Monte Carlo representa fielmente o comportamento do prêmio da opção em função do preço do ativo subjacente. Visto que essa metodologia não requer uma aproximação linear, a perda máxima esperada é igual a perda real.

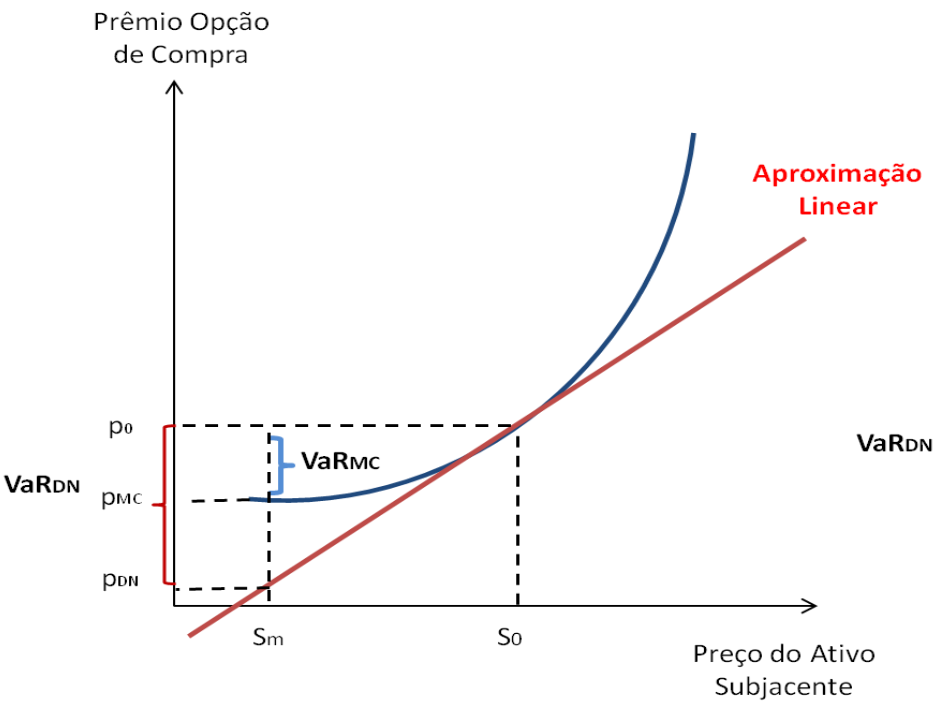


Gráfico 15 - Aproximação Linear do VaR Delta Normal

Fonte: Os autores

Na prática, para a carteira em estudo, o método Delta Normal será mais conservador em relação à estimativa do risco do portfólio, fornecendo valores maiores para a perda esperada. Desta forma, podemos concluir que a Simulação de Monte Carlo fornece uma medida de risco mais precisa.

Outra importante interpretação consiste nas diferenças entre os métodos ao longo do tempo, cujos valores absolutos foram plotados no Gráfico 16. Deve-se ressaltar que o eixo x representa o tempo para o vencimento das opções, as quais vencem no mesmo dia.

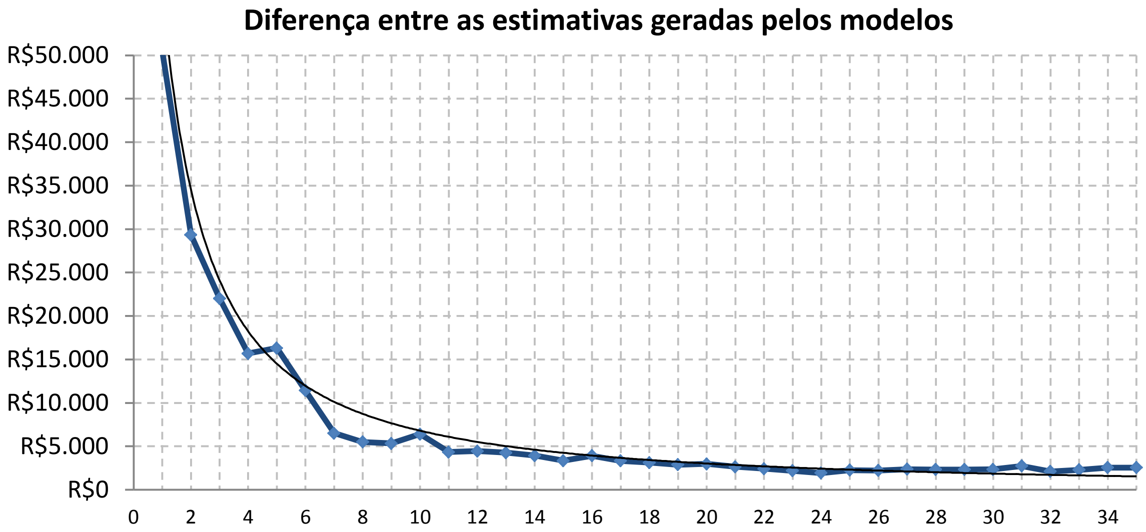


Gráfico 16 - Diferença entre Estimativas geradas pelos Métodos Delta Normal e Simulação Monte Carlo

Fonte: Os autores

Observa-se que, ao aproximar-se do vencimento a diferença entre as estimativas aumenta exponencialmente. Segundo Hull J. C. (2003), opções no dinheiro e perto do vencimento possuem gamas muito altos, significando que o valor da opção é altamente sensível a pulos no preço da ação.

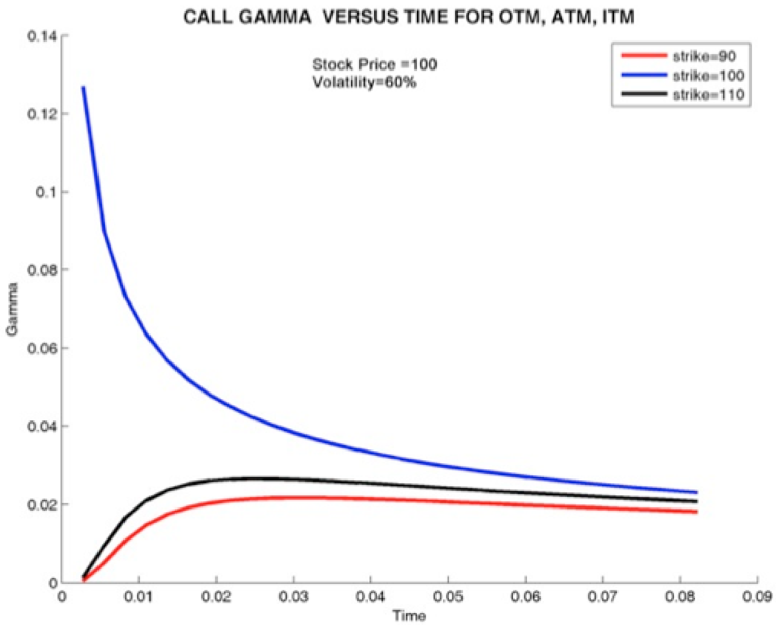


Gráfico 17 - Gama das Opções de Compra x Tempo

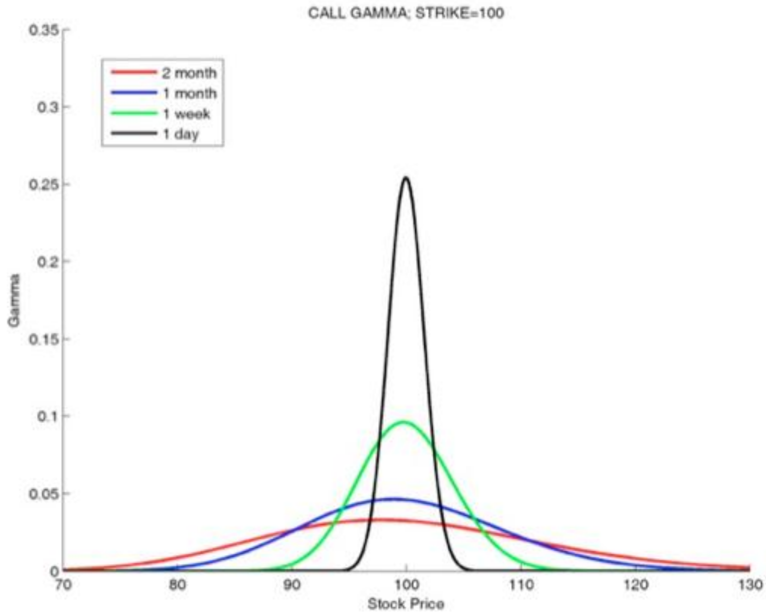


Gráfico 18 - Gama das Opções de Compra x Preço do Ativo Subjacente

Fonte: Os autores

No modelo de Monte Carlo, as opções são reprecificadas de acordo com os preços gerados na simulação. Assim, caso haja um pulo no preço da ação, o modelo acompanhará corretamente o movimento. Já no caso da aproximação linear, o erro aumentará, pois o modelo só é válido para pequenas variações nos preços do ativo subjacente.

A partir de agora, será replicada a comparação entre os modelos para cada um dos ativos individuais.

OPÇÃO DE VALE

Quando a opção de Vale está a algumas semanas do vencimento, seu prêmio fica muito próximo de zero pois ela encontra-se fora do dinheiro. Porém, quando se aproxima da data de vencimento o preço do ativo subjacente sobe até que a opção fique no dinheiro.

A alguns poucos dias do vencimento, o risco dessa opção deveria ser igual a R$10.000 (100%), pois por estar fora do dinheiro o titular perderá todo o valor ao qual estava exposto. O método de Monte Carlo fornece exatamente esse valor, enquanto que o método Delta Normal fornece uma estimativa muito superestimada do risco.

O risco fornecido pelo modelo Delta Normal é superestimado devido ao valor do gama da opção, que será muito alto. O valor fornecido pela aproximação linear apresentará um erro muito grande.

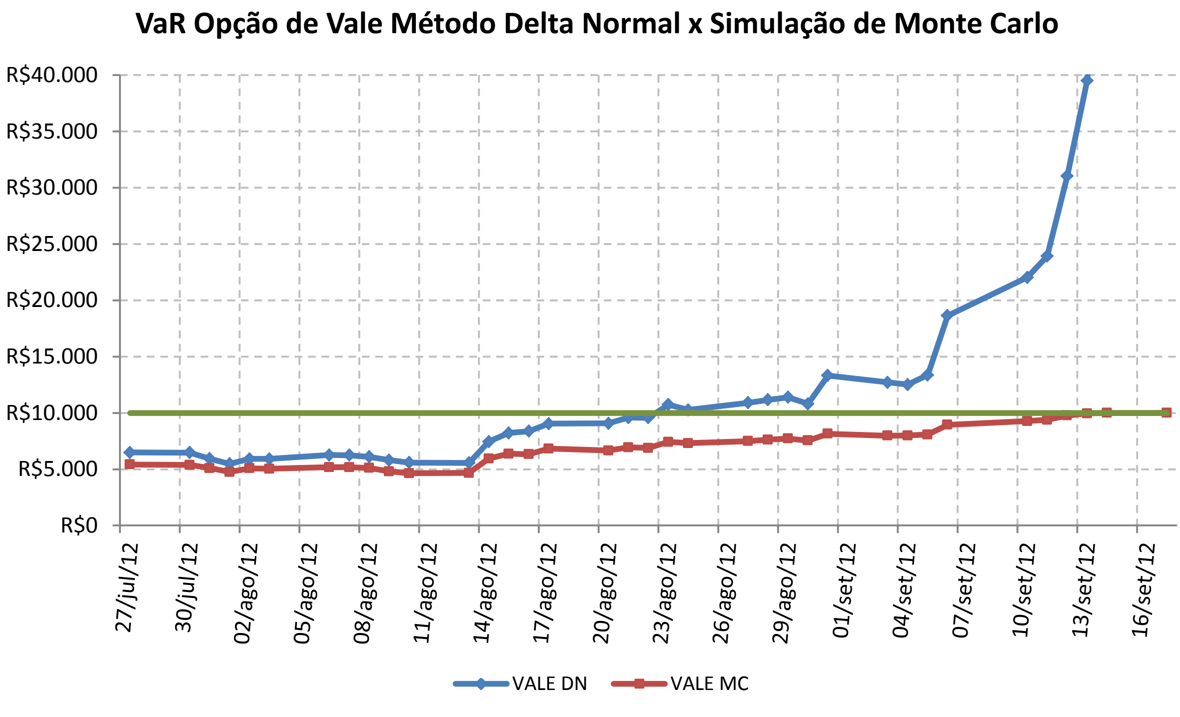


Gráfico 19 - VaR Opção Vale Método Delta Normal x Simulação de Monte Carlo

Fonte: Os autores

OPÇÃO DE OGX

A opção de OGX se comporta de maneira contrária a opção de Vale estudada anteriormente. No período analisado, ela encontra-se dentro do dinheiro e a aproximação linear não gera resultados muito discrepantes dos obtidos pela Simulação de Monte Carlo.

Ao se aproximar do vencimento, o seu risco diminui, uma vez que a probabilidade da opção não terminar dentro do dinheiro no vencimento é muito baixa.

O Gráfico 20 demonstra que quando uma opção está dentro do dinheiro, a aproximação realizada pelo método Delta Normal aproxima-se mais do valor gerado pela Simulação de Monte Carlo. Quando a opção está dentro do dinheiro e perto do vencimento, o valor do gama tende a zero e opção fica menos sensível a pulos no preço da ação. Assim, grandes variações nos preços da ação não causarão grandes mudanças no preço do prêmio calculado pela aproximação linear.

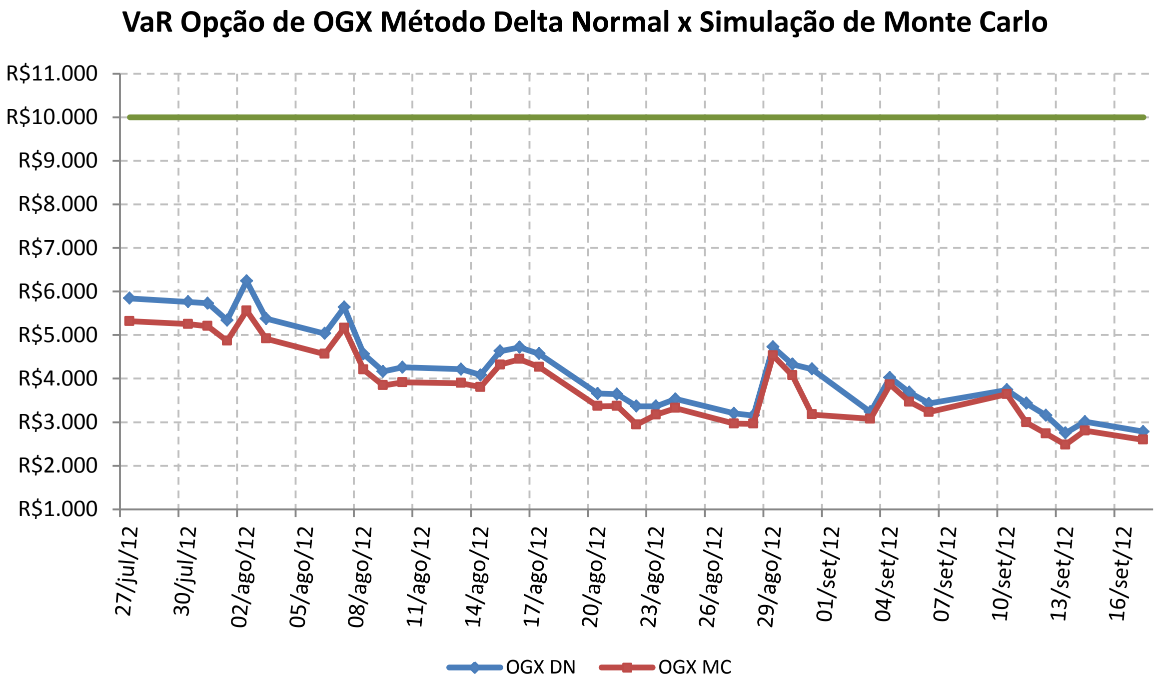


Gráfico 20 - VaR Opção OGX Método Delta Normal x Simulação de Monte Carlo

Fonte: Os autores

OPÇÃO DE GERDAU

A opção de Gerdau possui um comportamento similar ao das anteriores. Os valores do preço do ativo subjacente se aproximam do valor do preço de exercício para os dias nove e dez de setembro, fazendo com que a opção encontre-se no dinheiro. A partir dessas datas até o vencimento, a opção fica dentro do dinheiro, explicando assim a queda do seu risco.

Entre os dias sete e treze de setembro, os preços da ação da Gerdau variaram muito, caindo consideravelmente de sete a dez e subindo bastante de dez a treze. Essas variações abruptas causaram o pico de risco observado no Gráfico 21. Percebe-se que o modelo Delta Normal é muito sensível a essas grandes variações, enquanto que o modelo de Simulação de Monte Carlo não é tão afetado. A grande sensibilidade do modelo Delta Normal deve-se a aproximação linear realizada, que só é aceitável para variações pequenas nos preços das ações.

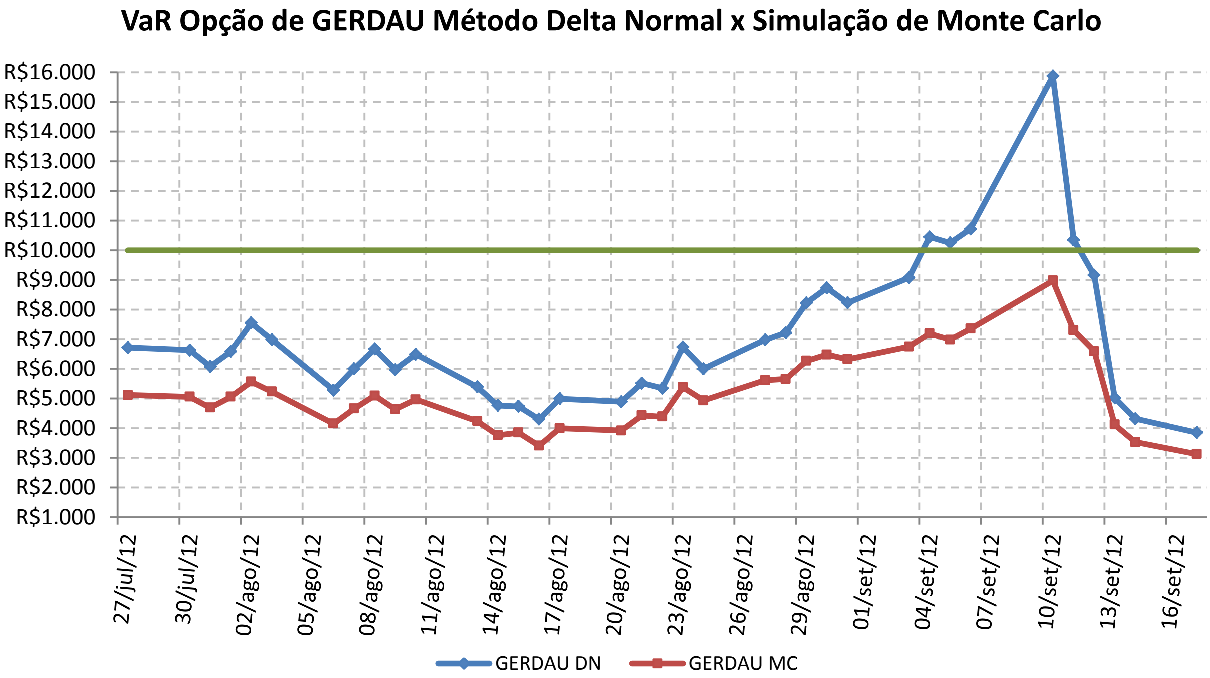


Gráfico 21 - VaR Opção Gerdau Método Delta Normal x Simulação de Monte Carlo

Fonte: Os autores

(ii) Ganho de Diversificação

Esse item tem como objetivo analisar o ganho de diversificação do VaR devido à interação entre múltiplos ativos. O Gráfico 22 apresenta os valores percentuais do VaR calculado pelo método de Simulação de Monte Carlo.

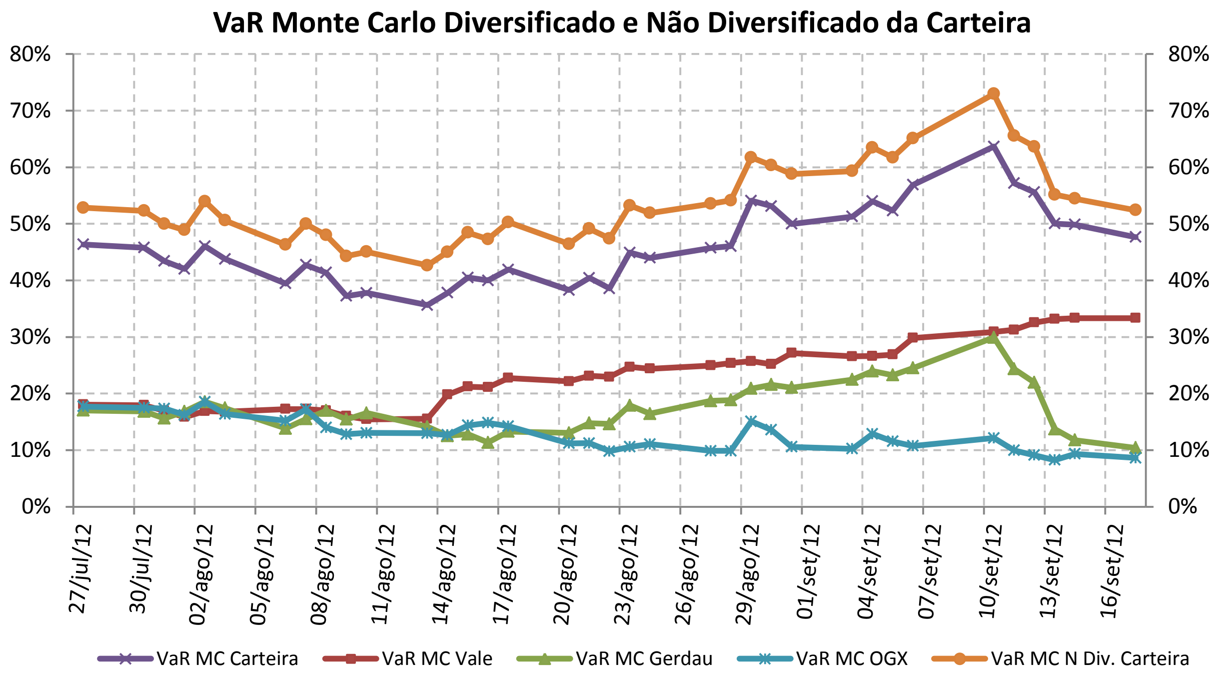


Gráfico 22 – VaR Carteira Diversificado x Não Diversificado

Fonte: Os autores

No gráfico, a curva roxa representa o risco diversificado da carteira, levando-se em consideração a correlação entre os ativos que a compõe. A curva laranja representa o risco não diversificado, que é calculado somando-se os riscos de cada um dos ativos.

Segundo a teoria, existe um ganho na medida de risco quando agrupamos um conjunto de ativos. Isso ocorre pois os ativos são correlacionados, ou seja, o movimento de um ativo possui uma relação com os movimentos dos outros. Quando ambos se movimentam, em um cenário que há ganho de diversificação, o movimento de um pode limitar ou até diminuir o movimento de algum outro, causando assim, uma diminuição no risco total da carteira.

A curva laranja do Gráfico 22 representa como seria o VaR da carteira caso os ativos fossem 100% correlacionados. Nesse caso, em um momento de queda, todos se movimentariam juntos em sentido da perda máxima, não havendo ganho de diversificação. O VaR da carteira seria simplesmente a soma do VaR de cada um dos ativos.

O ganho de diversificação é representado pela equação:

$$Ganho\ Diversificação = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} VaR_i}{VaR_\pi}, \tag{54}$$

onde, VaR_π é o VaR diversificado da carteira e VaR_i é o VaR de cada um dos n ativos existentes na carteira.

Dando continuidade a análise acima, pode-se realizar uma comparação entre as correlações médias dos fatores de risco e o ganho de diversificação da carteira no tempo. Como o prêmio das opções é muito dependente do preço das ações, espera-se que a correlação média entre os fatores explique parte do ganho de diversificação.

Cabe relembrar que as correlações foram calculadas utilizando-se um modelo de média ponderada com decaimento exponencial e janela rolante fixa de cento e vinte dias. Resumidamente, isso quer dizer que esse modelo dá mais importância para os últimos retornos, de modo que a correlação entre os ativos representa o comportamento recente entre as suas séries.

O Gráfico 23 compara o ganho de diversificação (calculado com a fórmula apresentada anteriormente) com a correlação média entre os fatores de risco. As curvas obtidas representam a relação da correlação com o ganho de diversificação.

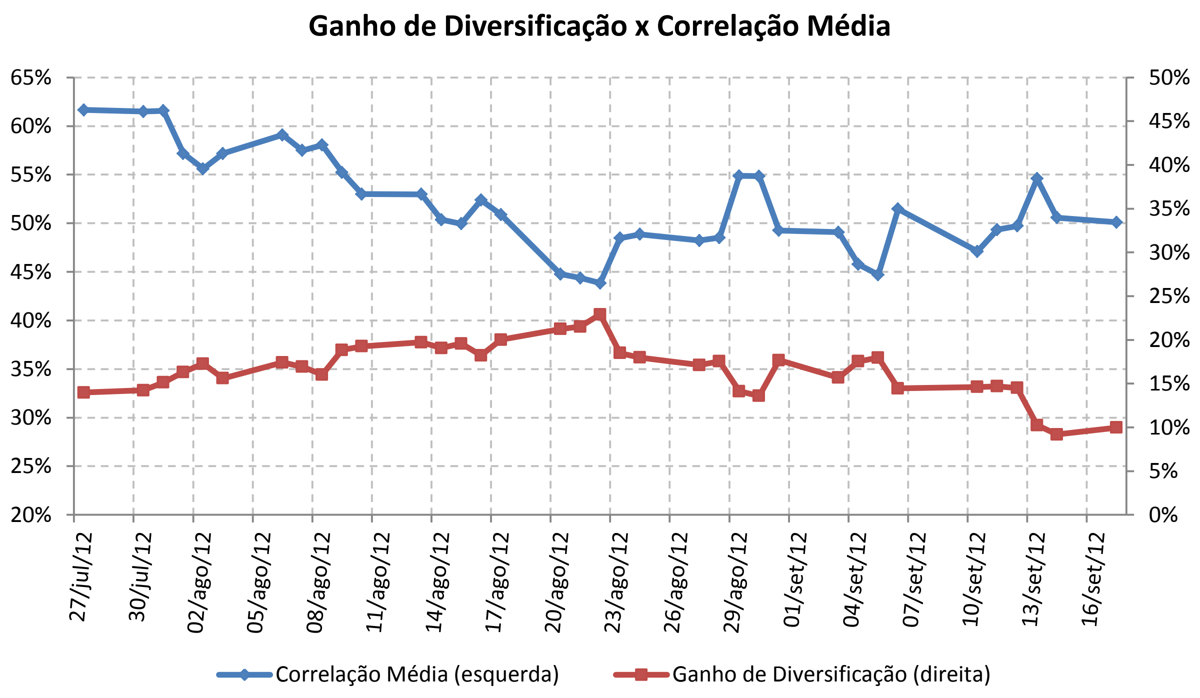


Gráfico 23 - Ganho de Diversificação x Correlação Média

Fonte: Os autores

Observa-se que quando a correlação entre os ativos diminui, o ganho de diversificação aumenta e que quando a correlação aumenta, o ganho diminui. Conclui-se então, que os dados práticos confirmaram a teoria de que o ganho de diversificação depende das correlações e que quanto maior forem essas correlações, menor será a diferença entre o VaR não diversificado e o VaR da carteira.

(iii) Medida de Risco no tempo

Por fim, dado que o trabalho foi realizado usando-se uma carteira de opções, separou-se um item para analisar o risco individual de cada uma das opções no tempo. Dado que a precificação das opções é complexa e que esses ativos não possuem relação linear com seus fatores de risco, a compreensão da sua medida de risco requer um bom conhecimento desses ativos e de sua função de precificação.

Para cada uma das opções, serão analisados dois tipos de relação: a primeira entre o VaR Monte Carlo da opção e o preço do ativo subjacente e a segunda entre o preço do ativo subjacente e o prêmio da opção.

OPÇÃO DE VALE

A opção de Vale possui uma peculiaridade, pois o preço do ativo subjacente, no período estudado, fica sempre abaixo do preço de exercício. Essa opção, por ser de compra, está fora do dinheiro e, por isso, espera-se que o seu prêmio fique próximo a zero.

Adicionalmente, dado que a opção perde valor, o seu risco deve aumentar. Perto do vencimento, quando a opção estiver valendo muito pouco, o risco deverá ser máximo.

No Gráfico 24 a curva vermelha representa o preço do ativo subjacente, a curva verde representa o preço de exercício e a azul o VaR Monte Carlo da opção.

Percebe-se que a opção está fora do dinheiro, pois a curva vermelha está sempre abaixo da verde. Além disso, quando a curva vermelha cai a azul sobe. Isso ocorre, pois, quanto mais fora do dinheiro a opção estiver, maior será o seu risco.

Outro fator interessante que se pode observar no gráfico é que o preço do ativo subjacente começa a se recuperar quando a opção se aproxima do vencimento. Essa recuperação porém não é refletida nem no prêmio da opção e nem no seu risco. Quando a opção se aproxima do vencimento, o fator tempo ganha peso e contribui mais do que o fator preço do ativo subjacente para o risco da opção.

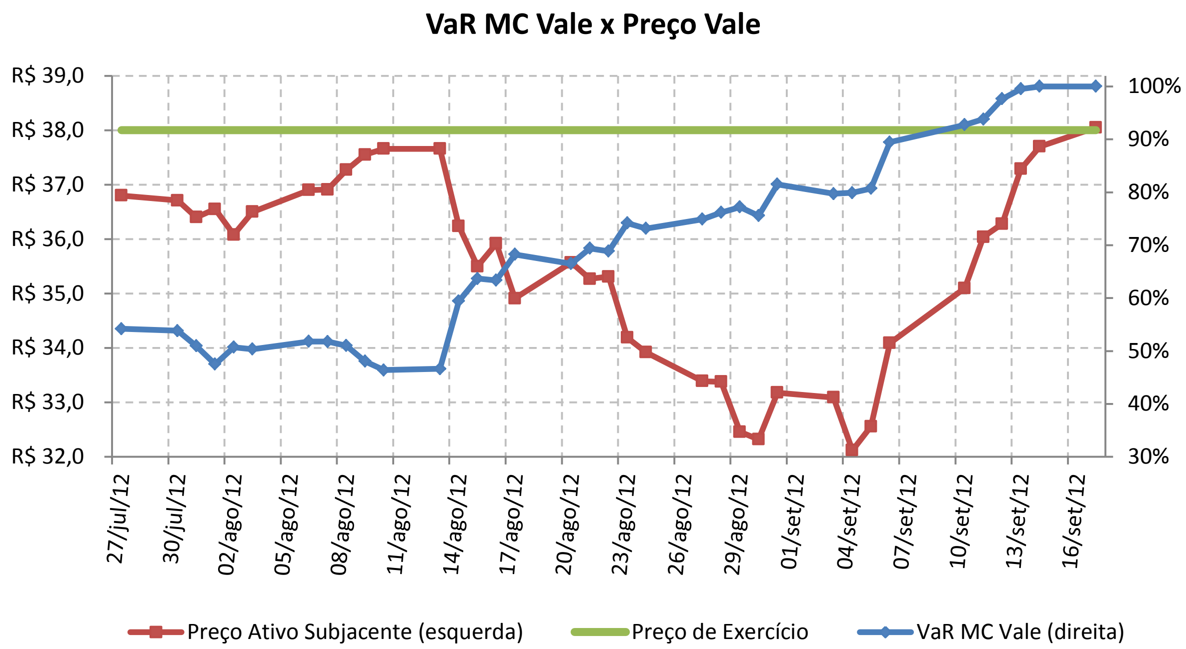


Gráfico 24 - VaR Monte Carlo Vale x Preço Ativo Subjacente

Fonte: Os autores

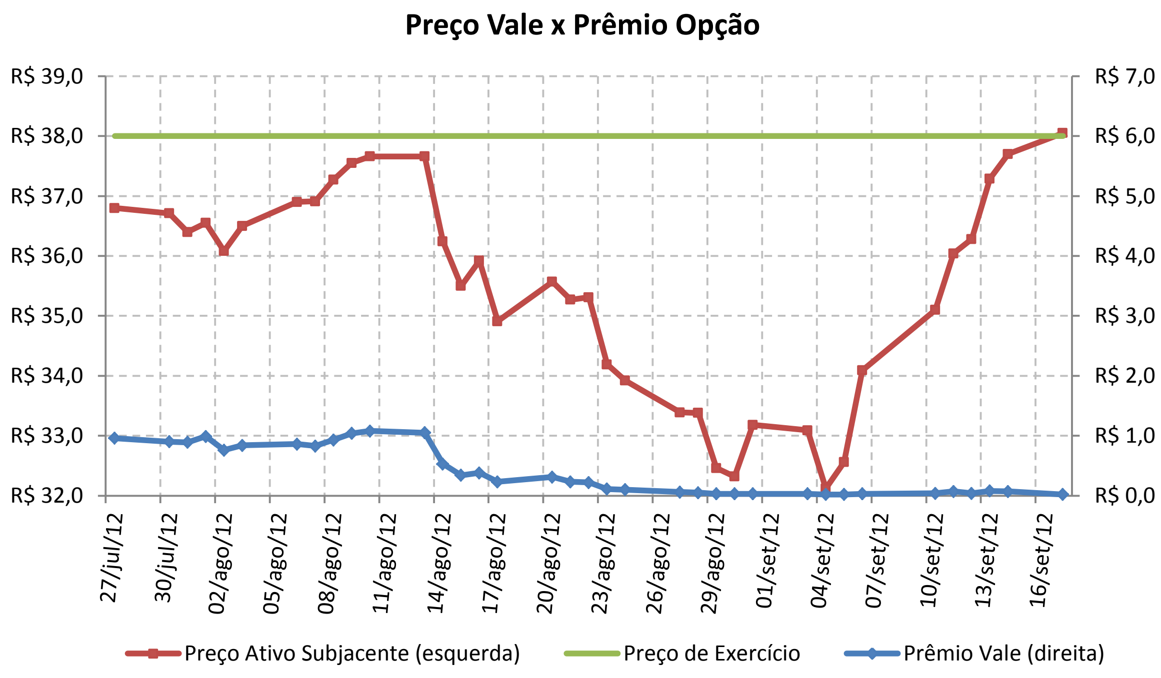


Gráfico 25 - Preço Vale x Prêmio Opção de Vale

Fonte: Os autores

OPÇÃO DE OGX

A opção de OGX tem um comportamento contrário ao da opção de Vale, pois o preço do seu ativo subjacente, no período analisado, está sempre acima do preço de exercício da opção. Assim, espera-se que ao aproximar-se do vencimento o prêmio da opção aumente e o seu risco diminua. Como a opção encontra-se no dinheiro perto do vencimento, a probabilidade dela vencer no dinheiro é alta e por isso o risco diminui. Os Gráfico 26 e Gráfico 27 indicam os efeitos descritos.

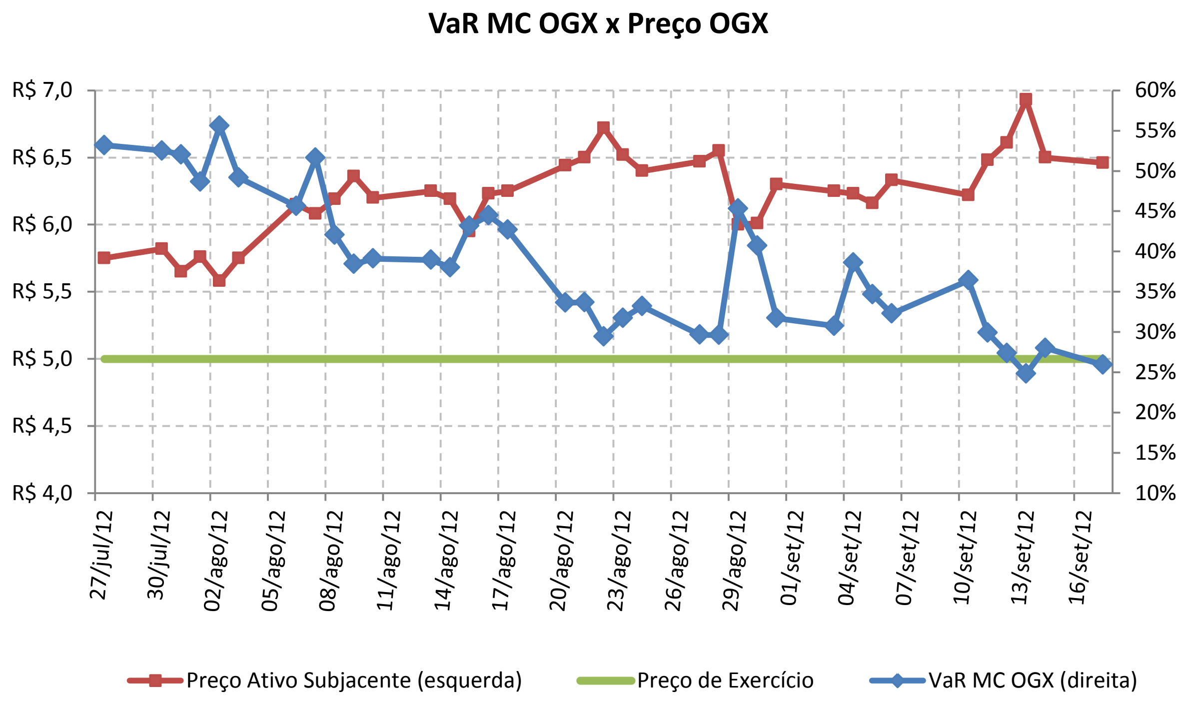


Gráfico 26 - VaR Monte Carlo OGX x Preço Ativo Subjacente

Fonte: Os autores

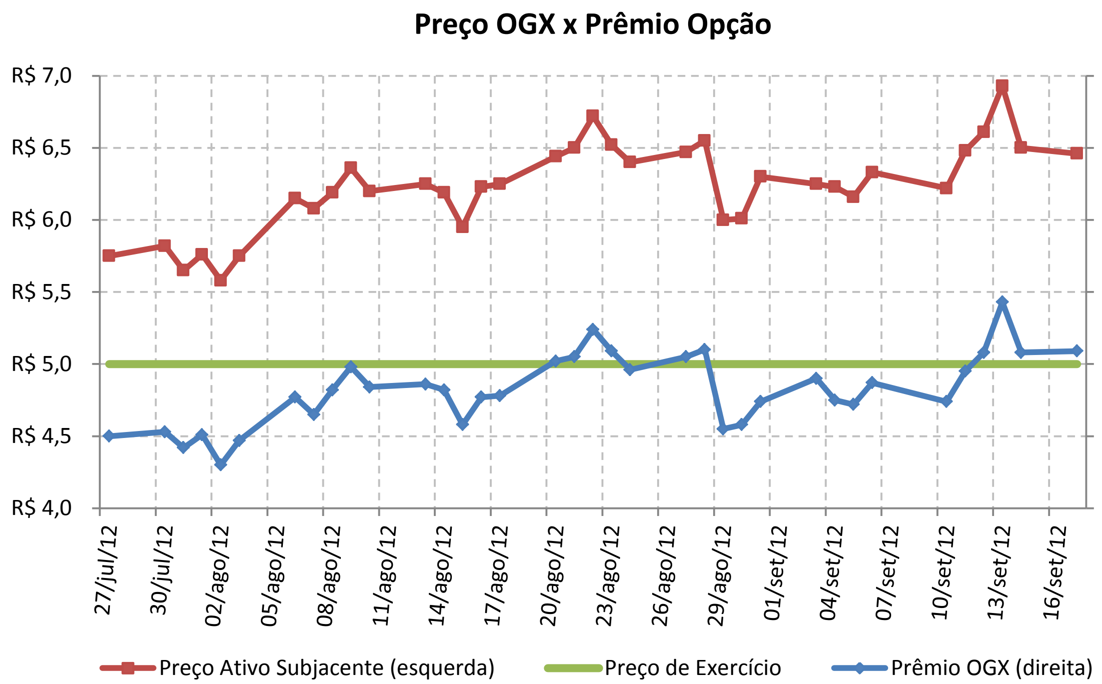


Gráfico 27 - Preço OGX x Prêmio Opção de OGX

Fonte: Os autores

OPÇÃO DE GERDAU

Por fim, a opção de Gerdau, diferentemente das anteriores, não fica dentro ou fora do dinheiro durante todo o período analisado. Ela começa fora do dinheiro, porém ao aproximar-se do vencimento entra no dinheiro.

Além dos movimentos já descritos anteriormente para as outras duas opções, que são:

i. No geral, quando o preço do ativo subjacente sobe, o risco da opção de compra cai e o seu prêmio se valoriza. Como visto para o caso da opção de Vale, ao aproximar-se do vencimento, essa relação pode não ser verificada, pois outros fatores começam a influenciar o risco;

ii. No geral, quando o preço do ativo subjacente cai, o risco da opção aumenta e o seu prêmio de desvaloriza.

O movimento interessante a se observar no caso da opção de Gerdau é que, perto do vencimento, ela encontra-se no dinheiro e a alguns dias do vencimento o preço do ativo subjacente sobe muito, fazendo com que ela fique muito no dinheiro. O risco dessa opção, nesse período, cai abruptamente. Essa queda muito brusca ocorre, porque além do preço ter subido muito rapidamente, a opção ainda estava muito próxima do vencimento. Ou seja, dois fatores contribuíram para a queda da sua medida de risco: o preço do ativo subjacente e o tempo para o vencimento.

Esses movimentos são demonstrados nos Gráfico 28 e Gráfico 29.

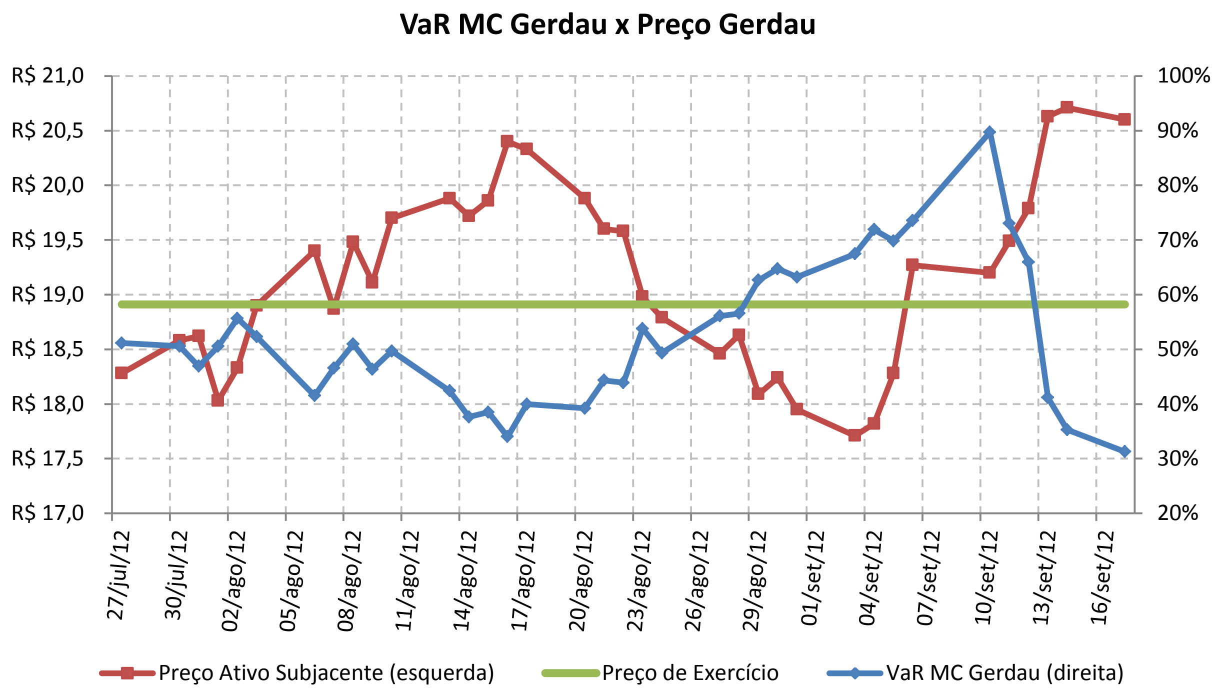


Gráfico 28 - VaR Monte Carlo Gerdau x Preço Ativo Subjacente

Fonte: Os autores

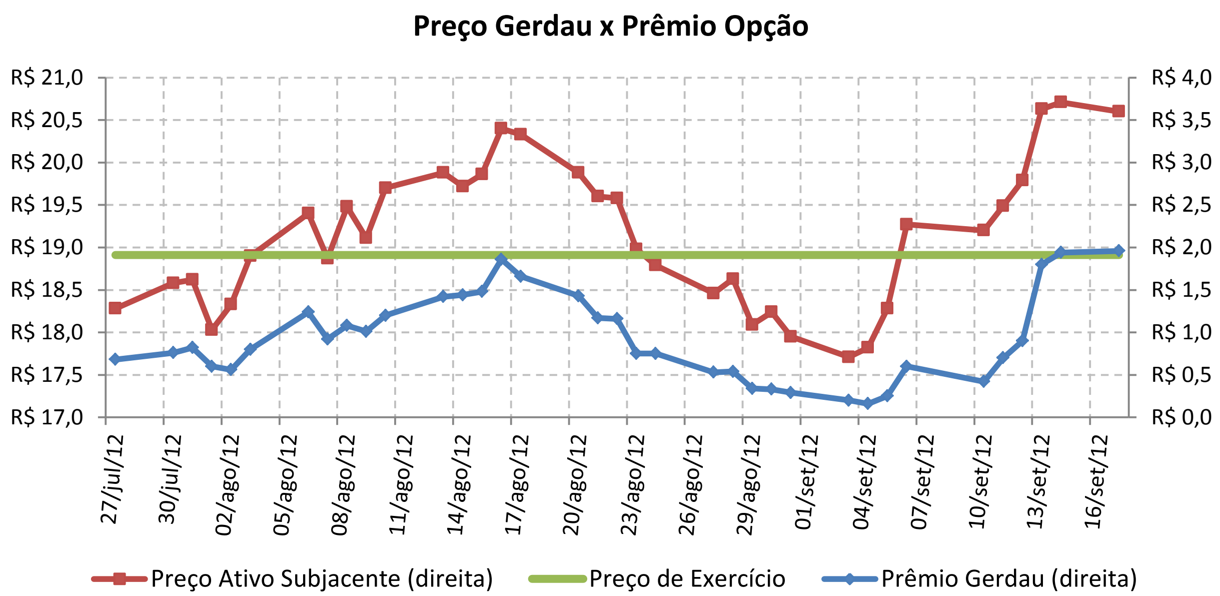


Gráfico 29 - Preço Gerdau x Prêmio Opção de Gerdau

Fonte: Os autores

4. Considerações Finais

A mensuração e gestão do risco se transformaram em atividades estratégias para a maior parte das instituições, principalmente as financeiras, ao possibilitar uma diversificação das operações mantendo ainda as probabilidades de perdas controladas. Dentre as vantagens competitivas advindas do desenvolvimento desta área, pode-se enumerar uma melhor precificação dos ativos financeiros, auxílio à tomada de decisão e à avaliação de desempenho, melhor alocação de recursos, entre outros.

Neste contexto, a metodologia de *Value at Risk* foi de grande destaque ao introduzir a possibilidade de mensuração do risco em somente um número, expresso em unidades monetárias. Contudo, é importante que algumas ressalvas sejam feitas sobre o método.

Primeiramente, existem alguns métodos para o cálculo do VaR, os quais não se aplicam para todos os tipos de instrumentos financeiros. Como foi possível observar no modelo estudado no presente trabalho, o VaR Delta Normal apresenta falhas ao ser aplicado em derivativos, devido à aproximação linear proposta. Além disso, no modelo de Monte Carlo, as opções são reprecificadas de acordo com os preços gerados na simulação. Assim, caso haja um pulo no preço da ação, o modelo acompanhará corretamente o movimento. Já no caso da aproximação linear, o erro aumentará, pois o modelo só é válido para pequenas variações nos preços do ativo subjacente.

O modelo elaborado neste trabalho também possibilitou a comprovação, em um caso prático, dos efeitos positivos no risco da composição de uma carteira, em comparação com os riscos individualmente. O fator correlação mostrou-se ser um importante aspecto impactante na otimização do risco da carteira.

Uma importante ressalva sobre o presente trabalho consiste no fato de que seu foco foi um tipo específico de opção como objeto de estudo. Apesar da sua validade como exemplo para aplicação da teoria e análise das particularidades, existem inúmeros outros ativos no mercado para os quais as conclusões aqui descritas não se aplicam. Tomemos por exemplo os instrumentos de renda fixa. Nestes casos, diversos outros conceitos e métodos de precificação são necessários, fazendo com que adaptações sejam feitas.

Logo, uma sugestão para futuras pesquisas é a análise das principais variações metodológicas entre os diversos tipos de ativos, de modo a identificar os conceitos generalizáveis. Além disso, seria interessante replicar a Simulação de Monte Carlo elaborada neste trabalho, entretanto variando os parâmetros adotados. Dessa forma, seria possível analisar os impactos da escolha arbitrária dos mesmos.

5. Referências Bibliográficas

Bessis, J. (1998). *Risk Management in Banking.* United Kingdom: John Wiley & Sons Ltd.

Dowd, K. (1998). *Beyond Value at Risk: The New Science of Risk Management.* Chichester, Inglaterra: John Wiley & Sons.

Filho, H. C. (2012). Modelos de Simulação de Monte Carlo: Aplicações ao Cálculo do Value-at-Risk e à análise de Opções de Compra Européias sem Dividendos. 64.

Hull, J. C. (2003). *Options, Futures & Other Derivatives.* New Jersey: Prentice Hall.

Jorge, B., Pires, C., & Silveira, C. (20--). Value at Risk: Notas sobre o Caso não Linear.

Jorion, P. (1997). Value at Risk: A nova fonte de referência para o controle do risco de mercado. São Paulo: Bolsa de Valores e Futuros.

Lowenkron, A. (2009). *AS FALHAS NOS MODELOS DE GESTÃO DE RISCO.* Rio de Janeiro.

Markowitz, H. (n.d.). Portfolio Selection. *Journal of Finance 7* , pp. 77-91.

Mollica, M. (1999). UMA AVALIAÇÃO DE MODELOS DE VALUE-AT-RISK: COMPARAÇÃO ENTRE MÉTODOS TRADICIONAIS E MODELOS DE VARIÂNCIA CONDICIONAL. São Paulo.

Oliveira, E. P. (2009). Medidas Coerentes de Risco. *IMPA – Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada* , 74.

Roque, C. S. (n.d.). Simulação de Monte Carlo com Volatilidade Estocástica para a análise do risco de uma carteira de opções. 16.

Sain, P. (2011). Estudo Comparativo dos Modelos de Value-at-Risk para Instrumentos Pré-Fixados. São Paulo.

ANEXO I – CÓDIGO MATLAB

```
Janela = 120;
FatorDecaimento = 0.84;

r = log(1+0.075);
S1= 38;
S2=5;
S3=18.91;


Auxiliar = Janela-1:-1:0;
VetorPesosDecaimento = [FatorDecaimento.^Auxiliar]';
SomaPesosDecaimento = sum(VetorPesosDecaimento);
NumeroAtivos = size(Retornos, 2);

for i = 1:36

    RetornosAjust = Retornos(i:i+Janela-1,:);

    % cálculo da matriz de variancia e covariancia com decaimento
        MatrizVarCov = zeros(NumeroAtivos, NumeroAtivos);
        for ln=1:NumeroAtivos
            for cl=ln:NumeroAtivos
       % Com Média Zero        MatrizVarCov(ln, cl) =
sum(VetorPesosDecaimento.*(RetornosAjust(:,ln).*RetornosAjust(:,cl)))./Soma
PesosDecaimento;
                MatrizVarCov(ln,cl) =
sum(VetorPesosDecaimento.*((RetornosAjust(:,ln)-
(sum(VetorPesosDecaimento.*RetornosAjust(:,ln))/SomaPesosDecaimento)).*(Ret
ornosAjust(:,cl)-
(sum(VetorPesosDecaimento.*RetornosAjust(:,cl))/SomaPesosDecaimento))))/Som
aPesosDecaimento;
            end
        end

            OutPut(i,1) = i;
            OutPut(i,2) = MatrizVarCov(1, 1);
            OutPut(i,3) = MatrizVarCov(2, 2);
            OutPut(i,4) = MatrizVarCov(3, 3);
            OutPut(i,5) = MatrizVarCov(1, 2);
            OutPut(i,6) = MatrizVarCov(1, 3);
            OutPut(i,7) = MatrizVarCov(2, 3);
            OutPut(i,8) = sum(VetorPesosDecaimento .*
RetornosAjust(:,1))/SomaPesosDecaimento;
            OutPut(i,9) = sum(VetorPesosDecaimento .*
RetornosAjust(:,2))/SomaPesosDecaimento;
            OutPut(i,10) = sum(VetorPesosDecaimento .*
RetornosAjust(:,3))/SomaPesosDecaimento;

end

numRep =  size(OutPut,1);

display(['1.Matrizes VarCov Calculadas']);

teste = struct('matrizSimulada',zeros(10000, NumeroAtivos));
```

```
premio = struct('matrizPremio',zeros(10000, NumeroAtivos));

% VaR Simulação de Monte Carlo

for h = 1:numRep

    [retEsp] = [OutPut(h,8) OutPut(h,9) OutPut(h,10)];
    [matrizCov] = [OutPut(h,2) OutPut(h,5) OutPut(h,6);OutPut(h,5)
OutPut(h,3) OutPut(h,7);OutPut(h,6) OutPut(h,7) OutPut(h,4)];
    teste(h).matrizSimulada = portsim([retEsp],[matrizCov],10000,1,1);

end

display(['2.Matrizes Retornos Simulados dos Ativos Calculadas']);

for t = 1:numRep

   teste(t).matrizSimulada(:,1) = ([teste(t).matrizSimulada(:,1)]+1) .*
Precos(t+119,1);
   teste(t).matrizSimulada(:,2) = ([teste(t).matrizSimulada(:,2)]+1) .*
Precos(t+119,2);
   teste(t).matrizSimulada(:,3) = ([teste(t).matrizSimulada(:,3)]+1) .*
Precos(t+119,3);

end

display(['3.Matrizes Preços Simulados dos Ativos Calculadas']);
tic;

%Quantidades

Financeiro = ones(numRep,1);
Financeiro = Financeiro .* 10000;

Qntds = zeros(numRep,NumeroAtivos);
Qntds(:,1) = (Financeiro ./ Premios(:,1));
Qntds(:,2) = (Financeiro ./ Premios(:,2));
Qntds(:,3) = (Financeiro ./ Premios(:,3));

for h = 1:numRep

    tempo = (37 - h)/252;

    %VaR Delta Normal
        exp1 =  blsdelta(Precos(h+119,1),S1,r,tempo,Vimp(h,1)) *
Precos(h+119,1)* Qntds(h,1);
        exp2 =  blsdelta(Precos(h+119,2),S2,r,tempo,Vimp(h,2)) *
Precos(h+119,2)* Qntds(h,2);
        exp3 =  blsdelta(Precos(h+119,3),S3,r,tempo,Vimp(h,3)) *
Precos(h+119,3)* Qntds(h,3);

        VaRDNAtivo(h,1) = -(exp1 * sqrt(OutPut(h,2))* norminv(0.02,0,1));
        VaRDNAtivo(h,2) = -(exp2 * sqrt(OutPut(h,3))* norminv(0.02,0,1));
        VaRDNAtivo(h,3) = -(exp3 * sqrt(OutPut(h,4))* norminv(0.02,0,1));

        [exp] = [exp1 exp2 exp3];
```

```
        [mat] = [OutPut(h,2) OutPut(h,5) OutPut(h,6);OutPut(h,5)
OutPut(h,3) OutPut(h,7);OutPut(h,6) OutPut(h,7) OutPut(h,4)];

        VaRDNCarteira(h) = sqrt(([exp] * [mat])* [exp]')*
norminv(0.02,0,1);

    for k = 1:10000

        premio(h).matrizPremio(k,1) =
blsprice(teste(h).matrizSimulada(k,1),S1,r,tempo,Vimp(h,1));
        premio(h).matrizPremio(k,2) =
blsprice(teste(h).matrizSimulada(k,2),S2,r,tempo,Vimp(h,2));
        premio(h).matrizPremio(k,3) =
blsprice(teste(h).matrizSimulada(k,3),S3,r,tempo,Vimp(h,3));

    end

display(h);

end


fprintf(' Ok (%.2f segundos)\n', toc);
display(['4.Matrizes Premios Simulados das Opções dos Ativos Calculadas']);
tic;

for h = 1: numRep

    ResultadoCarteira(h) = (Premios(h,1).* Qntds(h,1) + Premios(h,2).*
Qntds(h,2) + Premios(h,3).* Qntds(h,3));
    varCarteira(h) = RetornaQuantil(((premio(h).matrizPremio(:,1) .*
Qntds(h,1)) + (premio(h).matrizPremio(:,2) .* Qntds(h,2)) +
(premio(h).matrizPremio(:,3) .* Qntds(h,3)))-ResultadoCarteira(h),0.02);

    varAtivoInd(h,1) = RetornaQuantil(((premio(h).matrizPremio(:,1)-
Premios(h,1)).* Qntds(h,1)),0.02);
    varAtivoInd(h,2) = RetornaQuantil(((premio(h).matrizPremio(:,2)-
Premios(h,2)).* Qntds(h,2)),0.02);
    varAtivoInd(h,3) = RetornaQuantil(((premio(h).matrizPremio(:,3) -
Premios(h,3)).* Qntds(h,3)),0.02);

end

fprintf(' Ok (%.2f segundos)\n', toc);

dlmwrite('VaR_MC_Carteira.txt',varCarteira,'precision','%.10f','newline','p
c');
dlmwrite('VAr_MC_Ativos.txt',varAtivoInd,'precision','%.10f','newline','pc'
);
dlmwrite('VaR_DN_Carteira.txt',VaRDNCarteira,'precision','%.10f','newline',
'pc');
dlmwrite('VAr_DN_Ativos.txt',VaRDNAtivo,'precision','%.10f','newline','pc')
;
```

ANEXO II – TABELA DE DADOS VAR MC

Tabela 6 - Dados VaR Simulação de Monte Carlo

Data	VaR Vale	VaR OGX	VaR Gerdau	VaR Carteira	VaR Não Diversificado
27/jul/12	R$ 5,420.89	R$ 5,318.39	R$ 5,113.88	R$ 13,909.81	R$ 15,853.15
30/jul/12	R$ 5,383.58	R$ 5,250.86	R$ 5,055.42	R$ 13,735.93	R$ 15,689.86
31/jul/12	R$ 5,096.11	R$ 5,204.35	R$ 4,690.61	R$ 13,021.50	R$ 14,991.06
01/ago/12	R$ 4,751.82	R$ 4,864.54	R$ 5,053.84	R$ 12,611.88	R$ 14,670.20
02/ago/12	R$ 5,071.86	R$ 5,558.71	R$ 5,564.78	R$ 13,810.89	R$ 16,195.35
03/ago/12	R$ 5,035.65	R$ 4,915.27	R$ 5,231.23	R$ 13,132.76	R$ 15,182.14
06/ago/12	R$ 5,179.72	R$ 4,562.86	R$ 4,151.32	R$ 11,833.16	R$ 13,893.90
07/ago/12	R$ 5,176.39	R$ 5,162.48	R$ 4,655.17	R$ 12,823.10	R$ 14,994.04
08/ago/12	R$ 5,102.58	R$ 4,204.68	R$ 5,092.97	R$ 12,411.46	R$ 14,400.23
09/ago/12	R$ 4,805.67	R$ 3,844.58	R$ 4,633.76	R$ 11,177.39	R$ 13,284.00
10/ago/12	R$ 4,638.07	R$ 3,912.46	R$ 4,966.83	R$ 11,334.28	R$ 13,517.36
13/ago/12	R$ 4,662.84	R$ 3,895.32	R$ 4,238.28	R$ 10,688.32	R$ 12,796.44
14/ago/12	R$ 5,943.43	R$ 3,801.70	R$ 3,760.85	R$ 11,344.05	R$ 13,505.98
15/ago/12	R$ 6,367.94	R$ 4,316.34	R$ 3,848.56	R$ 12,153.90	R$ 14,532.85
16/ago/12	R$ 6,335.46	R$ 4,447.69	R$ 3,403.20	R$ 11,999.52	R$ 14,186.35
17/ago/12	R$ 6,825.15	R$ 4,267.87	R$ 3,995.04	R$ 12,572.46	R$ 15,088.07
20/ago/12	R$ 6,649.99	R$ 3,364.57	R$ 3,918.60	R$ 11,491.64	R$ 13,933.16
21/ago/12	R$ 6,941.49	R$ 3,369.06	R$ 4,432.44	R$ 12,132.26	R$ 14,742.98
22/ago/12	R$ 6,885.78	R$ 2,944.74	R$ 4,389.18	R$ 11,570.14	R$ 14,219.70
23/ago/12	R$ 7,416.80	R$ 3,173.25	R$ 5,378.83	R$ 13,475.94	R$ 15,968.87
24/ago/12	R$ 7,316.12	R$ 3,320.91	R$ 4,932.16	R$ 13,195.34	R$ 15,569.19
27/ago/12	R$ 7,491.42	R$ 2,966.69	R$ 5,609.40	R$ 13,718.95	R$ 16,067.51
28/ago/12	R$ 7,618.96	R$ 2,962.93	R$ 5,656.67	R$ 13,814.16	R$ 16,238.56
29/ago/12	R$ 7,719.38	R$ 4,530.35	R$ 6,263.92	R$ 16,222.27	R$ 18,513.65
30/ago/12	R$ 7,556.11	R$ 4,072.43	R$ 6,473.63	R$ 15,935.00	R$ 18,102.17
31/ago/12	R$ 8,149.95	R$ 3,174.22	R$ 6,321.57	R$ 14,996.46	R$ 17,645.74
03/set/12	R$ 7,971.51	R$ 3,077.11	R$ 6,743.68	R$ 15,381.44	R$ 17,792.31
04/set/12	R$ 7,988.64	R$ 3,862.89	R$ 7,190.66	R$ 16,200.10	R$ 19,042.19
05/set/12	R$ 8,070.27	R$ 3,467.00	R$ 6,981.29	R$ 15,697.94	R$ 18,518.55
06/set/12	R$ 8,946.22	R$ 3,228.57	R$ 7,354.35	R$ 17,062.87	R$ 19,529.14
10/set/12	R$ 9,274.53	R$ 3,640.74	R$ 8,972.19	R$ 19,097.44	R$ 21,887.46
11/set/12	R$ 9,380.11	R$ 2,991.36	R$ 7,299.63	R$ 17,152.01	R$ 19,671.09
12/set/12	R$ 9,764.70	R$ 2,738.48	R$ 6,591.43	R$ 16,675.76	R$ 19,094.61
13/set/12	R$ 9,952.83	R$ 2,482.50	R$ 4,114.90	R$ 15,011.49	R$ 16,550.23
14/set/12	R$ 9,999.68	R$ 2,803.11	R$ 3,528.91	R$ 14,957.05	R$ 16,331.70
17/set/12	R$ 9,999.90	R$ 2,594.57	R$ 3,126.19	R$ 14,295.70	R$ 15,720.65

Fonte: Os autores

ANEXO III – TABELA DE DADOS VAR DN

Tabela 7 - Dados VaR Método Delta Normal

Data	VaR DN Vale	VaR DN OGX	VaR DN Gerdau	VaR DN Carteira
27/jul/12	R$ 6,479.97	R$ 5,840.71	R$ 6,713.82	R$ 16,462.33
30/jul/12	R$ 6,465.99	R$ 5,761.37	R$ 6,625.27	R$ 16,294.35
31/jul/12	R$ 5,932.43	R$ 5,728.31	R$ 6,074.63	R$ 15,308.89
01/ago/12	R$ 5,478.33	R$ 5,338.62	R$ 6,581.51	R$ 14,731.13
02/ago/12	R$ 5,922.92	R$ 6,240.76	R$ 7,548.69	R$ 16,544.51
03/ago/12	R$ 5,922.06	R$ 5,376.18	R$ 6,983.34	R$ 15,487.02
06/ago/12	R$ 6,255.43	R$ 5,035.66	R$ 5,277.72	R$ 14,170.49
07/ago/12	R$ 6,239.44	R$ 5,637.88	R$ 6,000.18	R$ 15,147.76
08/ago/12	R$ 6,101.71	R$ 4,565.65	R$ 6,662.00	R$ 14,772.24
09/ago/12	R$ 5,807.08	R$ 4,161.79	R$ 5,965.62	R$ 13,399.20
10/ago/12	R$ 5,596.55	R$ 4,258.79	R$ 6,486.76	R$ 13,597.08
13/ago/12	R$ 5,558.04	R$ 4,215.93	R$ 5,392.23	R$ 12,615.21
14/ago/12	R$ 7,448.66	R$ 4,083.35	R$ 4,765.24	R$ 13,527.87
15/ago/12	R$ 8,211.85	R$ 4,630.64	R$ 4,734.41	R$ 14,585.12
16/ago/12	R$ 8,380.74	R$ 4,719.89	R$ 4,300.67	R$ 14,637.47
17/ago/12	R$ 9,044.27	R$ 4,572.75	R$ 4,991.10	R$ 15,544.23
20/ago/12	R$ 9,076.84	R$ 3,658.09	R$ 4,890.08	R$ 14,375.10
21/ago/12	R$ 9,583.62	R$ 3,643.52	R$ 5,515.18	R$ 15,262.88
22/ago/12	R$ 9,569.38	R$ 3,364.93	R$ 5,340.97	R$ 14,901.91
23/ago/12	R$ 10,735.29	R$ 3,366.52	R$ 6,726.45	R$ 17,389.21
24/ago/12	R$ 10,268.90	R$ 3,532.98	R$ 5,999.52	R$ 16,541.84
27/ago/12	R$ 10,899.59	R$ 3,201.05	R$ 6,977.02	R$ 17,650.04
28/ago/12	R$ 11,162.59	R$ 3,154.55	R$ 7,219.95	R$ 18,073.82
29/ago/12	R$ 11,383.51	R$ 4,724.95	R$ 8,221.79	R$ 20,680.12
30/ago/12	R$ 10,809.49	R$ 4,327.85	R$ 8,731.85	R$ 20,276.83
31/ago/12	R$ 13,319.00	R$ 4,218.28	R$ 8,226.94	R$ 21,393.59
03/set/12	R$ 12,708.15	R$ 3,234.26	R$ 9,078.42	R$ 20,709.17
04/set/12	R$ 12,507.18	R$ 4,022.73	R$ 10,449.44	R$ 21,708.91
05/set/12	R$ 13,367.71	R$ 3,683.09	R$ 10,246.09	R$ 22,213.93
06/set/12	R$ 18,629.73	R$ 3,427.49	R$ 10,717.17	R$ 28,492.67
10/set/12	R$ 22,032.43	R$ 3,739.78	R$ 15,869.07	R$ 35,405.39
11/set/12	R$ 23,923.23	R$ 3,432.81	R$ 10,350.57	R$ 32,834.29
12/set/12	R$ 31,042.24	R$ 3,157.90	R$ 9,157.39	R$ 38,695.62
13/set/12	R$ 39,508.22	R$ 2,748.36	R$ 5,016.97	R$ 44,333.63
14/set/12	R$ 61,288.77	R$ 3,011.30	R$ 4,317.26	R$ 65,467.02
17/set/12	R$ 460,085.71	R$ 2,781.27	R$ 3,845.11	R$ 463,657.63

Fonte: Os autores

ANEXO IV – TABELA VARIÂNCIAS E COVARIÂNCIAS EWMA

(Janela 120 dias úteis)

Tabela 8 - Tabela de Variâncias x Covariâncias EWMA

Data	Variancia Vale	Variancia OGX	Variancia Gerdau	Cov ValeOGX	Cov ValeGerdau	Cov OGXGerdau
27/jul/12	0.0383%	0.4069%	0.0747%	0.0688%	0.0391%	0.0990%
30/jul/12	0.0360%	0.3842%	0.0711%	0.0646%	0.0367%	0.0943%
31/jul/12	0.0341%	0.3646%	0.0668%	0.0617%	0.0346%	0.0890%
01/ago/12	0.0322%	0.3464%	0.0702%	0.0589%	0.0312%	0.0784%
02/ago/12	0.0310%	0.3297%	0.0672%	0.0570%	0.0284%	0.0716%
03/ago/12	0.0303%	0.3174%	0.0675%	0.0565%	0.0289%	0.0730%
06/ago/12	0.0293%	0.3288%	0.0661%	0.0583%	0.0287%	0.0775%
07/ago/12	0.0276%	0.3098%	0.0685%	0.0547%	0.0268%	0.0752%
08/ago/12	0.0266%	0.2931%	0.0688%	0.0525%	0.0269%	0.0735%
09/ago/12	0.0253%	0.2795%	0.0682%	0.0505%	0.0242%	0.0654%
10/ago/12	0.0238%	0.2671%	0.0681%	0.0471%	0.0231%	0.0573%
13/ago/12	0.0224%	0.2513%	0.0640%	0.0442%	0.0217%	0.0540%
14/ago/12	0.0293%	0.2369%	0.0613%	0.0439%	0.0235%	0.0517%
15/ago/12	0.0294%	0.2315%	0.0577%	0.0454%	0.0219%	0.0482%
16/ago/12	0.0289%	0.2310%	0.0569%	0.0468%	0.0224%	0.0513%
17/ago/12	0.0310%	0.2172%	0.0540%	0.0437%	0.0225%	0.0481%
20/ago/12	0.0320%	0.2089%	0.0553%	0.0448%	0.0176%	0.0406%
21/ago/12	0.0303%	0.1966%	0.0539%	0.0419%	0.0172%	0.0375%
22/ago/12	0.0286%	0.1900%	0.0508%	0.0400%	0.0160%	0.0345%
23/ago/12	0.0317%	0.1855%	0.0541%	0.0434%	0.0206%	0.0391%
24/ago/12	0.0299%	0.1770%	0.0516%	0.0412%	0.0196%	0.0381%
27/ago/12	0.0288%	0.1669%	0.0503%	0.0382%	0.0196%	0.0349%
28/ago/12	0.0272%	0.1574%	0.0478%	0.0362%	0.0187%	0.0333%
29/ago/12	0.0285%	0.1907%	0.0497%	0.0452%	0.0213%	0.0455%
30/ago/12	0.0268%	0.1793%	0.0473%	0.0425%	0.0201%	0.0430%
31/ago/12	0.0312%	0.1828%	0.0456%	0.0492%	0.0162%	0.0363%
03/set/12	0.0293%	0.1723%	0.0436%	0.0462%	0.0151%	0.0347%
04/set/12	0.0312%	0.1620%	0.0415%	0.0439%	0.0129%	0.0324%
05/set/12	0.0314%	0.1530%	0.0434%	0.0400%	0.0152%	0.0286%
06/set/12	0.0444%	0.1483%	0.0577%	0.0458%	0.0302%	0.0356%
10/set/12	0.0471%	0.1414%	0.0545%	0.0398%	0.0272%	0.0341%
11/set/12	0.0482%	0.1427%	0.0521%	0.0435%	0.0275%	0.0350%
12/set/12	0.0454%	0.1358%	0.0498%	0.0414%	0.0262%	0.0342%
13/set/12	0.0463%	0.1389%	0.0553%	0.0453%	0.0301%	0.0418%
14/set/12	0.0438%	0.1570%	0.0520%	0.0399%	0.0282%	0.0402%
17/set/12	0.0413%	0.1480%	0.0496%	0.0372%	0.0262%	0.0383%

Fonte: Os autores

ANEXO V – TABELA DADOS DO ATIVO SUBJACENTE VALE

Tabela 9 - Tabela Dados Vale

Data	Preço	Prêmio Opção	Vol Implícita
27/jul/12	36.80	0.96	0.24
30/jul/12	36.71	0.90	0.24
31/jul/12	36.40	0.89	0.26
01/ago/12	36.55	0.99	0.27
02/ago/12	36.08	0.76	0.27
03/ago/12	36.50	0.84	0.26
06/ago/12	36.90	0.86	0.23
07/ago/12	36.91	0.83	0.23
08/ago/12	37.27	0.93	0.23
09/ago/12	37.55	1.04	0.23
10/ago/12	37.66	1.08	0.23
13/ago/12	37.66	1.05	0.23
14/ago/12	36.24	0.53	0.25
15/ago/12	35.50	0.34	0.25
16/ago/12	35.92	0.38	0.24
17/ago/12	34.91	0.23	0.27
20/ago/12	35.57	0.31	0.26
21/ago/12	35.27	0.23	0.26
22/ago/12	35.31	0.22	0.26
23/ago/12	34.19	0.11	0.29
24/ago/12	33.92	0.10	0.31
27/ago/12	33.39	0.06	0.32
28/ago/12	33.38	0.05	0.32
29/ago/12	32.46	0.03	0.35
30/ago/12	32.32	0.03	0.38
31/ago/12	33.18	0.03	0.34
03/set/12	33.09	0.03	0.36
04/set/12	32.12	0.02	0.42
05/set/12	32.56	0.02	0.42
06/set/12	34.09	0.03	0.35
10/set/12	35.10	0.04	0.31
11/set/12	36.04	0.07	0.28
12/set/12	36.28	0.04	0.25
13/set/12	37.29	0.08	0.19
14/set/12	37.70	0.07	0.13
17/set/12	38.05	0.02	0.13

Fonte: Os autores

ANEXO VI – TABELA DADOS DO ATIVO SUBJACENTE OGX

Tabela 10 - Tabela Dados OGX

Data	Preço	Prêmio Opção	Vol Implícita
27/jul/12	5.75	1.00	0.62
30/jul/12	5.82	1.03	0.59
31/jul/12	5.65	0.92	0.64
01/ago/12	5.76	1.01	0.66
02/ago/12	5.58	0.80	0.55
03/ago/12	5.75	0.97	0.63
06/ago/12	6.15	1.27	0.57
07/ago/12	6.08	1.15	0.42
08/ago/12	6.19	1.32	0.63
09/ago/12	6.36	1.48	0.67
10/ago/12	6.20	1.34	0.69
13/ago/12	6.25	1.36	0.65
14/ago/12	6.19	1.32	0.70
15/ago/12	5.95	1.08	0.63
16/ago/12	6.23	1.27	0.40
17/ago/12	6.25	1.28	0.40
20/ago/12	6.44	1.52	0.70
21/ago/12	6.50	1.55	0.61
22/ago/12	6.72	1.74	0.61
23/ago/12	6.52	1.59	0.76
24/ago/12	6.40	1.46	0.71
27/ago/12	6.47	1.55	0.85
28/ago/12	6.55	1.60	0.77
29/ago/12	6.00	1.05	0.61
30/ago/12	6.01	1.08	0.73
31/ago/12	6.30	1.24	0.73
03/set/12	6.25	1.40	1.24
04/set/12	6.23	1.25	0.61
05/set/12	6.16	1.22	0.95
06/set/12	6.33	1.37	0.98
10/set/12	6.22	1.24	0.81
11/set/12	6.48	1.45	0.81
12/set/12	6.61	1.58	0.81
13/set/12	6.93	1.93	0.81
14/set/12	6.50	1.58	2.53
17/set/12	6.46	1.59	4.16

Fonte: Os autores

ANEXO VII – TABELA DADOS DO ATIVO SUBJACENTE GERDAU

Tabela 11 - Tabela Dados Gerdau

Data	Preço	Prêmio Opção	Vol Implícita
27/jul/12	18.28	0.68	0.31
30/jul/12	18.58	0.76	0.30
31/jul/12	18.62	0.82	0.32
01/ago/12	18.03	0.60	0.34
02/ago/12	18.33	0.56	0.28
03/ago/12	18.90	0.80	0.27
06/ago/12	19.40	1.24	0.33
07/ago/12	18.87	0.92	0.34
08/ago/12	19.48	1.08	0.26
09/ago/12	19.11	1.01	0.33
10/ago/12	19.70	1.20	0.25
13/ago/12	19.88	1.42	0.30
14/ago/12	19.72	1.44	0.38
15/ago/12	19.86	1.48	0.36
16/ago/12	20.40	1.86	0.35
17/ago/12	20.33	1.66	0.27
20/ago/12	19.88	1.43	0.36
21/ago/12	19.60	1.17	0.33
22/ago/12	19.58	1.16	0.35
23/ago/12	18.98	0.75	0.34
24/ago/12	18.79	0.75	0.40
27/ago/12	18.46	0.53	0.38
28/ago/12	18.63	0.54	0.36
29/ago/12	18.09	0.34	0.39
30/ago/12	18.24	0.33	0.36
31/ago/12	17.95	0.29	0.42
03/set/12	17.71	0.20	0.42
04/set/12	17.82	0.16	0.38
05/set/12	18.28	0.25	0.37
06/set/12	19.27	0.60	0.29
10/set/12	19.20	0.42	0.19
11/set/12	19.49	0.70	0.28
12/set/12	19.79	0.90	0.28
13/set/12	20.63	1.80	0.63
14/set/12	20.71	1.94	0.97
17/set/12	20.60	1.96	1.73

Fonte: Os autores