



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO**

Departamento de Engenharia Mecânica  
DEM/POLI/UFRJ



**ANÁLISE DE SENSIBILIDADE AO RUÍDO DE UM ALGORITMO DE  
OTIMIZAÇÃO NÃO-LINEAR**

Hugo Bruno Vieira

PROJETO FINAL SUBMETIDO AO CORPO DOCENTE DO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA DA ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE ENGENHEIRO MECÂNICO.

Aprovado por:

---

Prof. Jose Herskovits Norman

---

Prof. Daniel Alves Castello

---

Prof. Thiago Gamboa Ritto

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MARÇO DE 2013

# ANÁLISE DE SENSIBILIDADE AO RUÍDO DE UM ALGORITMO DE OTIMIZAÇÃO NÃO-LINEAR

Aluno da Engenharia Mecânica da UFRJ

Março/2013

Orientador: Prof. Jose Herskovits Norman

Existem situações na prática de Engenharia em que as soluções de problemas que envolvem algum grau de otimização são afetadas por imprecisões numéricas nas funções. Problemas de otimização de forma em Mecânica dos Fluidos podem ser citados como exemplo.

O presente trabalho foi realizado a partir da necessidade de usar os algoritmos FAIPA (Feasible Arc Interior Point Algorithm) FDIPA (Feasible Directions Interior Point Algorithm) nesse contexto. O objetivo é avaliar o desempenho dos algoritmos na presença de ruído usando problemas teste baseados na otimização paramétrica de estruturas reticuladas submetidas a restrições para máxima tensão nas barras e máximo deslocamento dos nós.

Para analisar os algoritmos, diferentes níveis de ruído foram adicionados aos problemas teste, nas funções, nas restrições e nos gradientes, perfazendo um total de nove combinações diferentes. Para cada uma dessas combinações foram usados níveis de ruído alto e moderado e geradas cem amostras.

Depois de analisadas as amostras, foi possível determinar o efeito que tem a existência de ruído na precisão do resultado final e o aumento no custo computacional que ele ocasiona.

Variações dos algoritmos FAIPA e FDIPA que usam derivadas aproximadas também foram testadas. Nesses casos, ruído foi adicionado às funções e às restrições e se propagaram para as aproximações dos gradientes. Para que os algoritmos funcionassem corretamente, foi necessário definir um valor máximo para a precisão da aproximação baseada no nível de ruído.

## **Agradecimentos**

Aos meus pais, a Julia e a Rita, pelo carinho, suporte e incentivos constantes, sem os quais eu não teria chegado até aqui.

Ao professor Jose Herskovits Norman, pela confiança depositada, pela paciência e pelos ensinamentos ao longo da realização deste trabalho.

A todos os professores que contribuíram para a minha formação, sem os quais não seria possível realizar todas as atividades necessárias para chegar até aqui.

A todos os colegas e amigos do laboratório, pela ajuda e pela companhia ao longo da realização dessa jornada.

Aos meus amigos, que estiveram sempre ao meu lado ao longo do curso. As experiências compartilhadas e os exemplos foram fundamentais na minha formação.

# Sumário

Agradecimentos .....	3
Sumário .....	4
Índice de Figuras .....	9
Índice de Tabelas.....	11
1. Introdução .....	15
2. Algoritmos Utilizados .....	17
2.1. Problema de otimização não linear .....	17
2.2. Condições de Otimalidade .....	18
2.3. Condições suficientes de otimalidade.....	19
2.4. Algoritmo de Newton.....	19
2.5. Algoritmos FDIPA e FAIPA .....	19
2.6. Pseudo Código para o algoritmo FDIPA .....	20
2.7. Pseudo-Código para o algoritmo FAIPA .....	21
2.8. Funcionamento do algoritmo na presença de ruído.....	23
2.9. Parâmetros dos Algoritmos.....	24
2.10. Novas Condições de Parada .....	25
2.11. Variações que aproximam derivadas .....	26
2.11.1. Diferenças Finitas .....	26
2.11.2. Interpolação Linear .....	27
3. Otimização de Treliza .....	28
3.1. Análise Elástica de uma Treliza .....	28
3.2. Definindo Variáveis de Projeto.....	34
4 Problemas teste .....	35
4.1. Trelizas de 10 Barras .....	35
4.2. Treliza de 72 Barras.....	35
4.3. Domos 52 Barras .....	37
5. Simulação de Ruído .....	40
6. Análise dos Resultados.....	41
7. Casos de ruído .....	42
8. Efeito do Ruído nos Gradientes.....	43
9. Outros Casos de Ruído .....	46

9.1.	Efeito do ruído na função objetivo e em seus gradientes .....	46
9.2.	Efeito do ruído somente nas restrições .....	47
9.3.	Efeito do ruído em tudo .....	52
9.4.	Conclusões.....	54
10.	Efeito do Ruído em Algoritmos Sem Derivadas .....	55
10.1.	Derivadas com Diferenças Finitas .....	55
10.1.1.	Valor de Referência - Treliza de 10 Barras .....	55
10.1.2.	Valor de Referência - Treliza de 72 Barras .....	55
10.1.3.	Valor de Referência - Domo de 52 Barras.....	56
10.2.	Ruído nas Restrições – Aproximação por Diferenças Finitas .....	57
10.2.1.	Treliza de 10 Barras.....	57
10.2.2.	Treliza de 72 Barras.....	58
10.2.3.	Domo de 52 Barras.....	59
10.3.	Ruído na Função Objetivo e nas Restrições – Aproximação por Diferenças Finitas.....	60
10.3.1.	Treliza de 10 Barras.....	60
10.3.2.	Treliza de 72 Barras.....	61
10.3.3.	Domo.....	62
10.4.	Ruído nas Restrições - Aproximação por Interpolação Linear .....	63
10.4.1.	Treliza de 10 Barras.....	63
10.4.2.	Treliza de 72 Barras.....	64
10.4.3.	Domo de 52 Barras.....	65
10.5.	Ruído na Função Objetivo e nas Restrições .....	66
10.5.1.	Treliza de 10 Barras.....	66
10.5.2.	Treliza de 72 Barras.....	67
10.5.3.	Domo.....	68
10.6.	Conclusões.....	69
11.	Conclusões Finais .....	70
12.	Referências.....	74
	Apêndice A – FAIPA Noise Analysis .....	75
	Apêndice B – Resultados obtidos para ruído nos gradientes .....	85
B.1.	Ruídos no gradiente das funções.....	85
B.1.1.	Treliza de 10 Barras.....	85
B.1.2.	Treliza de 72 Barras.....	86
B.1.3.	Domo de 52 barras.....	87

B.2. Ruídos no gradiente das restrições.....	88
B.2.1 Treliza de 10 Barras.....	88
B.2.2 Treliza de 72 Barras.....	89
B.2.3. Domo de 52 Barras.....	90
B.3. Ruídos nos gradientes da função e das restrições.....	91
B.3.1. Treliza de 10 Barras.....	91
B.3.2. Treliza de 72 Barras.....	92
B.3.3 Domo de 52 Barras.....	93
B.4. Removendo o critério de parada .....	94
B.5. Ruídos no gradiente da função - Algoritmo com novo critério de parada .....	94
B.5.1. Treliza de 10 barras.....	94
B.5.2. Treliza de 72 Barras.....	96
B.5.3 Domo de 52 barras.....	97
B.6. Ruído no gradiente das restrições - Algoritmo com novo critério de parada.....	99
B.6.1. Treliza de 10 Barras.....	99
B.6.2. Treliza de 72 Barras.....	100
B.6.3. Domo de 52 barras.....	101
B.7. Ruído no gradiente da função objetivo e restrições - Algoritmo com novo critério de parada .....	103
B.7.1. Treliza de 10 barras.....	103
B.7.2. Treliza de 72 barras.....	104
B.7.3. Domo de 52 barras.....	105
Apêndice C – Resultados Abrangendo Outros Casos de Ruído.....	106
C.1. Efeito do Ruído Somente na Função.....	106
C.1.1. Treliza de dez barras .....	106
C.1.2. Treliza de 72 barras.....	107
C.1.3. Domo de 52 barras.....	108
C.2. Ruído Somente nas Restrições.....	109
C.2.1. Treliza de 10 barras:.....	109
C.2.2. Treliza de 72 Barras.....	110
C.2.3. Domo de 52 barras:.....	111
C.4. Efeito do ruído na função objetivo e em seus gradientes .....	112
C.4.1. Treliza de 10 barras.....	112
C.4.2. Treliza de 72 barras.....	113

C.4.3. Domo.....	114
C.4. Ruído nas restrições e seus gradientes .....	115
C.4.1. Treliza de 10 barras.....	115
C.4.2. Treliza de 72 Barras.....	116
C.4.3. Domo de 52 barras.....	117
C.5. Ruído nas restrições e nos gradientes .....	118
C.5.1. Treliza de 10 Barras.....	118
C.5.2. Treliza de 72 Barras.....	119
C.5.3. Domo.....	120
C.6. Ruído em tudo.....	121
C.6.1. Treliza de dez barras .....	121
C.6.2. Treliza de 72 Barras.....	122
C.6.3. Domo de 52 Barras.....	123
C.7.Novo Critério de Parada.....	124
C.8. Ruído somente na função – Novo critério de parada .....	124
C.8.1. Treliza de 10 barras.....	124
C.8.2. Treliza de 72 barras.....	125
C.8.3. Domo de 52 barras.....	126
C.9. Efeito do ruído somente nas restrições - Novo critério de parada.....	127
C.9.1. Treliza de 10 barras.....	127
C.9.2. Treliza de 72 barras.....	128
C.9.3. Domo.....	129
C.10. Efeito do ruído na função objetivo e em seus gradientes - Novo critério de parada ..	130
C.10.1.Treliza de 10 barras.....	130
C.10.2. Treliza de 72 barras.....	131
C.10.3. Domo.....	132
C.11. Efeito do ruído nas restrições e seus gradientes - Novo critério de parada.....	133
C.11.1. Treliza de 10 barras.....	133
C.11.2. Treliza de 72 barras.....	134
C.11.3. Domo.....	135
C.12. Efeito do ruído nas restrições e em ambos os gradientes - Novo critério de parada..	136
C.12.1. Treliza de 10 barras.....	136
C.12.2. Treliza de 72 barras.....	137
C.12.3. Domo.....	138

C.13. Efeito do ruído em tudo .....	139
C.13.1. Treliza de 10 barras.....	139
C.13.2. Treliza de 72 barras.....	140
C.13.3. Domo.....	141
D.1. Ruído na Função Objetivo – Aproximação por Diferenças Finitas.....	142
D.1.1. Treliza de 10 Barras .....	142
D.1.2 Treliza de 72 Barras .....	143
D.1.3. Domo .....	144
D.2. Ruído na Função Objetivo - Aproximação por Interpolação Linear.....	145
D.2.1. Treliza de 10 Barras .....	145
D.2.2. Treliza de 72 Barras .....	146
D.2.3. Domo .....	147
Apêndice E – Funções em Matlab .....	148
E.1. Função Objetivo e Restrições .....	148
E.2. Gradientes .....	150



## Índice de Figuras

Figura 1 - Interpretação geométrica das condições KKT.....	18
Figura 2 - Interpretação geométrica do funcionamento do algoritmo FDIPA .....	21
Figura 3 - Interpretação geométrica do funcionamento do algoritmo FAIPA .....	22
Figura 4 - Busca de Armijo.....	25
Figura 5 - Configurações de Barras: (a) alinhada horizontalmente e (b) com alinhamento arbitrário .....	29
Figura 6 - Elongamento de um elemento isolado .....	30
Figura 7 - Diagrama de corpo livre para os nós e elementos: (a) sistema completo; (b) diagrama de corpo livre dos elementos; (c) diagrama de corpo livre dos nós .....	31
Figura 8 - Treliça de Dez Barras.....	35
Figura 9 - Treliça de 72 Barras.....	37
Figura 10 - Domo de 52 Barras Fonte: Henry Cortes .....	38
Figura 11 - Resultados do efeito do ruído nos gradientes para treliça de 72 barras.....	43
Figura 2 - Resultados do efeito do ruído nos gradientes para domo de 52 barras.....	44
Figura 13 - Resultados do efeito do ruído na função objetivo para treliça de dez barras para critério de parada original.....	46
Figura 14 - Resultados do efeito do ruído na função objetivo para treliça de dez barras para novo critério de parada.....	47
Figura 15 - Interpretação geométrica do ruído nas restrições .....	48
Figura 4 - Resultados do efeito do ruído nas restrições para treliça de dez barras com critério de parada original .....	48
Figura 17 - Resultados do efeito do ruído nas restrições para treliça de dez barras com o novo critério de parada.....	49
Figura 18 - Resultados do efeito do ruído nas restrições para treliça de 72 barras com o critério de parada original .....	50
Figura 19 - Resultados do efeito do ruído nas restrições para treliça de 72 barras com o novo critério de parada.....	51
Figura 20 - Resultados do efeito do ruído nas restrições para o domo de 52 barras com o critério de parada original.....	51
Figura 9 - Resultados do efeito do ruído nas restrições para o domo de 52 barras com o novo critério de parada.....	52
Figura 22 - Resultados do efeito do ruído em tudo para a treliça de dez barras com o critério de parada original .....	53
Figura 23 - Resultados do efeito do ruído em tudo para a treliça de 72 barras com o critério de parada original .....	53
Figura 12 - Interface do programa .....	75
Figura 13 - Definição de treliças.....	76
Figura 14 - Opções de treliça.....	76
Figura 15 - Botões para selecionar o algoritmo .....	77
Figura 16 - Caixas para selecionar os níveis de ruído.....	78
Figura 17 - Opções para ruído nas funções e restrições .....	79
Figura 18 - Opções para ruído nos gradientes .....	79
Figura 19 - Seleção do Critério de Parada .....	80
Figura 20 - Exemplo de arquivo .dat com a posição dos nós da treliça .....	82

Figura 21 - Exemplo de Matriz de Incidência .....	83
Figura 22 - Janela que permite inserir os deslocamentos prescritos.....	83
Figura 23 - Matriz com os Deslocamentos Prescritos .....	84
Figura 24 - Janela que permite inserir as forças .....	84

## Índice de Tabelas

Tabela 1 - Variáveis de projeto da treliça de 72 barras.....	36
Tabela 2 - Forças aplicadas a treliça de 72 barras.....	37
Tabela 3 - Variáveis de projeto para o domo de 52 barras.....	39
Tabela 4 - Forças aplicadas ao domo de 52 barras .....	39
Tabela 5 - Problemas teste.....	39
Tabela 6 - Casos de Ruído .....	42
Tabela 70 - Valores de referência para a treliça de 10 barras .....	55
Tabela 71 - Valores de referência para a treliça de 72 barras .....	55
Tabela 72 - Valores de referência para o domo de 52 barras.....	56
Tabela 76 - Ruído nas restrições para treliça de dez barras com gradiente aproximado por diferenças finitas .....	57
Tabela 77 - Ruído nas restrições para treliça de 72 barras com gradiente aproximado por diferenças finitas .....	58
Tabela 78 - Ruído nas restrições para domo de 52 barras com gradiente aproximado por diferenças finitas .....	59
Tabela 79 - Ruído na função objetivo e nas restrições para treliça de dez barras com gradiente aproximado por diferenças finitas .....	60
Tabela 80 - Ruído na função objetivo e nas restrições para treliça de 72 barras com gradiente aproximado por diferenças finitas .....	61
Tabela 81 - Ruído na função objetivo e nas restrições para domo de 52 barras com gradiente aproximado por diferenças finitas .....	62
Tabela 85 - Ruído nas restrições para treliça de dez barras com gradiente aproximado por interpolação linear .....	63
Tabela 86 - Ruído nas restrições para treliça de 72 barras com gradiente aproximado por interpolação linear .....	64
Tabela 87 - Ruído nas restrições para o domo de 52 barras com gradiente aproximado por interpolação linear .....	65
Tabela 88 - Ruído na função objetivo e nas restrições para treliça de dez barras com gradiente aproximado por interpolação linear .....	66
Tabela 89 - Ruído na função objetivo e nas restrições para treliça de 72 barras com gradiente aproximado por interpolação linear .....	67
Tabela 90 - Ruído na função objetivo e nas restrições para domo de 52 barras com gradiente aproximado por interpolação linear .....	68
Tabela 91- Critérios de Parada .....	80
Tabela 93 - Tela para inserir informações sobre uma treliça qualquer .....	81
Tabela 7 - Ruído no gradiente da função objetivo para a treliça de 10 barras e critério de parada original .....	85
Tabela 8 - Ruído no gradiente da função objetivo para a treliça de 72 barras e critério de parada original .....	86
Tabela 9 - Ruído no gradiente da função objetivo para o domo e critério de parada original... ..	87
Tabela 10 - Ruído no gradiente das restrições para a treliça de 10 barras e critério de parada original.....	88
Tabela 11 - Ruído no gradiente das restrições para a treliça de 72 barras e critério de parada original.....	89

Tabela 12 - Ruído no gradiente das restrições para o domo barras e critério de parada original .....	90
Tabela 13 - Ruído no gradiente das restrições e da função objetivo para a treliça de 10 barras e critério de parada original.....	91
Tabela 14 - Ruído no gradiente das restrições e da função objetivo para a treliça de 72 barras e critério de parada original.....	92
Tabela 15 - Ruído no gradiente das restrições e da função objetivo para o domo e critério de parada original .....	93
Tabela 16 - Ruído no gradiente da função objetivo para a treliça de 10 barras e novo critério de parada .....	94
Tabela 17 - Média do máximo valor das restrições .....	95
Tabela 18 - Ruído no gradiente da função objetivo para a treliça de 72 barras e novo critério de parada .....	96
Tabela 19 - Média do valor máximo das restrições para a treliça de 72 barras .....	96
Tabela 20 - Ruído no gradiente da função objetivo para o domo e novo critério de parada.....	97
Tabela 21 - Média do valor máximo das restrições para a treliça de 72 barras .....	98
Tabela 22 - Ruído no gradiente das restrições para a treliça de 10 barras e novo critério de parada .....	99
Tabela 23 - Média do valor máximo das restrições para a treliça de 10 barras .....	100
Tabela 24 - Ruído no gradiente das restrições para a treliça de 72 barras e novo critério de parada .....	100
Tabela 25- Média do valor máximo das restrições para a treliça de 72 barras .....	101
Tabela 26 - Ruído no gradiente das restrições para o domo e novo critério de parada .....	101
Tabela 27 - Média do valor máximo das restrições para o domo.....	102
Tabela 28 - Ruído no gradiente da função objetivo e das restrições para a treliça de 10 barras e novo critério de parada.....	103
Tabela 29 - Média do valor máximo das restrições para a treliça de 10 barras .....	103
Tabela 30 - Ruído no gradiente da função objetivo e das restrições para a treliça de 72 barras e novo critério de parada.....	104
Tabela 31 - Média do valor máximo das restrições para a treliça de 72 barras .....	104
Tabela 32- Ruído no gradiente da função objetivo e das restrições para o domo e novo critério de parada .....	105
Tabela 33 - Média do valor máximo das restrições para o domo.....	105
Tabela 34 - Ruído somente na função objetivo para treliça de dez barras .....	106
Tabela 35 - Ruído somente na função objetivo para treliça de 72 barras.....	107
Tabela 36 - Ruído somente na função objetivo para o domo de 52 barras.....	108
Tabela 37 - Ruído somente nas restrições para treliça de dez barras .....	109
Tabela 38 - Ruído somente nas restrições para treliça de 72 barras.....	110
Tabela 39 - Ruído somente nas restrições para o domo de 52 barras.....	111
Tabela 40 - Ruído na função objetivo e em seus gradientes para treliça de dez barras.....	112
Tabela 41 - Ruído na função objetivo e em seus gradientes para treliça de 72 barras .....	113
Tabela 42 - Ruído na função objetivo e em seus gradientes para o domo de 52 barras.....	114
Tabela 43 - Ruído nas restrições e em seus gradientes para treliça de dez barras .....	115
Tabela 44 - Ruído nas restrições e em seus gradientes para treliça de 72 barras.....	116
Tabela 45 - Ruído nas restrições e em seus gradientes para o domo de 52 barras.....	117

Tabela 46 - Ruído nas restrições e em ambos os gradientes para treliça de dez barras .....	118
Tabela 47 - Ruído nas restrições e em ambos os gradientes para treliça de 72 barras.....	119
Tabela 48 - Ruído nas restrições e em ambos os gradientes para o domo de 52 barras .....	120
Tabela 49 - Ruído em tudo para treliça de dez barras .....	121
Tabela 50 - Ruído em tudo para treliça de 72 barras.....	122
Tabela 51 - Ruído em tudo para o domo de 52 barras .....	123
Tabela 52 - Ruído na função objetivo para treliça de dez barras usando o novo critério de parada .....	124
Tabela 53 - Ruído na função objetivo para treliça de 72 barras usando o novo critério de parada .....	125
Tabela 54 - Ruído na função objetivo para treliça de 72 barras usando o novo critério de parada .....	126
Tabela 55 - Ruído somente nas restrições para treliça de dez barras usando o novo critério de parada .....	127
Tabela 56 - Ruído somente nas restrições para treliça de 72 barras usando o novo critério de parada .....	128
Tabela 57 - Ruído somente nas restrições para o domo de 52 barras usando o novo critério de parada .....	129
Tabela 58 - Ruído na função objetivo e em seus gradientes para treliça de dez barras usando o novo critério de parada.....	130
Tabela 59 - Ruído na função objetivo e em seus gradientes para treliça de 72 barras usando o novo critério de parada.....	131
Tabela 60 - Ruído na função objetivo e em seus gradientes para domo de 52 barras usando o novo critério de parada.....	132
Tabela 61 - Ruído nas restrições e em seus gradientes para treliça de dez barras usando o novo critério de parada.....	133
Tabela 62 - Ruído nas restrições e em seus gradientes para treliça de 72 barras usando o novo critério de parada.....	134
Tabela 63 - Ruído nas restrições e em seus gradientes para o domo de 52 barras usando o novo critério de parada.....	135
Tabela 64 - Ruído nas restrições e em ambos os gradientes para treliça de dez barras usando o novo critério de parada.....	136
Tabela 65 - Ruído nas restrições e em ambos os gradientes para treliça de 72 barras usando o novo critério de parada.....	137
Tabela 66 - Ruído nas restrições e em ambos os gradientes para o domo de 52 barras usando o novo critério de parada.....	138
Tabela 67 - Ruído em tudo para treliça de dez barras usando o novo critério de parada.....	139
Tabela 68 - Ruído em tudo para treliça de 72 barras usando o novo critério de parada .....	140
Tabela 69 - Ruído em tudo para o domo de 52 barras usando o novo critério de parada.....	141
Tabela 73 - Ruído na função objetivo para treliça de dez barras com gradiente aproximado por diferenças finitas .....	142
Tabela 74 - Ruído na função objetivo para treliça de 72 barras com gradiente aproximado por diferenças finitas .....	143
Tabela 75 - Ruído na função objetivo para o domo de 52 barras com gradiente aproximado por diferenças finitas .....	144

Tabela 82 - Ruído na função objetivo para treliça de dez barras com gradiente aproximado por interpolação linear .....	145
Tabela 83 - Ruído na função objetivo para treliça de 72 barras com gradiente aproximado por interpolação linear .....	146
Tabela 84 - Ruído na função objetivo para o domo de 52 barras com gradiente aproximado por interpolação linear .....	147

## 1. Introdução

A solução de problemas de otimização tem vasta aplicação nas ciências da Engenharia e da Matemática. Muitos das soluções relacionadas a planejamento energético, problemas inversos e projetos de Engenharia em geral necessitam são encontradas resolvendo esses problemas. Problemas dessa natureza, no entanto, raramente apresentam solução analítica, sua resolução exige o uso de técnicas numéricas e muitas vezes de grande capacidade computacional.

Ao contrário do que a intuição poderia indicar, o rápido desenvolvimento da capacidade de processamento dos computadores não tem eliminado a necessidade de pesquisa e desenvolvimento na área. Problemas que antigamente não podiam ser resolvidos, devido ao seu alto custo computacional, agora podem ser resolvidos em clusters de computadores. [5]

Entre as técnicas que se beneficiam desse grande desenvolvimento tecnológico, estão os métodos de otimização que não exigem derivadas, como os heurísticos, ou que permitem aproximação da derivada.

A resolução de problemas de otimização complexos, como otimização de forma aplicada a mecânica dos fluidos, em que escoamentos instáveis levam à otimização de uma equação de estado dependente do tempo [6], ou grandes blocos de otimização multidisciplinar, que exigem a avaliação de funções complexas, são outro exemplo de benefício trazido por esse desenvolvimento.

Entre essas aplicações, muitas envolvem problemas mal condicionados, em que a precisão do resultado final fica comprometida devido a problemas na discretização ou a imprecisões numéricas [6]. Elevar a precisão da discretização, nesse caso, significa se sujeitar a maiores imprecisões numéricas.

O objetivo do presente trabalho é estudar o impacto do ruído proveniente de imprecisões numéricas em um algoritmo de otimização de ponto interior, particularmente FAIPA (Feasible Arc Interior Point Algorithm) e FDIPA (Feasible Directions Interior Point Algorithm), bem como em variações que permitem seu uso sem derivadas analíticas.

O efeito do ruído no algoritmo é estudado a partir de problemas testes que consistem na otimização de treliças. Foi criado um programa em MATLAB® que permite a análise de treliças, calculando a tensão em cada barra e o deslocamento em cada nó. Parte desse programa se dedica a calcular analiticamente as derivadas para o peso da treliça, o deslocamento dos nós e a tensão nas barras como função das

áreas transversais das barras. O programa também permite que ruído seja adicionado de forma controlada a funções, gradientes ou restrições, de forma que seu efeito possa ser medido.

Procurou-se, ao escolher os casos analisados, por um lado, isolar o efeito do ruído em cada componente do algoritmo e por outro, simular o impacto do ruído em problemas reais. Atenção foi dada a variações dos algoritmos que dispensam derivadas exatas.

Em um esforço para melhorar o resultado, sem dar muita importância a possíveis aumentos no custo computacional, foi proposto um critério de parada diferente do que trazem o FAIPA e FDIPA por padrão. Esse novo critério, mais “frouxo” que o padrão, nos dá uma idéia de quanto pode custar melhorar os resultados e também nos ajuda a mensurar a importância do critério de parada no resultado final alcançado pelo algoritmo.

Primeiramente são analisados os casos em que há ruído somente nos gradientes. Situação freqüentemente encontrada quando os gradientes são calculados com derivação automática [6]. As três possibilidades de combinação possível foram analisadas, de forma que estão expostos resultados para ruído no gradiente da função objetivo, das restrições, e da combinação dos dois. Os resultados podem ser vistos no Capítulo 8 e no apêndice B.

Os resultados apresentados no Capítulo 9 e no Apêndice C servem para entender o efeito isolado do ruído em cada componente do algoritmo, bem como combinações entre eles. Apesar disso, alguns dos casos analisados são bastante realistas, e nos permitem uma previsão do que podemos obter ao otimizar problemas práticos. Esse bloco também traz experimentos em que foi utilizado um critério de parada diferente do original.

No terceiro bloco de resultados, são analisados os efeitos do ruído quando aproximações dos gradientes por diferenças finitas e interpolação linear são usadas. O objetivo é descobrir o quanto as imprecisões inerentes às aproximações são agravadas quando adicionamos ruído aleatório ao problema. Os resultados estão expostos no Capítulo 10 e no Apêndice D



## 2. Algoritmos Utilizados

### 2.1. Problema de otimização não linear

Um problema de otimização consiste encontrar o argumento de uma determinada função que torna seu valor o menor possível sem que algumas restrições preestabelecidas sejam violadas. Matematicamente o problema pode ser formulado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \\ \text{sujeito a } g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (2.1)$$

A formulação (2.1) tem a seguinte interpretação:

Para uma região viável

$$\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1, \dots, m\} \quad (2.2)$$

procure o vetor  $\mathbf{x}^*$  tal que  $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$  para todo

$$\mathbf{x} \in \Omega \quad (2.3)$$

O vetor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de variáveis do problema, ou variáveis de projeto,  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é a função custo ou função objetivo. As funções  $g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  são denominadas funções de restrição de desigualdade. As funções  $f$  e  $g_i$  devem ser Lipschitz contínuas [3].

Um ponto  $\mathbf{x}^*$  que verifica a condição (2.3) é denominado mínimo global do problema (2.1). Infelizmente essa condição não é fácil de verificar em geral. O mínimo global do problema somente pode ser caracterizado em situações especiais, por exemplo, quando as funções  $f$  e  $g_i$  são convexas.

São raros os casos em que uma abordagem analítica pode resolver esse tipo de problema [1] por isso, em geral, são utilizados métodos numéricos.

Vejamos algumas definições matemáticas que nos permitem desenvolver esses métodos numéricos [1].

Definição 1. Dado um ponto  $\mathbf{x} \in \Omega$ , o conjunto de restrições de desigualdade ativas é:  $A(\mathbf{x}) = \{i: 1 \leq i \leq m, g_i(\mathbf{x}) = 0\}$ .

Definição 2.  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$  é uma direção de descida para uma função suave  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se  $\mathbf{d}^T \nabla \varphi < 0$

Definição 3:  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$  é uma direção viável para o problema (2.1) em  $\mathbf{x} \in \Omega$  se para um  $\theta > 0$  nós temos  $\mathbf{x} + t \mathbf{d} \in \Omega$  para todo  $t \in [0, \theta]$

Definição 4: um campo vetorial  $\mathbf{d}(\mathbf{x})$  definido em  $\Omega$  é dito um campo de direções uniformemente viáveis do problema (2.1) se existe um passo  $\tau > 0$  tal que  $\mathbf{x} + t \mathbf{d}(\mathbf{x}) \in \Omega$  para todo  $t \in [0, \tau]$  e para todo  $\mathbf{x} \in \Omega$ .

Definição 5. Dado um ponto  $\mathbf{x} \in \Omega$ , a condição de regularidade é satisfeita em  $\mathbf{x}$  se os gradientes das restrições ativas são linearmente independentes, ou seja, se o conjunto  $\{\mathbf{d}: \nabla g_i^T(\mathbf{x})\mathbf{d} = 0 \forall i \in A(\mathbf{x})\}$  é linearmente independente. Para estes pontos, o espaço tangente se expressa como:

$$T(\mathbf{x}^*) = \{\mathbf{d}: \nabla g_i^T(\mathbf{x})\mathbf{d} = 0 \forall i \in A(\mathbf{x})\} \quad (2.4)$$

## 2.2. Condições de Otimalidade

Não sendo sempre possível encontrar um mínimo global, vejamos as condições necessárias para garantir que o mínimo seja local.

Condições necessárias de otimalidade: Se  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$  é um mínimo local e ponto regular das restrições do problema (2.1), então existe um único vetor  $\boldsymbol{\lambda}^* \in \mathbb{R}^m$  tal que:

$$\nabla f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \nabla g_i(\mathbf{x})\lambda_i = 0 \quad (2.5)$$

$$g_i(\mathbf{x})\lambda_i = 0 \quad (2.6)$$

$$g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (2.7)$$

$$\lambda_i \geq 0 \quad (2.8)$$

As condições (2.5) a (2.8) são chamadas condições necessárias de primeira ordem de Karush-Kuhn-Tucker (KKT). O escalar  $\lambda_i$ , que garante a igualdade (2.5), é chamado de multiplicador de Lagrange. O ponto  $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$  que verificar estas condições será chamado de ponto de KKT.

A Figura 1 mostra uma interpretação geométrica dessas condições.

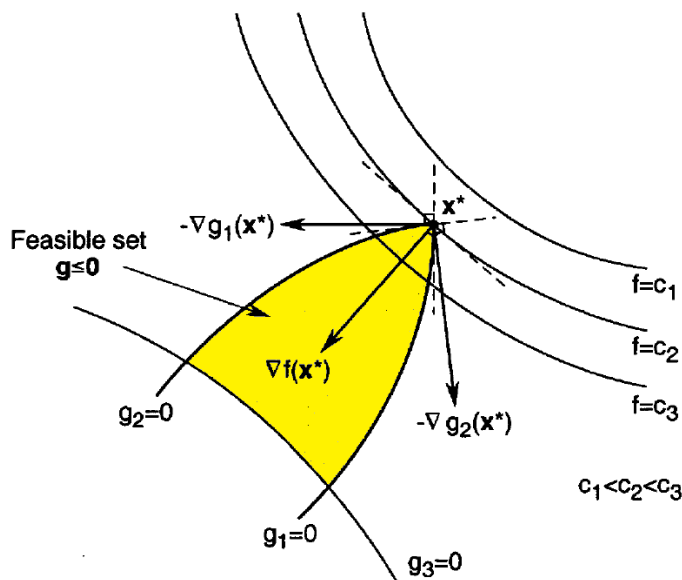


Figura 1 - Interpretação geométrica das condições KKT

Fonte: Edwin K. P. Chong

Como é possível observar, em um ponto KKT o gradiente da função é colinear à resultante do gradiente das restrições.

### 2.3. Condições suficientes de otimalidade

Seja  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$  um ponto de KKT e seja  $\boldsymbol{\lambda}^* \in \mathbb{R}^m$  o vetor de multiplicadores de Lagrange correspondente. Seja  $\mathbf{H}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$  tal que satisfaz:

$$\mathbf{d}^T \mathbf{H}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \mathbf{d} > 0 \quad \forall \mathbf{d} \in T(\mathbf{x}^*) \quad (2.9)$$

Onde  $\mathbf{H}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$  é o Hessiano de  $f(\mathbf{x})$  e  $T(\mathbf{x}^*)$  é o espaço tangente, definido por  $T(\mathbf{x}^*) = \{\mathbf{d}: \nabla g_i^T(\mathbf{x}) \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad \forall i \in [1, m]\}$ , então  $\mathbf{x}^*$  é um mínimo local estrito do problema (2.1).

### 2.4. Algoritmo de Newton

O método desenvolvido por Newton para resolver sistemas não lineares pode ser aplicado para resolver as equações (2.5) a (2.8) [2]. Em sua fórmula mais simples, o método resolve o sistema dado pelas equações supracitadas resolvendo uma forma linearizada recursivamente. Isto é, dados um par de vetores  $\mathbf{x}_k$  e  $\boldsymbol{\lambda}_k$ , o novo ponto  $\mathbf{x}_{k+1}$  e  $\boldsymbol{\lambda}_{k+1}$  é determinado pelas equações:

$$\nabla l(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\lambda}_k)^T + \mathbf{H}(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\lambda}_k) \mathbf{d}_k + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{y}_k = \mathbf{0} \quad (2.10)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_k) + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}_k) \mathbf{d}_k = \mathbf{0} \quad (2.11)$$

Fazendo  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{d}_k$  e  $\boldsymbol{\lambda}_{k+1} = \boldsymbol{\lambda}_k + \mathbf{y}_k$ . Arrumando em forma matricial temos:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}(\mathbf{x}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}) & \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)})^T \\ \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_k \\ \boldsymbol{\lambda}_k \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla l(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\lambda}_k)^T \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}_k) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Adicionando  $\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}_k)^T \boldsymbol{\lambda}_k$  à parte superior da equação o sistema passa a ter a forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}(\mathbf{x}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}) & \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)})^T \\ \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_k \\ \boldsymbol{\lambda}_{k+1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla f(\mathbf{x})^T \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}_k) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Onde  $\boldsymbol{\lambda}_{k+1} = \boldsymbol{\lambda}_k + \mathbf{y}_k$ . Nesse formato,  $\boldsymbol{\lambda}_k$  aparece somente em  $\mathbf{L}(\mathbf{x}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)})$ .

### 2.5. Algoritmos FDIPA e FAIPA

Os algoritmos FDIPA (Feasible Directions Interior Point Algorithm) e FAIPA (Feasible Arc Interior Point Algorithm) são algoritmos para otimização não linear de problemas com restrições. Eles são algoritmos de ponto interior baseados em uma iteração tipo Newton [1][3] e usam um método iterativo para resolver o problema (2.1). A partir de um ponto inicial  $\mathbf{x}^0$  pertencente à região viável  $\Omega$ , os algoritmos geram uma seqüência de pontos  $\{\mathbf{x}^k\}$  totalmente contida em  $\Omega$  e que converge a um ponto KKT.

A iteração do algoritmo é dada pela regra  $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + t^k \mathbf{d}$  onde  $\mathbf{x}^{(k)}$  é o ponto da iteração atual,  $\mathbf{d}$  é a direção de busca e  $t^k$  é o passo da iteração atual definido por um procedimento chamado busca linear. A direção de busca dos algoritmos é obtida pela resolução do sistema:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}(x^{(k)}, \lambda^{(k)}) & \nabla g(x^{(k)}) \\ \mathbf{\Lambda}^{(k)} \nabla g(x^{(k)})^T & G(x^{(k)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ \lambda^{(k+1)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla f(x^{(k)}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Em que  $G(x^{(k)})$  é o valor das restrições,  $\nabla g(x^{(k)})$  é o gradiente das restrições,  $\mathbf{\Lambda}^{(k)}$  é uma matriz cuja diagonal principal é composta pelos multiplicadores de Lagrange,  $\nabla f(x^{(k)})$  é o gradiente da função custo,  $d$  é a direção de busca e  $\mathbf{H}(x^{(k)}, \lambda^{(k)})$  é o Hessiano da função custo.

Como calcular o hessiano pode ser muito trabalhoso [5], uma aproximação proposta por Broyden, Fletcher, Goldfarb e Shanno é utilizada [2][4].

Assim,

$$\mathbf{H}(x^{(k)}, \lambda^{(k)}) \approx \mathbf{B}^{(k)} = \mathbf{B}^{(k-1)} + \frac{q^{(k-1)} q^{(k-1)T}}{q^{(k-1)T} p^{(k-1)}} - \frac{\mathbf{B}^{(k-1)} p^{(k-1)} p^{(k-1)T} \mathbf{B}^{(k-1)}}{p^{(k-1)T} \mathbf{B}^{(k-1)} p^{(k-1)}} \quad (2.15)$$

Onde

$$q^{(k-1)} = \nabla f(x^{(k)}) - \nabla f(x^{(k-1)}) \quad (2.16)$$

$$p^{(k-1)} = x^{(k)} - x^{(k-1)} \quad (2.17)$$

O cálculo dos gradientes pode ser feita de forma analítica, se a função permitir, ou aproximado.

Como pode ser visto em [3], a direção de Newton pode não ser uniformemente viável para a região  $\Omega$  nem de descida para a função  $f(x)$ .

## 2.6. Pseudo Código para o algoritmo FDIPA

**Parâmetros:**  $\alpha \in (0,1), \eta \in (0,1), \varphi > 0, v \in (0,1)$ .

**Dados:**  $x^{(0)} \in \Omega, \lambda^{(0)} \in \mathbb{R}^m$  positivo,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simétrica e definida positiva.

**Passo 1:** Verificar se  $d_0$  é menor que uma tolerância predeterminada. Caso seja, parar a execução do algoritmo. Caso contrário, continuar.

**Passo 2:** Cálculo da direção de busca:

**Passo 2a:** Calcule  $(d_0, \lambda_0)$  e  $(d_1, \lambda_1)$  como solução do sistema:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}^{(k)} & \nabla g(x^{(k)}) \\ \mathbf{\Lambda}^{(k)} \nabla g(x^{(k)})^T & G(x^{(k)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 & d_1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla f(x^{(k)}) & 0 \\ 0 & \lambda^{(k)} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

**Passo 2b:** Se  $d_1^T \nabla f(x^{(k)}) > 0$ , faça

$$\rho = \min \left\{ \varphi \|d_0\|^2, (\alpha - 1) \frac{d_0^T \nabla f(x^{(k)})}{d_1^T \nabla f(x^{(k)})} \right\} \quad (2.19)$$

Caso contrário, faça  $\rho = \varphi \|d_0\|^2$

**Passe 2c:** Calcule a direção de busca  $\mathbf{d}$  e o vetor  $\bar{\lambda}$ :

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 + \rho \mathbf{d}_1 \quad (2.20)$$

$$(2.21)$$

$$\bar{\lambda} = \lambda_0 + \rho \lambda_1$$

**Passo 3:** Busca linear: Achar um passo  $t^k$  como o primeiro numero da seqüência  $\{1, v, v^2, \dots\}$  que satisfaz:

$$f(x^{(k)} + t^k \mathbf{d}) \leq f(x^{(k)}) + t^k \eta \nabla f(x^{(k)}) \mathbf{d} \quad (2.22)$$

$$g(x^{(k)} + t^k \mathbf{d}) < 0 \text{ se } \lambda_i \geq 0, \text{ ou} \quad (2.23)$$

$$g(x^{(k)} + t^k \mathbf{d}) \leq g(x^{(k)}) \text{ se } \lambda_i < 0, i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (2.24)$$

**Passo 4:** Atualização.

**Passo 4a:** Obtenha o novo ponto como  $x^{(k+1)} = x^{(k)} + t^k \mathbf{d}$ , e defina novos valores  $\lambda^{(k+1)} > 0$ , e  $B^{(k+1)}$  definida positiva.

**Passo 4b:** Retorne ao Passo 1.

Uma interpretação geométrica pode ser vista na Figura 2 para um ponto qualquer próximo à restrição. Mesmo que a primeira direção de descida obtida não seja viável, ainda assim é possível continuar a busca, uma vez que a segunda direção encontrada aponta para dentro da região viável.

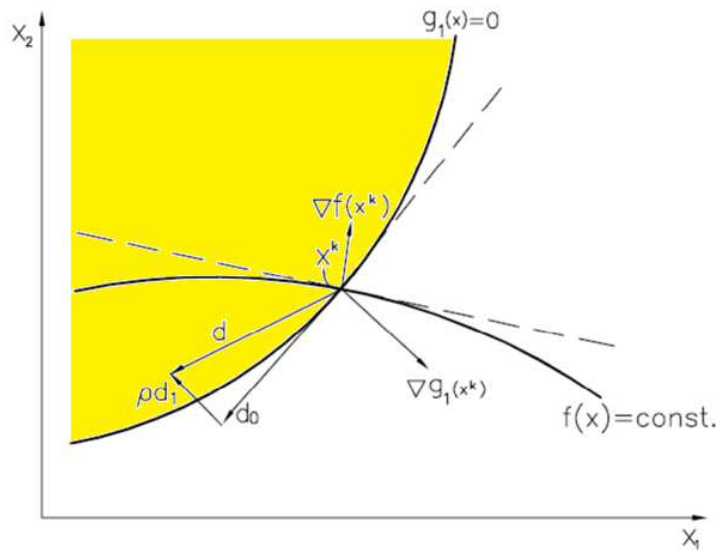


Figura 2 - Interpretação geométrica do funcionamento do algoritmo FDIPA  
Herskovits

Fonte: Jose

## 2.7. Pseudo-Código para o algoritmo FAIPA

**Parâmetros:**  $\alpha \in (0,1), \eta \in (0,1), \varphi > 0, v \in (0,1)$ .

**Dados:**  $x^{(0)} \in \Omega, \lambda^{(0)} \in \mathbb{R}^m$  positivo,  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simétrica e definida positiva.

**Passo 1:** Verificar se  $d_0$  é menor que uma tolerância predeterminada. Caso seja, parar a execução do algoritmo. Caso contrário, continuar.

**Passo 2:** Cálculo da direção de busca:

**Passo 2a:** Calcule  $(d_0, \lambda_0)$  e  $(d_1, \lambda_1)$  como solução do sistema:

$$\begin{bmatrix} B^{(k)} & \nabla g(x^{(k)}) \\ \Lambda^{(k)} \nabla g(x^{(k)})^T & G(x^{(k)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 & d_1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla f(x^{(k)}) & 0 \\ 0 & \lambda^{(k)} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

**Passo 2b:** Se  $d_1^T \nabla f(x^{(k)}) > 0$ , faça

$$\rho = \min \left\{ \varphi \|d_0\|^2, (\alpha - 1) \frac{d_0^T \nabla f(x^{(k)})}{d_1^T \nabla f(x^{(k)})} \right\} \quad (2.26)$$

Caso contrário, faça  $\rho = \varphi \|d_0\|^2$

**Passe 2c:** Calcule a direção de busca  $\mathbf{d}$  e o vetor  $\bar{\lambda}$ :

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 + \rho \mathbf{d}_1 \quad (2.27)$$

$$\bar{\lambda} = \lambda_0 + \rho \lambda_1 \quad (2.28)$$

**Passo 3:** Busca curvilínea:

**Passo 3a:** Calcular

$$\tilde{\omega}^i = g_i(x^{(k)} + \mathbf{d}) - g_i(x^{(k)}) - \nabla g_i^T(x^{(k)}) \mathbf{d}; i = 1, 2, 3, \dots, m$$

**Passo 3b:** Achar o vetor  $(\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\lambda})$  do sistema linear

$$\begin{bmatrix} B^{(k)} & \nabla g(x^{(k)}) \\ \Lambda^{(k)} \nabla g(x^{(k)})^T & G(x^{(k)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{d}} \\ \tilde{\lambda} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ \Lambda \tilde{\omega} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

**Passo 3c:** Achar um passo  $t^k$  como o primeiro numero da seqüência  $\{1, v, v^2, \dots\}$  que satisfaz:

$$f(x^{(k)} + t \mathbf{d} + t^2 \tilde{\mathbf{d}}) \leq f(x^{(k)}) + t^k \eta \nabla f(x^{(k)}) \mathbf{d} \quad (2.30)$$

$$g(x^{(k)} + t \mathbf{d} + t^2 \tilde{\mathbf{d}}) < 0 \text{ se } \lambda_i \geq 0, \text{ ou} \quad (2.31)$$

$$g(x^{(k)} + t \mathbf{d} + t^2 \tilde{\mathbf{d}}) \leq g(x^{(k)}) \text{ se } \lambda_i < 0, i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (2.32)$$

**Passo 4:** Atualização.

**Passo 4a:** Obtenha o novo ponto como  $x^{(k+1)} = x^{(k)} + t \mathbf{d} + t^2 \tilde{\mathbf{d}}$ , e defina novos valores  $\lambda^{(k+1)} > 0$ , e  $B^{(k+1)}$  definida positiva.

**Passo 4b:** Retorne ao passo 1.

Uma interpretação geométrica do algoritmo FAIPA pode ser visto na Figura 3. Nela se pode notar que mesmo a direção  $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 + \rho \mathbf{d}_1$  pode ser inviável que a viabilidade da direção de descida poderá ser encontrada.

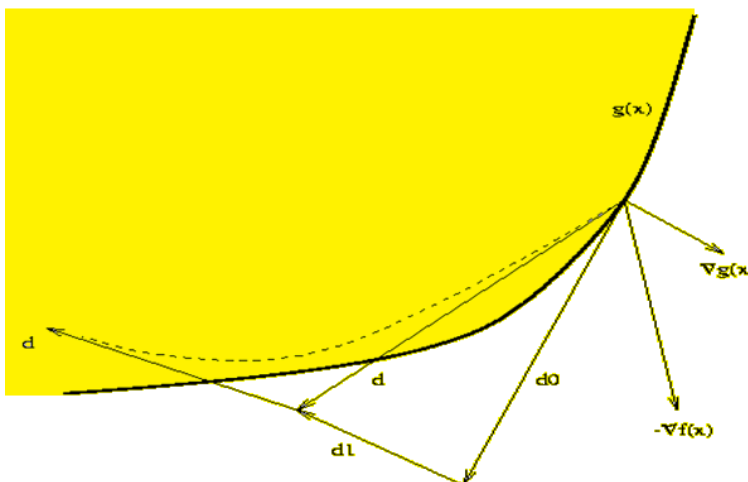


Figura 3 - Interpretação geométrica do funcionamento do algoritmo FAIPA

Fonte: Jose Herskovits

## 2.8. Funcionamento do algoritmo na presença de ruído.

Vejamos como ficaria o código do algoritmo sob influência de ruído em todos os componentes, função, restrições e gradientes.

### Passo 2<sup>a</sup>:

Para calcular a direção de busca teremos, para a primeira iteração

$$\begin{bmatrix} B^{(1)} & \nabla g(x^{(1)}) + \epsilon_{\nabla g^{(1)}} \\ \Lambda^{(1)} (\nabla g(x^{(1)})^T + \epsilon_{\nabla g^{(1)}}) & G(x^{(1)}) + \epsilon_{G^1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 & d_1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla f(x^{(1)}) + \epsilon_{\nabla f^{(1)}} & 0 \\ 0 & \lambda^{(1)} \end{bmatrix}$$

Onde  $\epsilon_i$  é o erro associado a cada componente. Esses erros tem magnitudes diferentes e  $\epsilon_{B^{(k-1)}}$  e  $\epsilon_{\lambda^{(k-1)}}$  dependem da combinação de mais de um erro. Quando o erro está associado a um vetor, o erro é também um vetor, com componentes linearmente independentes. Uma vez que o sistema é resolvido teremos um erro associado a  $d_0$ ,  $d_1$ ,  $\lambda_0$  e  $\lambda_1$ .

### Passo 2b:

Determinamos a curvatura  $\rho$  fazendo

Se  $(d_1^T + \epsilon_{d_1}) \nabla f(x^{(1)} + \epsilon_{\nabla f^{(1)}}) > 0$ , faça

$$\rho = \min \left\{ \varphi \|d_0 + \epsilon_{d_0}\|^2, (\alpha - 1) \frac{(d_0^T + \epsilon_{d_0})(\nabla f(x^{(1)} + \epsilon_{\nabla f^{(1)}}))}{(d_1^T)(\nabla f(x^{(1)} + \epsilon_{\nabla f^{(1)}}))} \right\} \quad (2.16)$$

Caso contrário, fazemos  $\rho = \varphi \|d_0 + \epsilon_{d_0}\|^2$

Como é possível notar, o cálculo de  $\rho$  também é afetado pelo ruído.

**Passe 2c:** A direção de busca  $\mathbf{d}$  e o vetor  $\bar{\lambda}$  serão:

$$\mathbf{d} + \epsilon_d = (\mathbf{d}_0 + \epsilon_{d_0}) + (\rho + \epsilon_\rho)(\mathbf{d}_1 + \epsilon_{d_1}) \quad (2.17)$$

$$\bar{\lambda} + \epsilon_{\bar{\lambda}} = (\lambda_0 + \epsilon_{\lambda_0}) + (\rho + \epsilon_\rho)(\lambda_1 + \epsilon_{\lambda_1}) \quad (2.18)$$

**Passo 3:** Busca linear: Devemos achar um passo  $t^k$  como o primeiro numero da seqüência  $\{1, \nu, \nu^2, \dots\}$  que satisfaz:

$$f(x^{(1)} + t^k(\mathbf{d} + \epsilon_d)) + \epsilon_{f(x^{(1)} + t^k(\mathbf{d} + \epsilon_d))} \quad (2.19)$$

$$\leq (f(x^{(1)}) + \epsilon_{f(x^{(1)})}) + t^k \eta (\nabla f(x^{(1)}) + \epsilon_{\nabla f(x^{(1)})}) (\mathbf{d} + \epsilon_d)$$

$$g(x^{(1)} + t^k(\mathbf{d} + \epsilon_d)) + \epsilon_{g(x^{(1)} + t^k(\mathbf{d} + \epsilon_d))} < 0 \text{ se } \lambda_i + \epsilon_{\lambda_i} \geq 0, \text{ ou} \quad (2.20)$$

$$g(x^{(1)} + t^k(\mathbf{d} + \epsilon_d)) + \epsilon_{g(x^{(1)} + t^k(\mathbf{d} + \epsilon_d))} \leq g(x^{(1)}) + \epsilon_{g(x^{(1)})} \text{ se } \lambda_i + \epsilon_{\lambda_i} < 0,$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, m$$

Nesse caso, o ruído em  $f(x^{(1)})$  e  $g(x^{(k)})$  é fixo, e em  $f(x^{(1)} + t^k(\mathbf{d} + \epsilon_d))$  e  $g(x^{(1)} + t^k(\mathbf{d} + \epsilon_d))$  calculado a cada iteração da busca linear. Toda vez que a função é

calculada para um passo  $t^k$ , seu valor é afetado pela presença de ruído, não só no argumento, mas também na própria função.

**Passo 4:** Quando o ponto da iteração for atualizado, o erro acumulado fará com que o ponto da iteração seguinte seja um pouco diferente do que seria caso não houvesse ruído. Podemos considerar que

$$x^{(2)} = x^{(1)} + t^k(\mathbf{d} + \epsilon_d) \quad (2.21)$$

Quando os valores de  $B$  e  $\lambda$  forem atualizados, teremos para as próximas iterações um sistema com a forma

$$\begin{bmatrix} B^{(k)} + \epsilon_{B^{(k-1)}} & \nabla g(x^{(k)}) + \epsilon_{\nabla g^{(k)}} \\ (\Lambda^{(k)} + \epsilon_{\Lambda^{(k-1)}})(\nabla g(x^{(k)})^T + \epsilon_{\nabla g^{(k)}}) & G(x^{(k)}) + \epsilon_{G^k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 & d_1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 \end{bmatrix} = \quad (2.21)$$

$$- \begin{bmatrix} \nabla f(x^{(k)}) + \epsilon_{\nabla f^{(k)}} & 0 \\ 0 & \lambda^{(k)} + \epsilon_{\lambda^{(k-1)}} \end{bmatrix}$$

para determinar as direções de busca. Onde o ponto  $x^{(k)}$  carrega também as incertezas da equação anterior.

## 2.9. Parâmetros dos Algoritmos

Em princípio, tanto o FAIPA quanto o FDIPA funcionaram com os ajustes padrão,

Os critérios de parada são:

1. O gradiente do Lagrangiano é menor que  $10^{-5}$
2. O módulo da direção de descida é menor que  $10^{-5}$
3. A diferença  $f(x^{(k)}) - f(x^{(k+1)})$  é menor que  $10^{-5}$
4. Se o número de iterações na busca Linear excede 100

O valor utilizado para  $\alpha$  é 0,7, o valor padrão, e o valor escolhido para  $\varphi$  é 1, também o valor padrão.

No passo três é utilizada a busca de Armijo

A idéia por trás dessa busca é que  $t$  não seja muito grande, depois, que ele não seja muito pequeno. Para uma busca linear definimos uma função como:

$$\varphi(t) = f(x^{(k)} + t\mathbf{d}^{(k)}) \quad (2.33)$$

Definimos como um limite superior a função  $\varphi(0) + \varepsilon\varphi'(0)t$  para um  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ . Essa função está mostrada na Figura 3 representada pela linha tracejada. Um valor de  $t$  não será considerado muito grande se estiver abaixo dessa linha, i.e. se

$$\varphi(t) \leq \varphi(0) + \varepsilon\varphi'(0)t \quad (2.34)$$



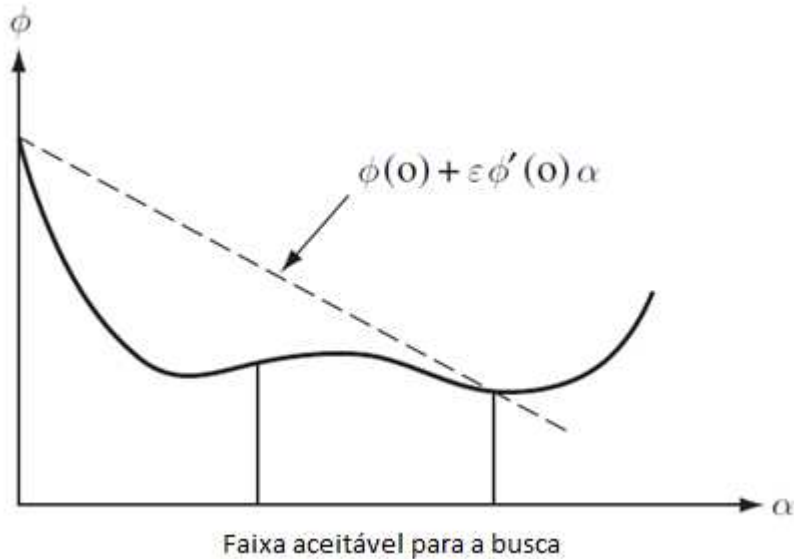


Figura 4 - Busca de Armijo

Fonte: Luenberger

Para garantir que  $t$  não é muito pequeno, um valor  $\eta > 1$  é selecionado e  $t$  não será considerado muito pequeno se

$$\varphi(\eta t) \leq \varphi(0) + \epsilon \eta \varphi'(0)t \quad (2.35)$$

Se  $t$  não satisfizer o critério (2.30) ele é dividido por  $\eta$  e o critério é testado novamente. O processo se repete até que o critério seja atendido.

### 2.10. Novas Condições de Parada

As novas condições de parada excluem o critério que determina que o algoritmo deva parar caso a diferença  $f(x^{(k)}) - f(x^{(k+1)})$  seja menor que um determinado valor. Os outros critérios são:

1. Por 5 iterações o gradiente do Lagrangiano é menor que  $10^{-5}$
2. Por 5 iterações o módulo da direção de descida é menor que  $10^{-5}$
3. Se o número de iterações na busca Linear excede 100

A exigência de que os critérios de parada se repitam serve para evitar que a busca pare por causa de uma simples oscilação no valor da função.

O novo critério de parada pode ser visto abaixo:

```

global cont_crt

ifpoint = idata(15);

if mglag0 < data(1),
    cont_crt(1)=cont_crt(1)+1;
    if cont_crt(1)==5;
        istop=1; % Gradient of the Lagrangian less than tolerance
    end
elseif modd0 < data(2),
    cont_crt(2)=cont_crt(2)+1;
    if cont_crt(2)==5;
        istop=2; % Descent direction "d0" less than tolerance
    end

elseif f < data(5) & ifpoint~=1; % The function is lower than the
                                % expected given value
    cont_crt=cont_crt+1;
    if cont_crt==3;
        istop=6;
    end

```

## 2.11. Variações que aproximam derivadas

### 2.11.1. Diferenças Finitas

Nessa variação do algoritmo, são usadas diferenças finitas centradas para aproximar os gradientes. A escolha de diferenças finitas centradas se dá por sua maior precisão em relação às diferenças finitas avançadas. Embora seu custo computacional seja maior, a robustez com que os algoritmos funcionam é um aspecto mais importante no presente trabalho. O gradiente foi calculado da seguinte forma:

$$\nabla f(x) \approx \begin{bmatrix} \frac{f(x+he_1)-f(x-he_1)}{2h} \\ \frac{f(x+he_2)-f(x-he_2)}{2h} \\ \vdots \\ \frac{f(x+he_n)-f(x-he_n)}{2h} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Onde  $h$  é um número pequeno e  $e_i, i = 1, \dots, n$  é o  $i$ -ésimo vetor canônico. Na presença de ruído, a escolha de  $h$  é importante, visto que se  $h$  for muito pequeno a aproximação será mais afetada pelo ruído. O valor de  $h$  foi escolhido com base no desvio padrão do nível de ruído utilizado. Primeiramente tentou-se  $h = \varepsilon\sigma/100$  onde  $\sigma$  é o desvio padrão do nível de um número aleatório entre um e seu oposto e  $\varepsilon$  é o nível de ruído utilizado. Após algumas tentativas notou-se que aumentar o valor de  $h$  levaria a melhores resultados e o valor utilizado foi  $h = \varepsilon\sigma/10$

### 2.11.2. Interpolação Linear

Nessa versão do algoritmo, os gradientes são calculados usando interpolação linear. Um modelo de interpolação é construído a partir de uma amostra que, no presente trabalho, foi gerada usando o método SIMPLEX.

Nesse método, todo novo conjunto bem posto de pontos amostrais  $Y = \{y^0, y^1, y^2, \dots, y^n\} \subset B(x^{(k)}, \Delta^{(k)})$ , onde  $B(x^{(k)}, \Delta^{(k)})$  é uma bola centrada em  $x^{(k)}$  e com raio  $\Delta^{(k)}$ , é um simplex construído segundo o seguinte procedimento:

- Primeiro ponto:  $y^0 = x^{(k)}$
- Do ponto  $y^1$  ao  $y^n$ :  $y^{(k)} = x^{(k)} \pm \Delta^{(k)} e_i, i = 1, \dots, n$ ,

Com sinal e  $\Delta$  tais que  $y^i \in \Omega$ . A letra  $e_i$  denota o  $i$ -ésimo vetor canônico.

Em problemas com ruído, o tamanho mínimo admissível para a região de interpolação é  $\Delta^* = \sqrt{\varepsilon}$ , onde  $\varepsilon$  é o nível de ruído.

O uso do método SIMPLEX facilita estabelecer um  $\Delta^*$ , pois todos os pontos tomados para a interpolação estão na extremidade da bola  $B(x^{(k)}, \Delta^{(k)})$ . Caso usássemos outro método de projeto de experimentos, como um hipercubo de Latin [10], seria mais difícil garantir o tamanho de  $\Delta^*$  e, conseqüentemente, o condicionamento da amostra. Esse aspecto foi verificado na prática durante o curso do trabalho.

Se uma função  $f(x)$  pode ser representada por uma aproximação linear  $\hat{f}(x)$  que interpola  $f(x)$  nos pontos  $Y = \{y^0, y^1, y^2, \dots, y^n\}$ , então  $\hat{f}(y^i) = f(y^i)$ , ou:

$$\begin{bmatrix} 1 & y_1^0 & \dots & y_n^0 \\ 1 & y_1^1 & \dots & y_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & y_1^n & \dots & y_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(y^0) \\ f(y^1) \\ \vdots \\ f(y^n) \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Logo, podemos aproximar o gradiente  $\nabla \hat{f}(x) = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_n]^T$

### 3. Otimização de Treliza

Para testar os algoritmos com os diferentes níveis de ruído foram desenvolvidos programas que minimizam o peso total de uma treliza tridimensional. Esse tipo de otimização trata de um problema linear com restrições não lineares. Ele é particularmente interessante para o nosso teste, pois é vastamente utilizado na literatura [1][9][11], permite o uso de derivadas exatas na função e nas restrições e um mesmo programa pode servir a problemas com diferentes níveis de complexidade, bastando mudar as informações de entrada para mudar o tipo de treliza. As funções usadas para calcular o peso, as tensões e os deslocamentos nodais da treliza podem ser encontradas no Apêndice E.

Em cada treliza, o objetivo é minimizar seu peso total encontrando os melhores valores para as áreas transversais de cada barra sem que sejam excedidas tensões máximas em cada barra e deslocamentos máximos em cada nó. Na prática a diminuição do peso de uma estrutura resulta em economia de material.

Uma vez obtido o valor ótimo da função, as variáveis são avaliadas em uma versão sem ruído da função, permitindo que os resultados dos diferentes testes possam ser comparados. Os valores obtidos para versões do programa usando derivada exata servem como referência para as versões com derivadas aproximadas. Em cada teste foram colhidas 100 amostras do valor final da função objetivo, bem como informações sobre a viabilidade dos resultados.

Os programas permitem que ruído numérico seja adicionado de diferentes formas e em diferentes níveis possibilitando uma análise precisa do efeito do ruído separadamente na função objetivo, nas restrições ou nos gradientes.

O peso total da treliza é dado por:

$$f(x) = \mu l^T x \quad (3.1)$$

Onde  $\mu$  é o peso específico do material da treliza,  $l$  é a matriz com o comprimento de cada barra e  $x$  é a matriz com sua área transversal.

Para calcular as restrições, é necessário analisar a treliza.

#### 3.1. Análise Elástica de uma Treliza

Para determinar o deslocamento nodal em uma treliza, começamos verificando o comportamento de uma barra isolada.

A barra considerada para o problema resiste somente a tensões de compressão e tração, não oferecendo nenhuma resistência a flexão. A tensão axial pode ser considerada constante ao longo da barra e pode ser dada por:

$$\sigma_e = \frac{p_e}{A_e} \quad (3.2)$$

Onde  $p_e$  é a força axial aplicada à barra e  $A_e$  sua área transversal.

Numa situação de equilíbrio temos para a barra

$$F_{1,e} + F_{2,e} = 0 \quad (3.3)$$

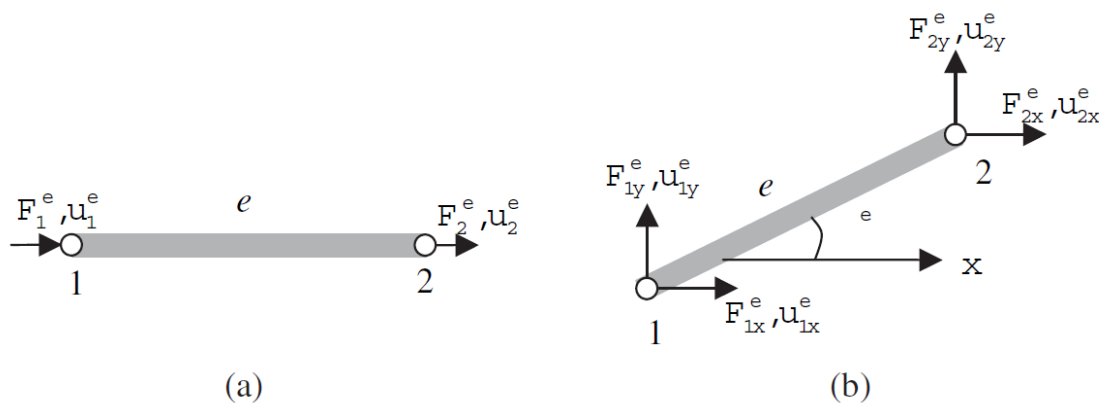


Figura 5 - Configurações de Barras: (a) alinhada horizontalmente e (b) com alinhamento arbitrário  
Fonte: Jacob Fish

A equação conhecida como Lei de Hooke pode ser aplicada à barra. De modo que temos:

$$\sigma_e = E_e \varepsilon_e \quad (3.4)$$

Onde  $\varepsilon_e$  denota a deformação e  $E_e$  o módulo de Young do material da barra.

O deslocamento  $\varepsilon_e$  é definido por:

$$\varepsilon_e = \frac{\delta_e}{l_e} = \frac{u_{2,e} - u_{1,e}}{l_e} \quad (3.5)$$

Onde  $\delta_e$  é a variação no comprimento da barra e  $l_e$  seu comprimento total. O vetor  $u$  representa o deslocamento das extremidades da barra.

Precisamos agora de uma equação que relacione as forças nos nós com seus deslocamentos. As forças nos nós são denotadas pela matriz:

$$\mathbf{F}_e = \begin{bmatrix} F_{1,e} \\ F_{2,e} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Os deslocamentos pela matriz:

$$\mathbf{u}_e = \begin{bmatrix} u_{1,e} \\ u_{2,e} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

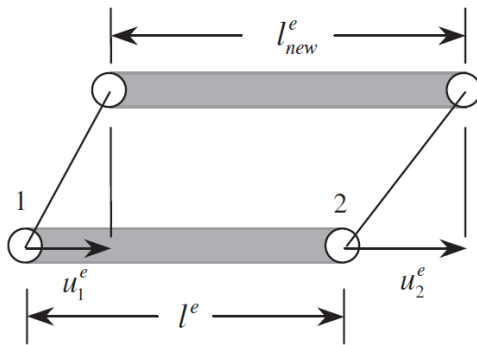


Figura 6 - Alongamento de um elemento isolado - Fonte: Jacob Fish

Da definição de tensão apresentada em (x) temos que a rigidez do elemento será dada por  $k_e = \frac{A_e E_e}{l_e}$ . Logo, podemos relacionar as forças com os deslocamentos nodais através do sistema:

$$\begin{bmatrix} F_{1,e} \\ F_{2,e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_e & -k_e \\ -k_e & k_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,e} \\ u_{2,e} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Para analisar treliças, basta expandir a teoria usada no caso da barra.

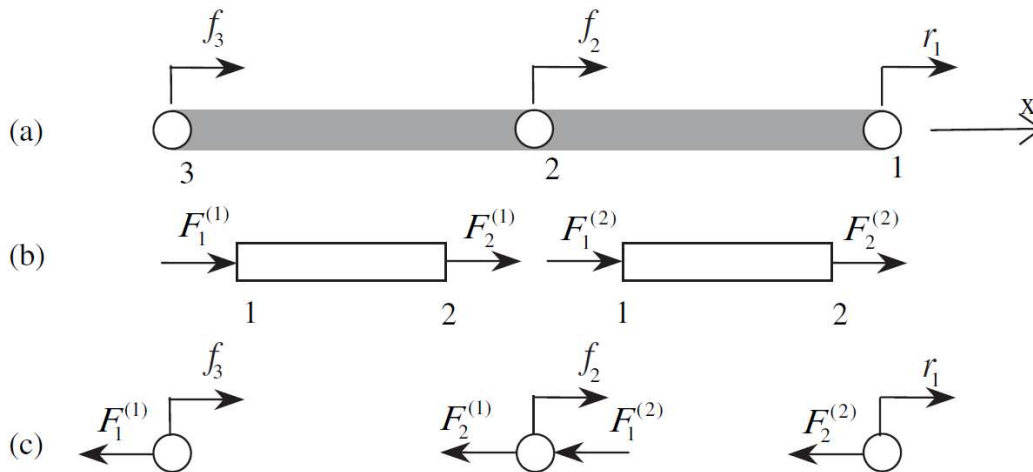


Figura 7 - Diagrama de corpo livre para os nós e elementos: (a) sistema completo; (b) diagrama de corpo livre dos elementos; (c) diagrama de corpo livre dos nós – Fonte: Jacob Fish

Para analisar a matriz são inseridas as posições dos nós, o módulo de Young do material, e uma matriz que relaciona os nós em que estão ligadas cada barra, chamada matriz de incidência. As forças aplicadas aos nós são inseridas em um vetor específico.

Condições de contorno também são inseridas como informação de entrada, onde são informados os nós cujo deslocamento é prescrito e qual o deslocamento nesse nó.

As matrizes com informações sobre os nós tem a forma:

$$\begin{bmatrix} Pos.x \text{ Nó } 1 & Pos.y \text{ Nó } 1 & Pos.z \text{ Nó } 1 \\ Pos.x \text{ Nó } 2 & Pos.y \text{ Nó } 2 & Pos.z \text{ Nó } 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ Pos.x \text{ Nó } n & Pos.y \text{ Nó } n & Pos.z \text{ Nó } n \end{bmatrix}$$

As matrizes que relacionam os nós com os elementos e as variáveis de projeto tem 4 colunas:

1. A primeira coluna traz o número do elemento
2. A segunda coluna traz, em coordenadas globais, o nó 1 local da barra
3. A terceira coluna traz, em coordenadas globais, o nó 2 local da barra
4. A última coluna traz as variáveis de projeto.

Os graus de liberdade são numerados em ordem crescente nas direções x, y e z a partir do nó que está na posição zero do sistema de coordenadas da treliça.

A matriz de rigidez é montada a partir das informações de entrada. O processo se dá em duas etapas:

- Primeiro fazemos  $\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{G}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{G}_e$  onde G é a matriz de rotação em três dimensões entre as coordenadas locais da barra e as coordenadas da treliça.
- Depois alocamos a componente de rigidez de cada barra no local correto da matriz de rigidez da treliça para cada grau de liberdade.

A função que monta a matriz de rigidez foi adaptada de [8] para funcionar com treliças tridimensionais, conforme o código abaixo.

```
function [K]=MatrixK(ex,ey,ez,Edof,x,E)
%ex,ey,ez - Coordenadas dos nós
%Edof - Matriz que relaciona os nós das treliças com seus respectivos graus
%de liberdade
%x - Área transversal das barras
%E - Módulo de Young das barras
[nel col]=size(Edof);
K=zeros(max(max(Edof(:,2:col-1))),max(max(Edof(:,2:col-1))));
for i=1:nel

    b=[ ex(i,2)-ex(i,1); ey(i,2)-ey(i,1); ez(i,2)-ez(i,1) ];
    L=sqrt(b'*b);

    Kle=E(i)*x(i)/L*[ 1 -1; -1 1];

    n=b'/L; G=[ n zeros(size(n));
                zeros(size(n)) n ];

    Ke=G'*Kle*G;

    K(Edof(i,2:col-1),Edof(i,2:col-1))=K(Edof(i,2:col-1),Edof(i,2:col-1))+Ke;
end
```

Uma vez obtida a matriz de rigidez para o sistema resolve-se o sistema:

$$\mathbf{u}_F = \mathbf{K}_F^{-1}(\mathbf{f}_F - \mathbf{K}_{EF}^T \mathbf{u}_E) \quad (3.9)$$

Onde  $\mathbf{u}_F$  é o vetor deslocamento,  $\mathbf{K}_F$  é a matriz de rigidez e  $\mathbf{f}_F$  é a matriz de forças para as direções onde os deslocamentos são desconhecidos e somente as forças são conhecidas. A matriz  $\mathbf{K}_{EF}$  representa a parcela da matriz de rigidez com as direções para a qual os deslocamentos são conhecidos e a matriz  $\mathbf{u}_E$  traz os valores desse deslocamento.

Precisamos agora calcular as tensões nas barras. Como já foi visto acima, para um elemento de barra no regime elástico, a Lei de Hooke afirma que:

$$\sigma_e = \frac{E_e}{l_e} (u_{2,e} - u_{1,e}) \quad (3.10)$$

Podemos reescrever (3.10) como

$$\sigma_e = \frac{E_e}{l_e} \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,e} \\ u_{2,e} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$



Para simplificar, chamemos a matriz  $(-1 \ 1)$  de  $\boldsymbol{\psi}$  e a matriz  $(u_{1,e} \ u_{2,e})^T$  de  $\mathbf{u}_e$ . Podemos reescrever (3.11) na forma

$$\boldsymbol{\sigma}_e = \frac{E_e}{l_e} \boldsymbol{\psi} \mathbf{u}_e \quad (3.12)$$

Como  $\frac{E_e}{l_e} \mathbf{B}$  constante para uma barra qualquer, chamaremos essa matriz de  $\mathbf{S}_e$ . Para montar a matriz  $\mathbf{S}$  que relaciona os deslocamentos nos nós da treliça com a tensão nos elementos, basta adotar o mesmo procedimento utilizado acima na montagem da matriz  $\mathbf{K}$ . Com isso, para encontrar as tensões, basta fazer:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S} \mathbf{u} \quad (3.13)$$

A função que monta a matriz  $\mathbf{S}$  foi adaptada de [6] para funcionar com treliças tridimensionais, conforme o código abaixo.

```
function [S,l]=Smatrix(ex,ey,ez,Edof,E)
%ex,ey,ez - Coordenadas dos nós
%Edof - Matriz que relaciona os nós das treliças com seus respectivos graus
%de liberdade
%E - Módulo de Young das barras
[nel col]=size(Edof);
S=zeros(length(ex),max(max(Edof(:,2:col)))));
for i=1:nel
b=[ ex(i,2)-ex(i,1); ey(i,2)-ey(i,1); ez(i,2)-ez(i,1) ];
L=sqrt(b'*b);
n=b'/L; G=[ n zeros(size(n));
zeros(size(n)) n ];
Se=[-1 1]*G;
l(i)=L;
S(i,Edof(i,2:col-1))=E(i)*Se(1:length(Se))/l(i);
end
```

Com as tensões e os deslocamentos máximos, podemos calcular as restrições como:

$$\mathbf{g}_u(\mathbf{x}) \leq \mathbf{u} - \mathbf{u}_{max} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{g}_u(\mathbf{x}) \leq \mathbf{u}_{min} - \mathbf{u} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{g}_\sigma(\mathbf{x}) \leq \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{max} \quad (3.16)$$

$$\mathbf{g}_\sigma(\mathbf{x}) \leq \boldsymbol{\sigma}_{min} - \boldsymbol{\sigma} \quad (3.17)$$

Para calcular o gradiente da função objetivo fazemos:

$$\nabla f(x) = \mu l \quad (3.18)$$

Para o gradiente das restrições temos:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_F}{\partial x_i} = -\mathbf{K}_F^{-1} \left( \frac{\partial \mathbf{K}_F}{\partial x_i} \mathbf{u}_F \right), i = 1, 2, \dots, n \quad (3.19)$$

### 3.2. Definindo Variáveis de Projeto

Até aqui foi possível tratar de forma indistinta a área transversal de cada barra e as variáveis de projeto. Quando temos treliças com muitas barras, é interessante agrupar barras que tenham a mesma função estrutural. Na prática, isso facilitaria a montagem da treliça no campo. Com essa mudança, nossas variáveis de projeto passam a ser grupos de barras, e não barras isoladas.

Para calcular os gradientes da função objetivo e das restrições em função das novas variáveis de projeto, usamos a regra da cadeia.

Quando consideramos variáveis de projeto, a variável  $x$  passa a ser uma função dessas variáveis de projeto, i.e.  $x(\mathbf{p})$ . Assim,

$$\frac{\partial \mathbf{u}_F(x_i(\mathbf{p}))}{\partial x_i} \mathbf{K}_F(x_i(\mathbf{p})) \frac{\partial x_i(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial \mathbf{K}_F(x_i(\mathbf{p}))}{\partial x_i} \mathbf{u}_F(x_i(\mathbf{p})) \frac{\partial x_i(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} = 0 \quad (3.20)$$

Para calcular o gradiente das tensões fazemos:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \mathbf{S} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \quad (3.21)$$

Onde  $\mathbf{S}$  é a matriz que relaciona tensão e deslocamento, que independe da área da barra, e  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}$  já foi calculado acima.

Para o cálculo do gradiente da função objetivo o processo é análogo.

## 4 Problemas teste

### 4.1. Treliças de 10 Barras

O problema apresenta uma treliça de 10 Barras conforme pode ser visto na figura. As variáveis de projeto são as áreas da seção transversal das barras. A estrutura é feita de alumínio com módulo de Young  $E = 10^7 \text{ psi}$  e massa específica  $\mu = 0,1 \text{ lbm/in}^3$ . As restrições ao deslocamento consideradas são de  $2,0 \text{ in}$  em cada direção do nó livre. As restrições máximas de tensão são de  $25 \text{ ksi}$  para tração e compressão. O limite inferior para todas as variáveis de projeto é de  $0,000001 \text{ in}^2$ . As condições de carga são:  $100 \text{ kips}$  para baixo aplicada em cada nó inferior livre. O valor inicial para as áreas é de  $2,0 \text{ in}^2$ .

Em resumo, temos um problema com 10 variáveis de projeto e 36 restrições.

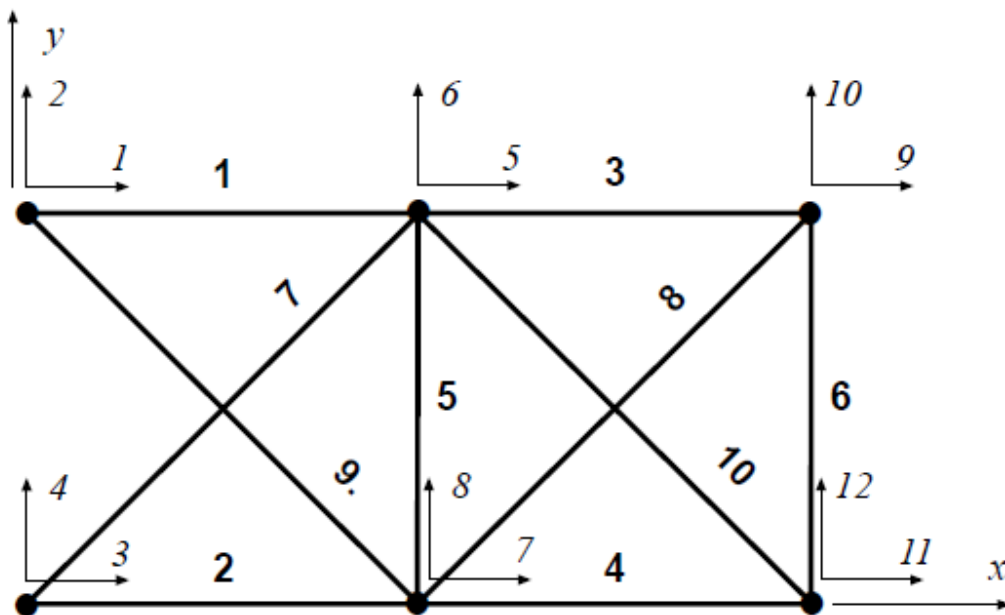


Figura 8 - Treliça de Dez Barras

### 4.2. Treliça de 72 Barras

O problema apresenta uma treliça de 72 barras como visto na figura. Nem todas as barras são consideradas variáveis de projeto. Essas variáveis estão discriminadas na Tabela 1. As variáveis de projeto são as áreas transversais das barras. A estrutura é feita de alumínio e o deslocamento máximo permitido em cada nó é de  $2,0 \text{ in}$ . A tensão máxima e mínima nas barras é de  $25 \text{ ksi}$ . O limite inferior para as variáveis é  $0.000001 \text{ in}^2$ . As condições de carga são mostradas na Tabela 2. Os nós 17, 18, 19 e 20 têm deslocamentos nulos. O valor inicial para as áreas é de  $2,0 \text{ in}^2$ . Em resumo, temos um problema com 16 variáveis de projeto e 240 restrições não-lineares.

Elemento	Variáveis de Projeto	Nós	Elemento	Variáveis de Projeto	Nós
1	1	1-5	37	9	9-13
2	1	2-6	38	9	10-14
3	1	3-7	39	9	11-15
4	1	4-8	40	9	12-16
5	2	2-5	41	10	10-13
6	2	1-6	42	10	9-14
7	2	3-6	43	10	11-14
8	2	2-7	44	10	10-15
9	2	4-7	45	10	12-15
10	2	3-8	46	10	11-16
11	2	1-8	47	10	9-10
12	2	4-5	48	10	12-13
13	3	1-2	49	11	9-10
14	3	2-3	50	11	10-11
15	3	3-4	51	11	11-12
16	3	4-1	52	11	12-9
17	4	1-3	53	12	9-11
18	4	2-4	54	12	10-12
19	5	5-9	55	13	13-17
20	5	6-10	56	13	14-18
21	5	7-11	57	13	15-19
22	5	8-12	58	13	16-20
23	6	6-9	59	14	14-17
24	6	5-10	60	14	13-18
25	6	7-10	61	14	15-18
26	6	6-11	62	14	14-19
27	6	8-11	63	14	16-19
28	6	7-12	64	14	15-20
29	6	5-12	65	14	13-20
30	6	8-9	66	14	16-17
31	7	5-6	67	15	13-14
32	7	6-7	68	15	14-15
33	7	7-8	69	15	15-16
34	7	8-5	70	15	16-13
35	8	5-7	71	16	13-15
36	8	6-8	72	16	14-16

Tabela 1 - Variáveis de projeto da treliça de 72 barras

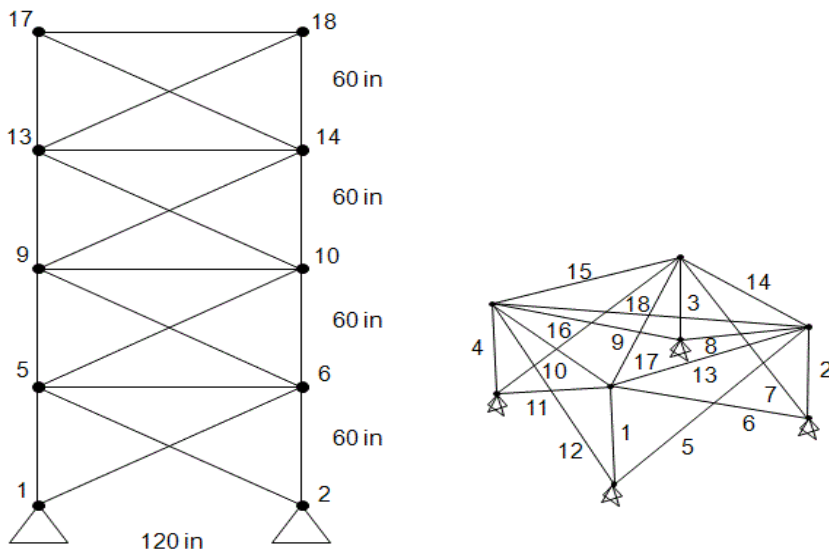


Figura 9 - Treliça de 72 Barras

Nó	Direção X	Direção Y	Direção Z
1	5000 lb.	5000 lb.	-10000 lb.
2	0	0	-5000 lb.
3	0	0	-5000 lb.
4	0	0	-5000 lb.

Tabela 2 - Forças aplicadas a treliça de 72 barras

### 4.3. Domos 52 Barras

O problema trata de uma estrutura espacial hemisférica com 52 barras como ilustrado na Figura 8. As 52 barras são feitas de alumínio e são agrupadas em oito variáveis de projeto. Embora a barra seja simétrica, não foi imposta nenhuma condição de simetria para facilitar a resolução porque o objetivo do trabalho é testar os algoritmos de otimização, para tanto, não haveria sentido em simplificar o problema. A distribuição de cargas a que o domo está submetido está especificado na Tabela 4. O valor inicial para as áreas é de  $2,0 \text{ in}^2$ . Em resumo temos um problema de 8 variáveis de projeto e 182 restrições não lineares

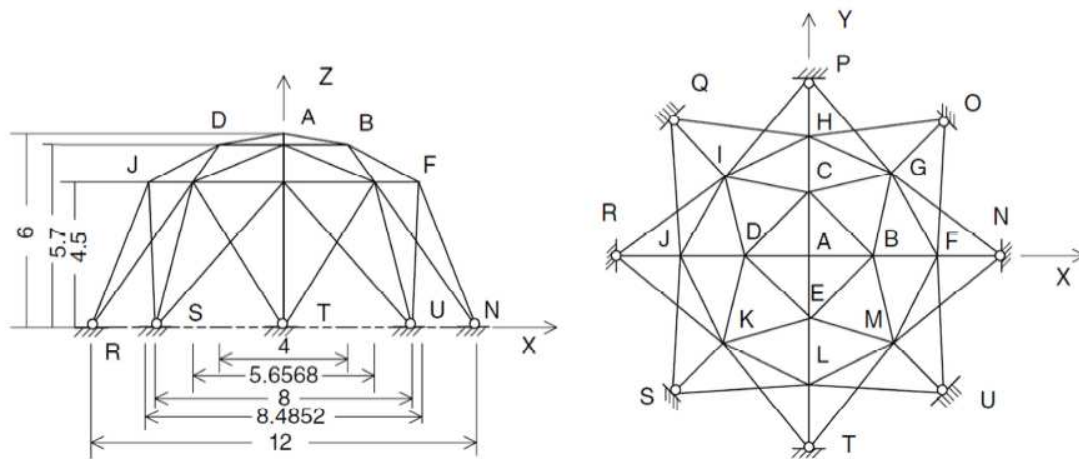


Figura 10 - Domo de 52 Barras Fonte: Henry Cortes

Elemento	Variável de Projeto	Nós	Elemento	Variável de Projeto	Nós
1	1	A-B	27	5	L-M
2	1	A-C	28	5	F-M
3	1	A-D	29	6	F-N
4	1	A-E	30	6	G-O
5	2	B-F	31	6	H-P
6	2	C-H	32	6	I-Q
7	2	D-J	33	6	J-R
8	2	E-L	34	6	K-S
9	3	B-G	35	6	L-T
10	3	C-G	36	6	M-U
11	3	C-I	37	7	F-O
12	3	D-I	38	7	H-O
13	3	D-K	39	7	H-Q
14	3	E-K	40	7	J-Q
15	3	E-M	41	7	J-S
16	3	B-M	42	7	L-S
17	4	B-C	43	7	L-U
18	4	C-D	44	7	F-U
19	4	D-E	45	8	G-N
20	4	B-E	46	8	G-P
21	5	F-G	47	8	I-P
22	5	G-H	48	8	I-R
23	5	H-I	49	8	K-R
24	5	I-J	50	8	K-T
25	5	J-K	51	8	M-T
26	5	K-L	52	8	M-N

Tabela 3 - Variáveis de projeto para o domo de 52 barras

Nó	Direção X	Direção Y	Direção Z
A	5000 lb.	5000 lb.	-10000 lb.
B	0	0	-5000 lb.
C	0	0	-5000 lb.
D	0	0	-5000 lb.

Tabela 4 - Forças aplicadas ao domo de 52 barras

Problema Teste	Restrições	Variáveis	Peso ótimo
Treliça de dez barras	36	10	1584.00lb.
Treliça de 72 barras	240	16	370.54lb.
Domo de 52 barras	182	8	3.914lb.

Tabela 5 - Problemas teste

## 5. Simulação de Ruído

Considera-se que possíveis fontes de ruído sejam imprecisões no cálculo de equações de estado ou na diferenciação das funções. Para simular ruído nas funções e nos gradientes foi utilizado o gerador de números aleatórios do MATLAB®. A cada valor estimado foi adicionado ruído proporcional à magnitude do valor calculado usando um número aleatório entre -1 e 1.

Nas funções objetivo, o ruído foi adicionado diretamente fazendo

$$f_{perturbado} = f_{suave} \left( 1 + \varepsilon \left( \frac{RND}{100} \right) \right) \quad (52)$$

Onde  $\varepsilon$  é a magnitude do ruído adicionado.

No gradiente da função objetivo o ruído é adicionado separadamente para cada componente.

$$\nabla f(\mathbf{x})_{perturbado} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{suave}}{\partial x_1} \left( 1 + \varepsilon \left( \frac{RND_1}{100} \right) \right) \\ \frac{\partial f_{suave}}{\partial x_2} \left( 1 + \varepsilon \left( \frac{RND_2}{100} \right) \right) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_{suave}}{\partial x_n} \left( 1 + \varepsilon \left( \frac{RND_n}{100} \right) \right) \end{bmatrix} \quad (53)$$

Nas restrições e em seus gradientes, em vez de adicionar diretamente ao resultado final, optou-se por adicioná-lo no vetor de deslocamentos  $\mathbf{u}$ .

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \left( 1 + \varepsilon \left( \frac{RND_1}{100} \right) \right) \\ u_2 \left( 1 + \varepsilon \left( \frac{RND_2}{100} \right) \right) \\ \vdots \\ u_n \left( 1 + \varepsilon \left( \frac{RND_n}{100} \right) \right) \end{bmatrix} \quad (54)$$

Dessa forma uma possível consequência do efeito do ruído restrições é gerar uma solução inviável, o que não ocorreria se adicionássemos ruído diretamente ao resultado calculado, como fizemos na função objetivo. Nas restrições, assim como feito no vetor gradiente da função objetivo, ruído é adicionado separadamente em cada componente do vetor.

Para testar as funções foram escolhidos dois níveis de ruído moderado, 0,5% e 1%; e um nível que pode ser considerado alto, de 5%. Como os algoritmos se mostraram resistentes ao ruído quando as imprecisões se encontravam apenas nos gradientes, foi realizado mais um teste com um nível de ruído de até 10% nesses casos.



## 6. Análise dos Resultados

Uma vez escritos os programas em MATLAB®, são geradas cem amostras para cada caso de ruído. Essa quantidade de amostras foi escolhida para que a análise tenha boa precisão, sem que esteja sujeita a muitos erros na compilação dos resultados. Como uma parte do processo de análise é feito manualmente, uma grande quantidade de amostras poderia aumentar o risco de erro humano.

Os problemas teste escritos em MATLAB® permitem escolher a treliça que será utilizada, os níveis de ruído nas funções, restrições e gradientes e o método de diferenciação. Uma vez executado, ele grava um arquivo de texto com o valor da função objetivo, o valor das restrições e o número de iterações necessárias para alcançar o resultado.

Para que fosse possível a rastreabilidade das amostras, para cada caso individual, para cada um deles foi feito um programa diferente. Dessa forma é possível auditar os programas caso um conjunto de amostras apresente um resultado duvidoso.

Uma vez que todos os arquivos de texto com as amostras foram gerados, as amostras foram armazenadas em planilhas do software Microsoft Excel®. Usando as fórmulas da biblioteca do próprio programa são calculados:

- Média e desvio padrão do valor final da função objetivo
- Quantidade e percentual de resultados viáveis
- Média dos resultados viáveis
- Melhor e pior resultados viáveis encontrados
- Média e desvio padrão do número de iterações até que os algoritmos parassem.

Para facilitar a visualização, alguns resultados considerados mais importantes são apresentados na forma de gráfico.

## 7. Casos de ruído

Foram analisados diferentes casos de ruído, que estão apresentados na tabela.

	<b>Função Objetivo</b>	<b>Restrições</b>	<b>Gradiente da Função</b>	<b>Gradiente das Restrições</b>
<b>Caso 1</b>	Com Ruído	Sem Ruído	Exato - Sem Ruído	Exato - Sem ruído
<b>Caso 2</b>	Sem Ruído	Com Ruído	Exato - Sem Ruído	Exato - Sem ruído
<b>Caso 3</b>	Sem Ruído	Sem Ruído	Exato - Com Ruído	Exato - Sem ruído
<b>Caso 4</b>	Sem Ruído	Sem Ruído	Exato - Sem Ruído	Exato - Com Ruído
<b>Caso 5</b>	Sem Ruído	Sem Ruído	Exato - Com Ruído	Exato - Com Ruído
<b>Caso 6</b>	Com Ruído	Sem Ruído	Exato - Com Ruído	Exato - Sem ruído
<b>Caso 7</b>	Sem Ruído	Com Ruído	Exato - Sem Ruído	Exato - Com Ruído
<b>Caso 8</b>	Sem Ruído	Com Ruído	Exato - Com Ruído	Exato - Com Ruído
<b>Caso 9</b>	Com Ruído	Com Ruído	Exato - Com Ruído	Exato - Com Ruído
<b>Caso 10</b>	Com Ruído	Sem Ruído	Diferenças Finitas	Diferenças Finitas
<b>Caso 11</b>	Sem Ruído	Com Ruído	Diferenças Finitas	Diferenças Finitas
<b>Caso 12</b>	Com Ruído	Com Ruído	Diferenças Finitas	Diferenças Finitas
<b>Caso 13</b>	Com Ruído	Sem Ruído	Interpolação Linear	Interpolação Linear
<b>Caso 14</b>	Sem Ruído	Com Ruído	Interpolação Linear	Interpolação Linear
<b>Caso 15</b>	Com Ruído	Com Ruído	Interpolação Linear	Interpolação Linear

Tabela 6 - Casos de Ruído

Cada caso foi analisado para os diferentes níveis de ruído propostos e para os algoritmos FAIPA e FDIPA. No total foram feitos 1440 programas diferentes, gerando 144000 amostras.

## 8. Efeito do Ruído nos Gradientes

Os resultados indicam que o efeito do ruído nos gradientes é pouco relevante. Os valores obtidos para a média das soluções ótimas de cada problema foram pouco diferentes dos valores obtidos quando não foi adicionado ruído. A diferença relativa, em todos os casos, foi menor que 1%. Os gráficos mostrados abaixo sintetizam os resultados para ruído no gradiente. Para facilitar a compreensão dos gráficos, os valores de referência são apresentados na Tabela 5.

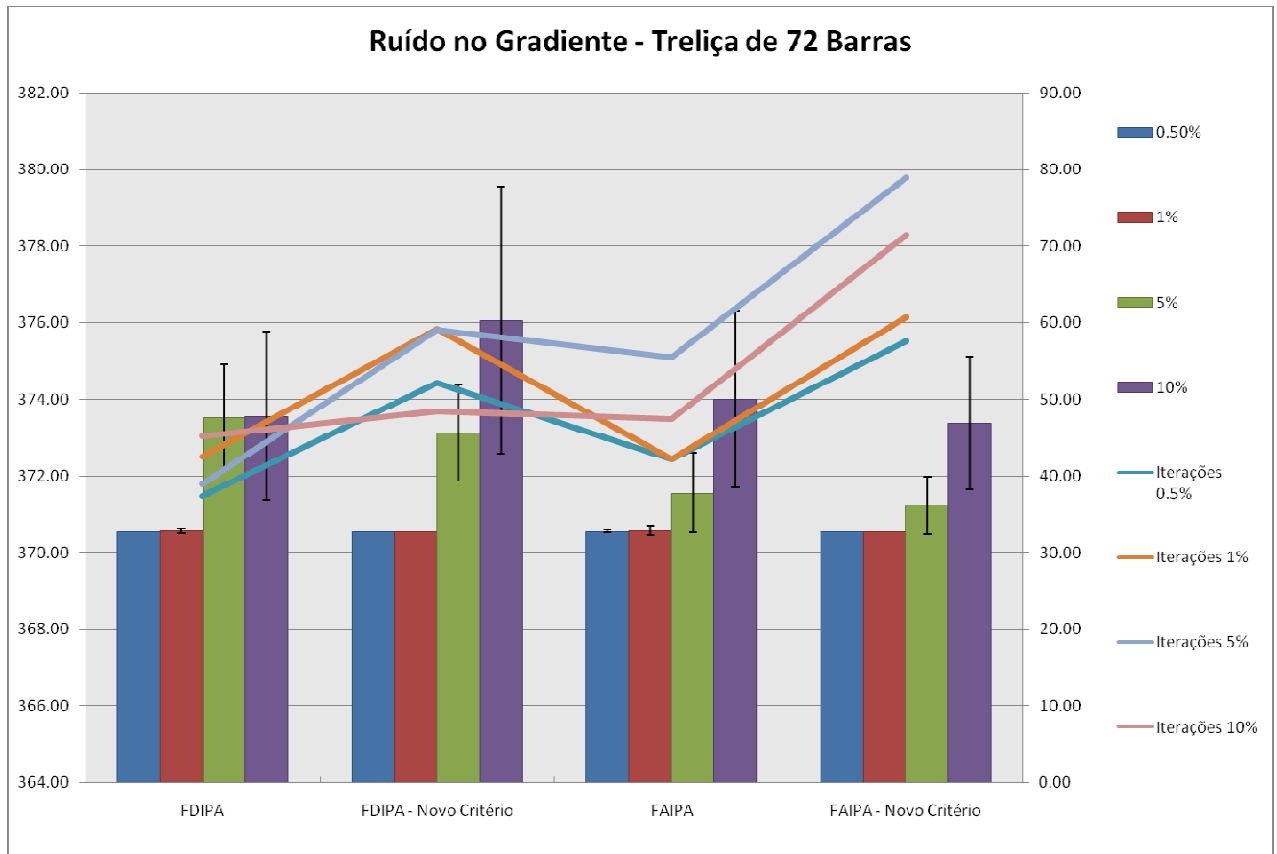


Figura 11 - Resultados do efeito do ruído nos gradientes para treliça de 72 barras

A Figura 11 mostra os resultados obtidos quando há ruído simultaneamente nos gradientes da função objetivo e das restrições. As barras representam a média do valor final da função objetivo para as cem amostras. O eixo vertical à direita, indica esse valor. As linhas representam o número médio de iterações, considerando todas as cem amostras. Seu valor está indicado no eixo vertical à direita.

Quando os algoritmos são utilizados sem que ruído nenhum seja adicionado, o valor final alcançado para esse problema teste é de 370,55 lb sendo que o FDIPA necessita de 32 iterações para chegar ao resultado e o FAIPA, 33. O gráfico indica que o ruído, mesmo em níveis moderados, leva a uma piora na convergência, fazendo com que mais iterações sejam necessárias para alcançar o resultado.

Sobre a eficácia dos algoritmos, podemos dizer que ela foi pouco afetada. A média dos resultados foi pouco afetada pelo ruído, mesmo em níveis mais altos. Para níveis moderados de ruído, nota-se que a dispersão foi pequena, para níveis mais elevados, de 5 e 10% a dispersão foi maior. Tanto para o critério de parada original quanto para o novo critério de parada.

Ao mudar o critério de parada, pode ser observada pouca mudança na média dos resultados. No entanto, fica claro que mais iterações foram necessárias até que o resultado fosse alcançado.

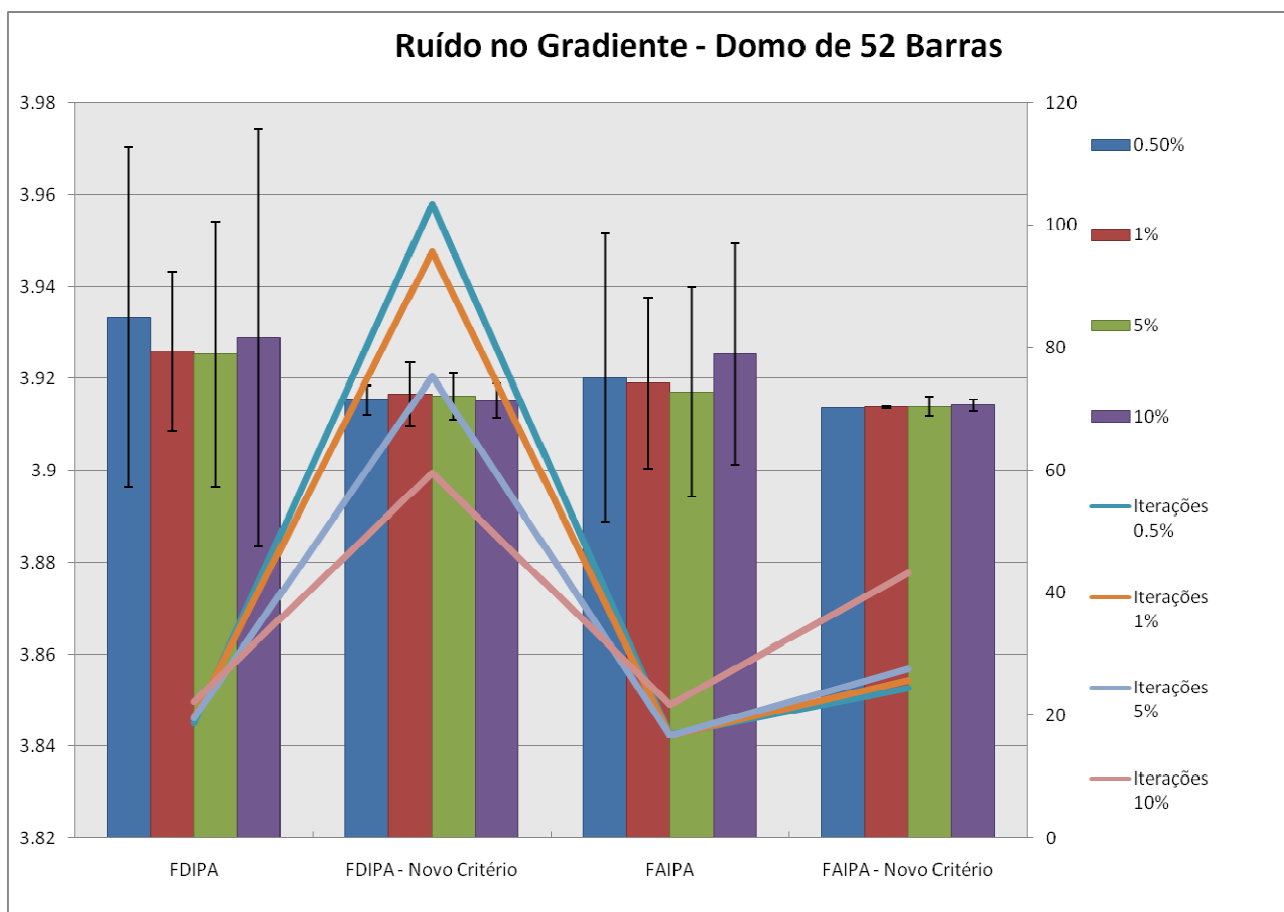


Figura 12 - Resultados do efeito do ruído nos gradientes para domo de 52 barras

O problema teste do domo de 52 barras traz resultados similares aos apresentados pela treliça de 72 barras. O valor final foi pouco afetado pelo ruído e a convergência foi comprometida. Considerando que os valores obtidos para esse problema sem que houvesse ruído são 3,914 lb para ambos os algoritmos, sendo que o FDIPA precisou de 16 iterações e o FAIPA de 15, podemos afirmar que mais uma vez o valor final não foi afetado em mais que 1% para a maioria das amostras

Nesse problema é possível notar algumas diferenças na média do valor da função objetivo quando mudamos o critério de parada. Essa média fica um pouco menor e a dispersão diminui de forma apreciável, porém, só com esses resultados não é possível afirmar que o novo critério de parada obteve melhor desempenho, dada a grande dispersão dos resultados obtidos para o critério original.

Foram obtidos resultados para todos os casos de ruído no gradiente descritos na tabela 6, eles estão expostos no Apêndice B e corroboram as conclusões citadas acima.

## 9. Outros Casos de Ruído

Para entender como o ruído afeta os algoritmos FAIPA e FDIPA, precisamos entender o que acontece se ele está presente em cada um dos componentes do algoritmos. Por componentes, quero dizer: função objetivo, gradientes, e restrições.

### 9.1. Efeito do ruído na função objetivo e em seus gradientes

Na Figura 13 pode ser observado o efeito do ruído somente na função objetivo e uma comparação quando temos ruído também em seus gradientes. As barras representam as médias da função objetivo, com os valores discriminados no eixo à direita e as linhas, o número de iterações até que o resultado fosse alcançado. Quando não há nenhum tipo de ruído, o valor alcançado pelos algoritmos é de 1584 lb, em 23 iterações com o FDIPA, e 25 iterações com o FAIPA.

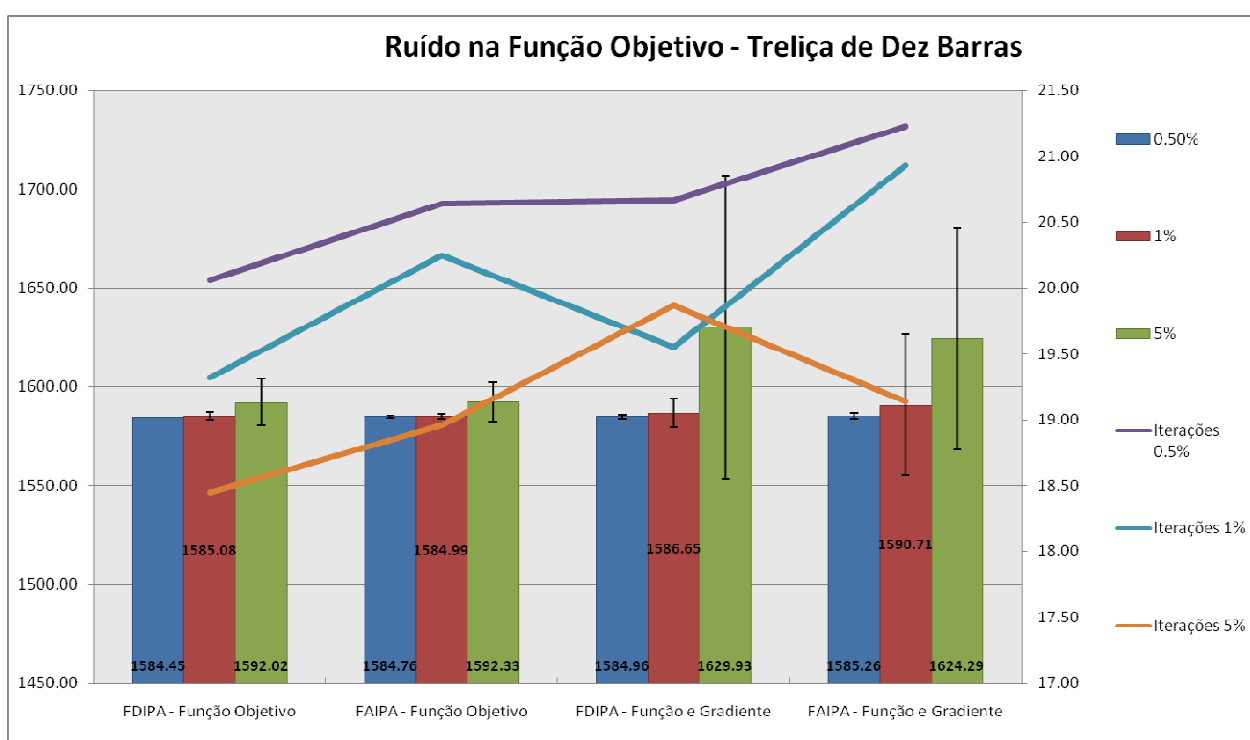


Figura 13 - Resultados do efeito do ruído na função objetivo para treliça de dez barras para critério de parada original

A Figura 13 indica que a adição de ruído às restrições afeta pouco o resultado final, especialmente quando temos níveis de ruído moderado. Nota-se que o número de iterações necessárias para chegar ao resultado é menor do que quando não temos ruído. Isso nos permite concluir que a causa para a parada seja uma falha na busca linear, exatamente quando os testes (2.19) ou (2.26) falham devido ao efeito do ruído na função – e não porque a direção de busca não seja de descida. Corrobora a nossa conclusão o fato de que quanto menor o nível de ruído, mais o número de iterações se aproxima do obtido quando não há adição de ruído.

Quando há adição de ruído nos gradientes pode ser observada uma piora na média dos resultados. Ainda que o erro relativo quando temos ruído moderado seja pequeno,

o mesmo já não pode ser dito quando chegamos a 5%. Essa piora nos resultados pode ser atribuída à determinação imprecisa da direção de busca, associada ao ruído nos gradientes, e à parada precoce, que pode ser atribuída ao ruído nas restrições.

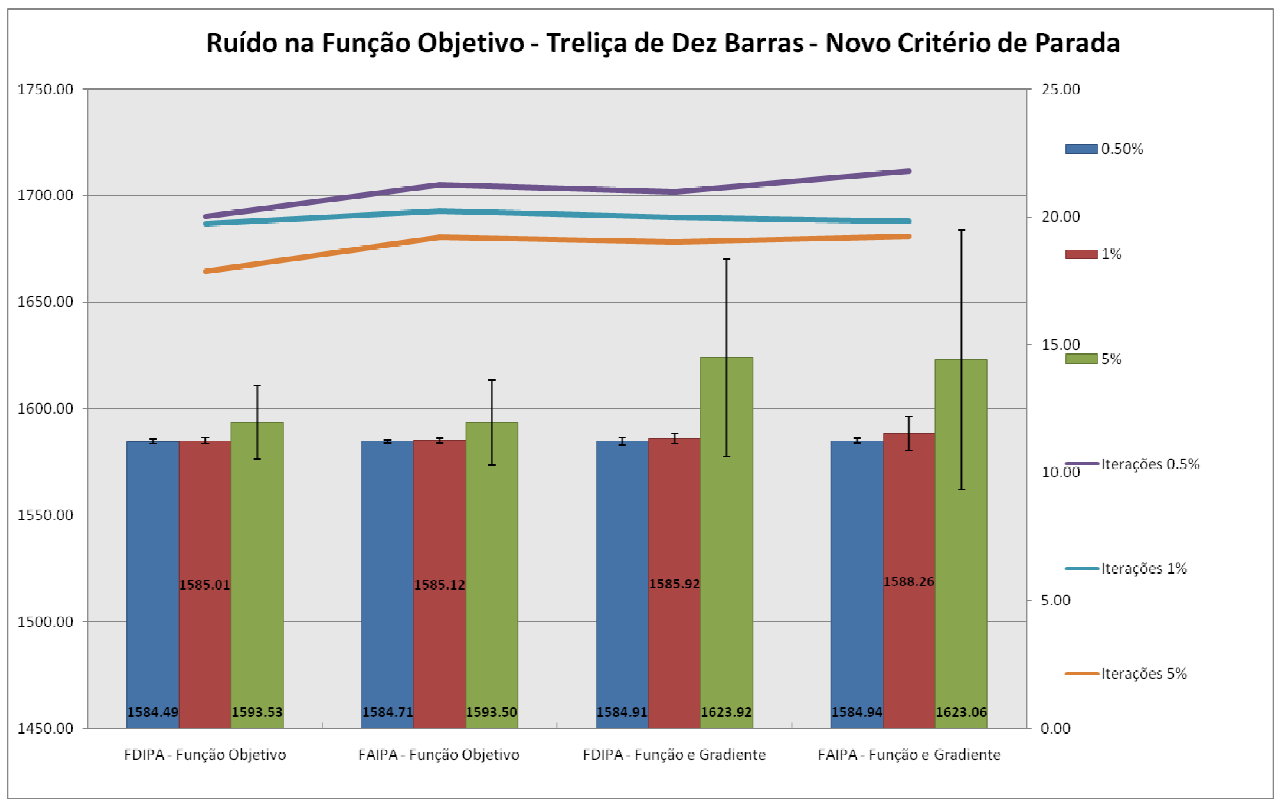


Figura 14 - Resultados do efeito do ruído na função objetivo para treliça de dez barras para novo critério de parada

Quando usamos o novo critério de parada, não pode ser observada diferença em comparação com o critério de parada novo.

## 9.2. Efeito do ruído somente nas restrições

O objetivo de colocar ruído somente nas restrições é verificar o impacto desse tipo de ruído na convergência do algoritmo e na determinação da direção de busca e também na capacidade do algoritmo de encontrar soluções viáveis. A presença de ruído somente nas restrições é um evento que dificilmente ocorreria na prática. A esse ruído estaria associado, pelo menos, ruído nos gradientes das restrições.

Uma interpretação geométrica do efeito do ruído nas restrições pode ser vista na figura abaixo

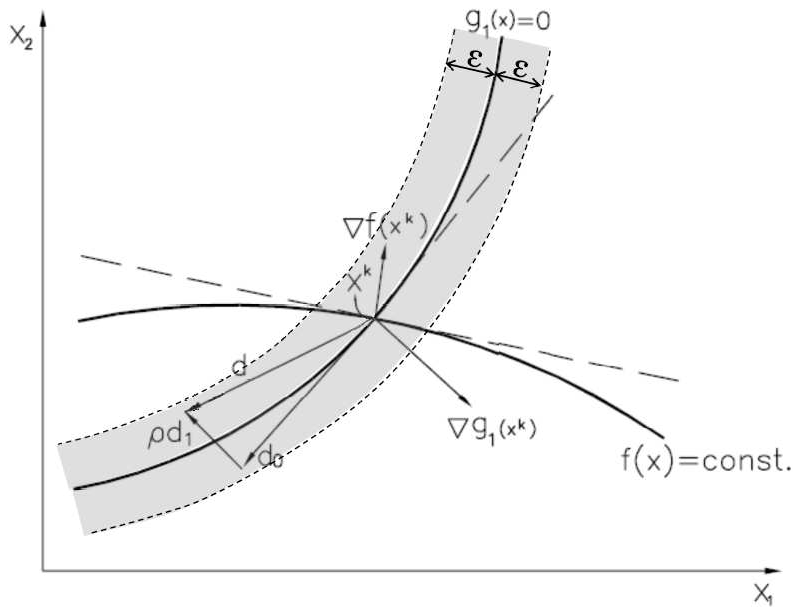


Figura 15 - Interpretação geométrica do ruído nas restrições - Fonte: Henry Cortes

Na Figura 15, a área hachurada representa valores que a restrição pode assumir por causa do efeito do ruído. Essa indeterminação no valor das restrições pode levar a resultados inviáveis, mesmo que os gradientes sejam calculados corretamente.

Vejamos os resultados obtidos para as diferentes treliças:

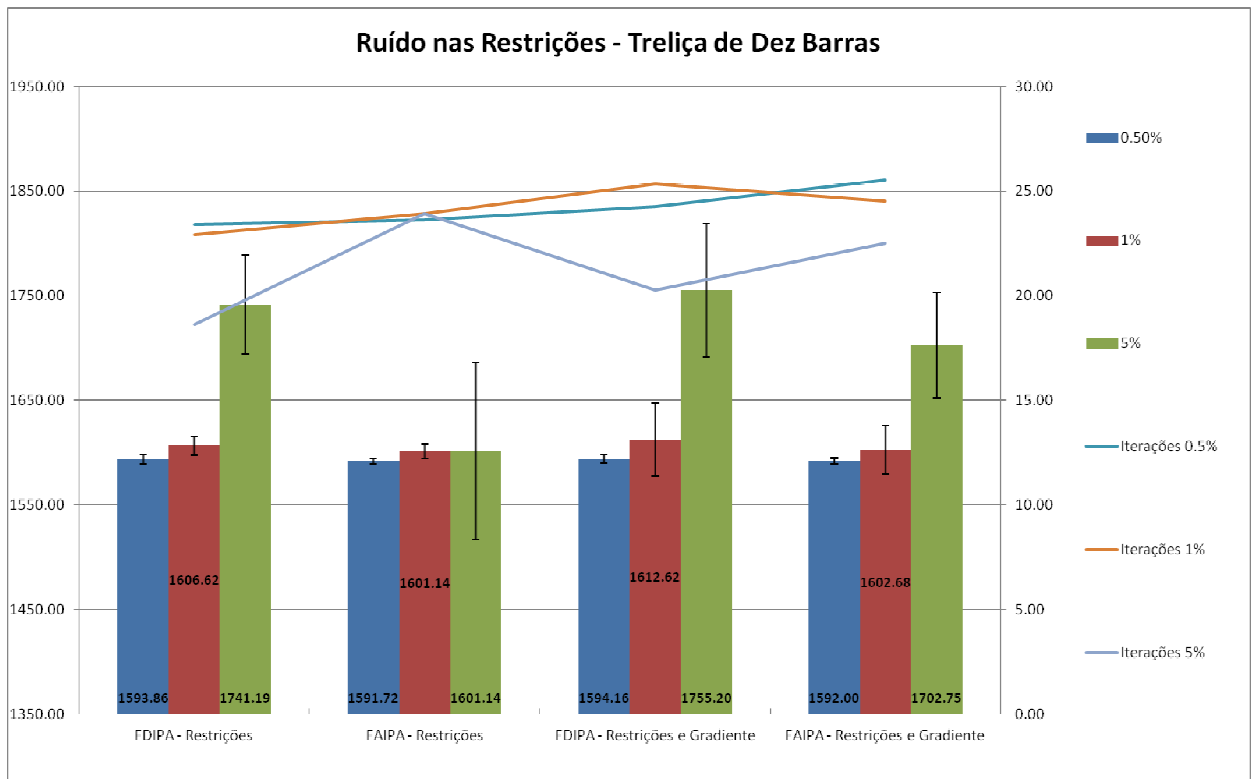


Figura 16 - Resultados do efeito do ruído nas restrições para treliça de dez barras com critério de parada original



Quando adicionamos ruído às restrições duas coisas acontecem: por um lado, a convergência fica prejudicada, uma vez que o valor das restrições afeta o cálculo da direção de busca, a outra, é a dificuldade de chegar a resultados viáveis, pelos motivos já citados acima. Para a treliça de 10 barras nota-se que à medida que o nível de ruído aumenta, o valor médio dos resultados obtidos também aumenta. Para 0,5% e 1% de ruído, a média dos resultados é um pouco maior do que nosso valor de referência. Quando há 5% de ruído a média dos valores obtidos aumenta e o número de iterações até que o critério de parada seja alcançado é menor.

O resultado indica que para 0,5% de ruído, o impacto do resultado na convergência do algoritmo não é tão relevante, o que não ocorre quando o ruído é elevado.

Ao adicionar ruído aos gradientes, que como já foi visto tem a tendência de piorar a convergência, todos os resultados sofreram uma piora.

Para esse problema, o FAIPA foi capaz de obter mais resultados viáveis e resultados um pouco melhores.

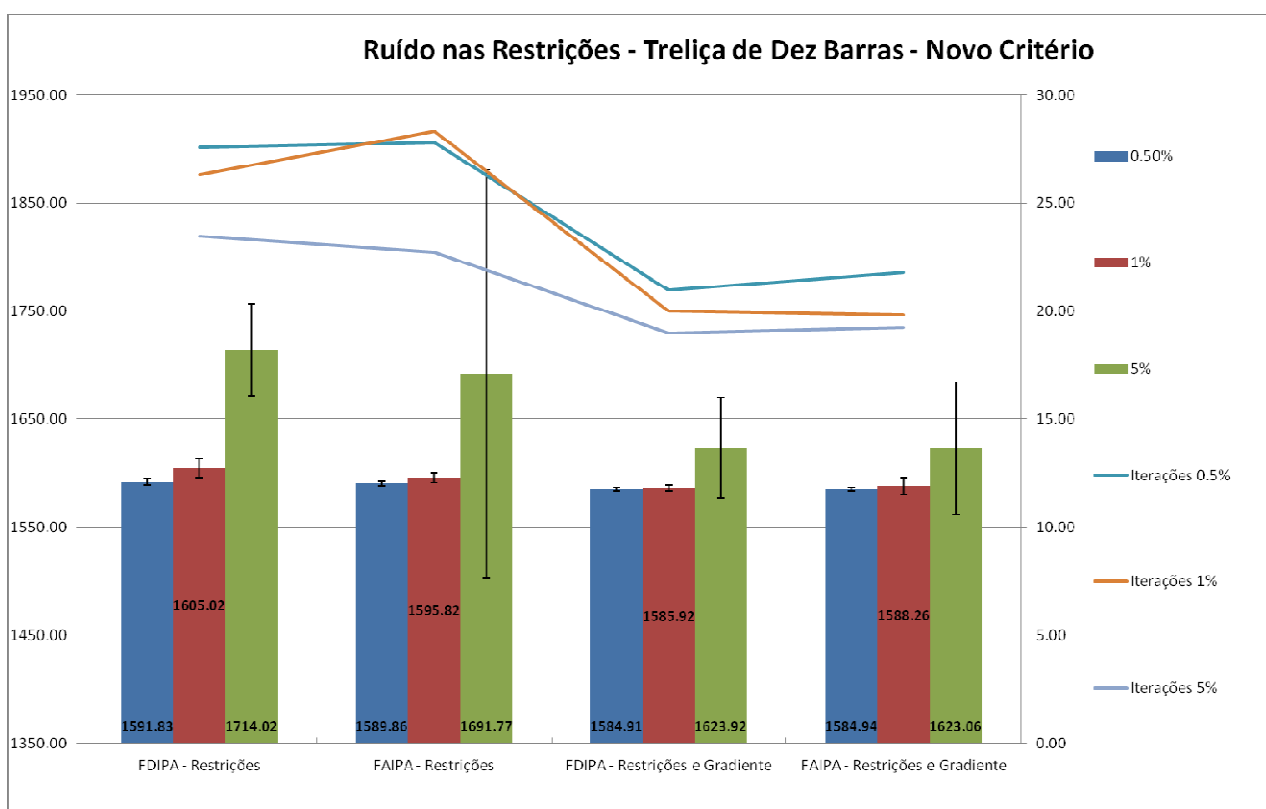


Figura 17 - Resultados do efeito do ruído nas restrições para treliça de dez barras com o novo critério de parada

Quando mudamos o critério de parada, notamos diminuição no valor da média dos resultados juntamente com a diminuição do número de soluções viáveis obtidas. Quando não há ruído nos gradientes, o número de iterações necessárias para alcançar um resultado é maior em comparação com o critério de parada original. Essa diferença desaparece para os resultados em que adicionamos ruído nos gradientes.

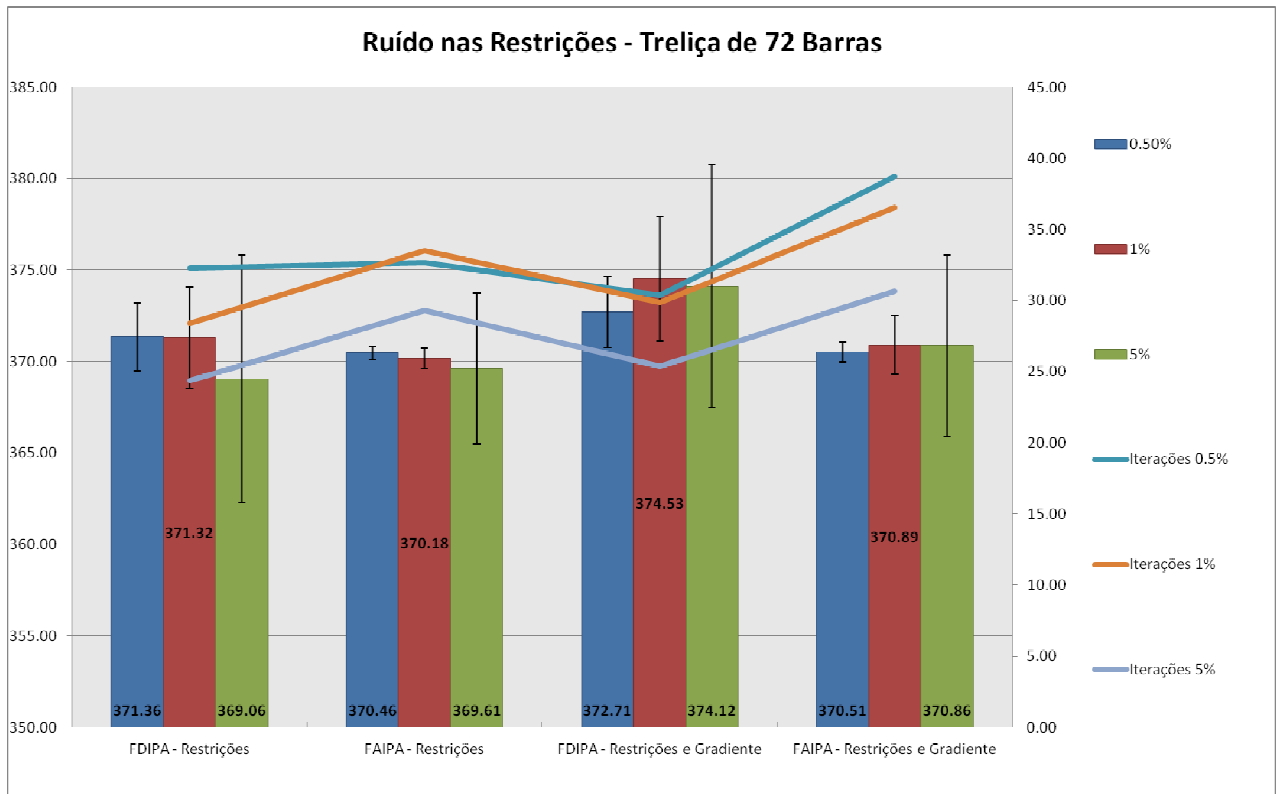


Figura 18 - Resultados do efeito do ruído nas restrições para treliça de 72 barras com o critério de parada original

O resultado acima é, talvez, o mais interessante do trabalho. Para a treliça de 72 barras, à medida que o nível de ruído aumenta, a média dos resultados obtidos diminui. Isso ocorre porque os resultados obtidos não são viáveis, um maior nível de ruído permite que valores menores para a função objetivo possam ser obtidos, como é possível ver na Figura 18.

Quando adicionamos ruído ao gradiente, a piora na convergência descaracteriza o efeito supracitado, fazendo com que o valor da média da função objetivo, mesmo inviável, pare de diminuir à medida que o ruído aumenta. Um aumento no número de iterações necessárias também pode ser observado.

Ao usar o novo critério de parada, a diminuição do valor da média dos resultados volta a cair à medida que o ruído aumenta, mesmo que haja também ruído no gradiente. Uma possível razão para isso é que o novo critério faz com que o resultado final esteja em um ponto mais próximo da fronteira da região viável. Na presença de ruído essa fronteira fica indeterminável e, em uma dada iteração, pode haver um aumento do tamanho da região viável causado pelo ruído.

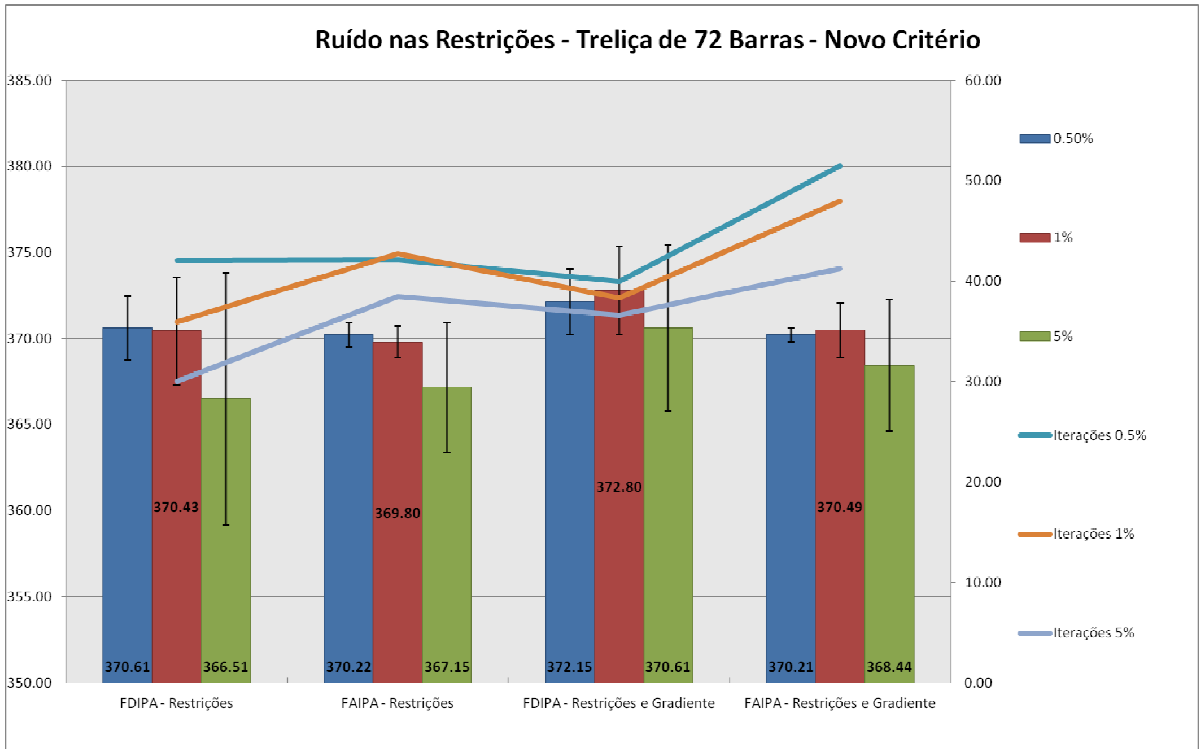


Figura 19 - Resultados do efeito do ruído nas restrições para treliza de 72 barras com o novo critério de parada

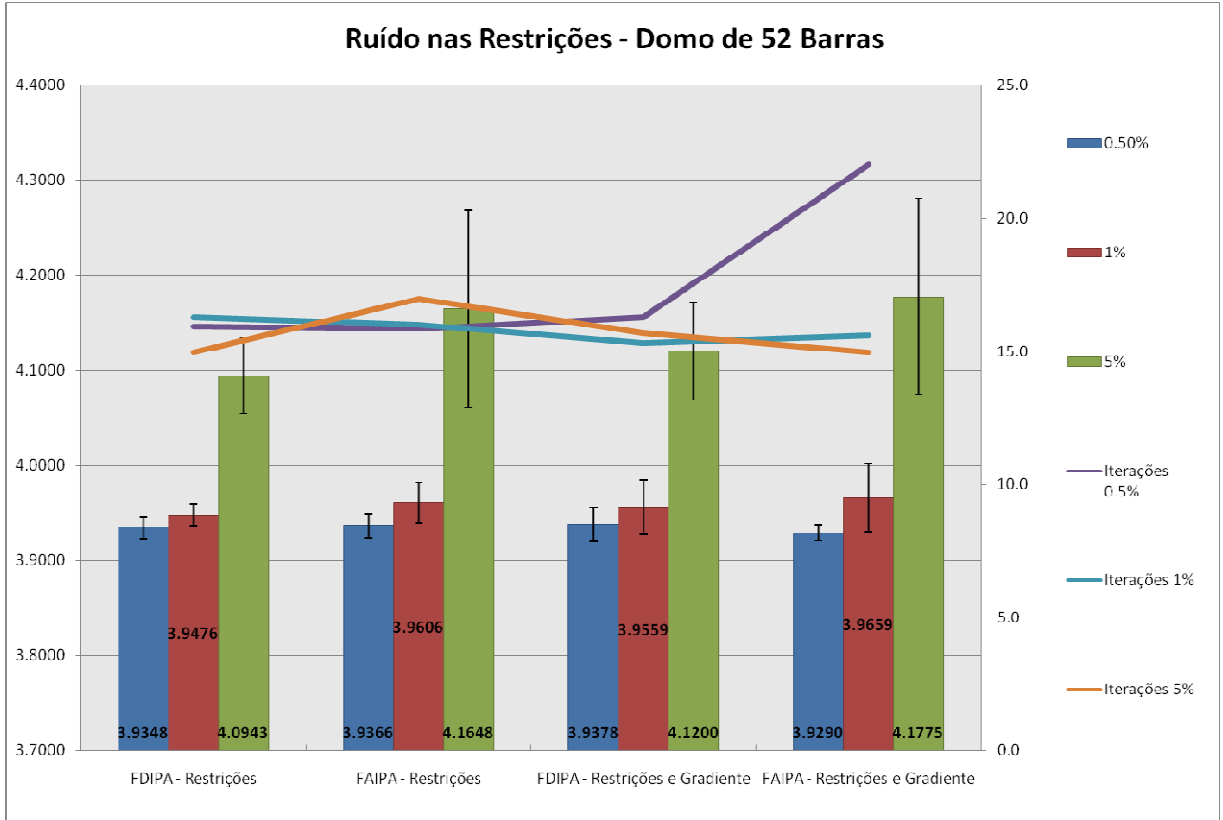


Figura 20 - Resultados do efeito do ruído nas restrições para o domo de 52 barras com o critério de parada original

Para o domo de 52 barras, a adição de ruído aos gradientes levou a resultados que são o oposto do que aconteceu com a treliça de 72 barras. Embora a viabilidade dos resultados tenha ficado comprometida, o número de resultados viáveis obtidos foi maior que para a treliça de 72 barras. À medida que o nível de ruído aumentava o valor médio dos resultados obtidos também aumentou e os valores não foram afetados pela presença de ruído nos gradientes. Isso indica que para o problema analisado, a presença de ruído nas restrições afetou a principalmente a convergência do algoritmo.

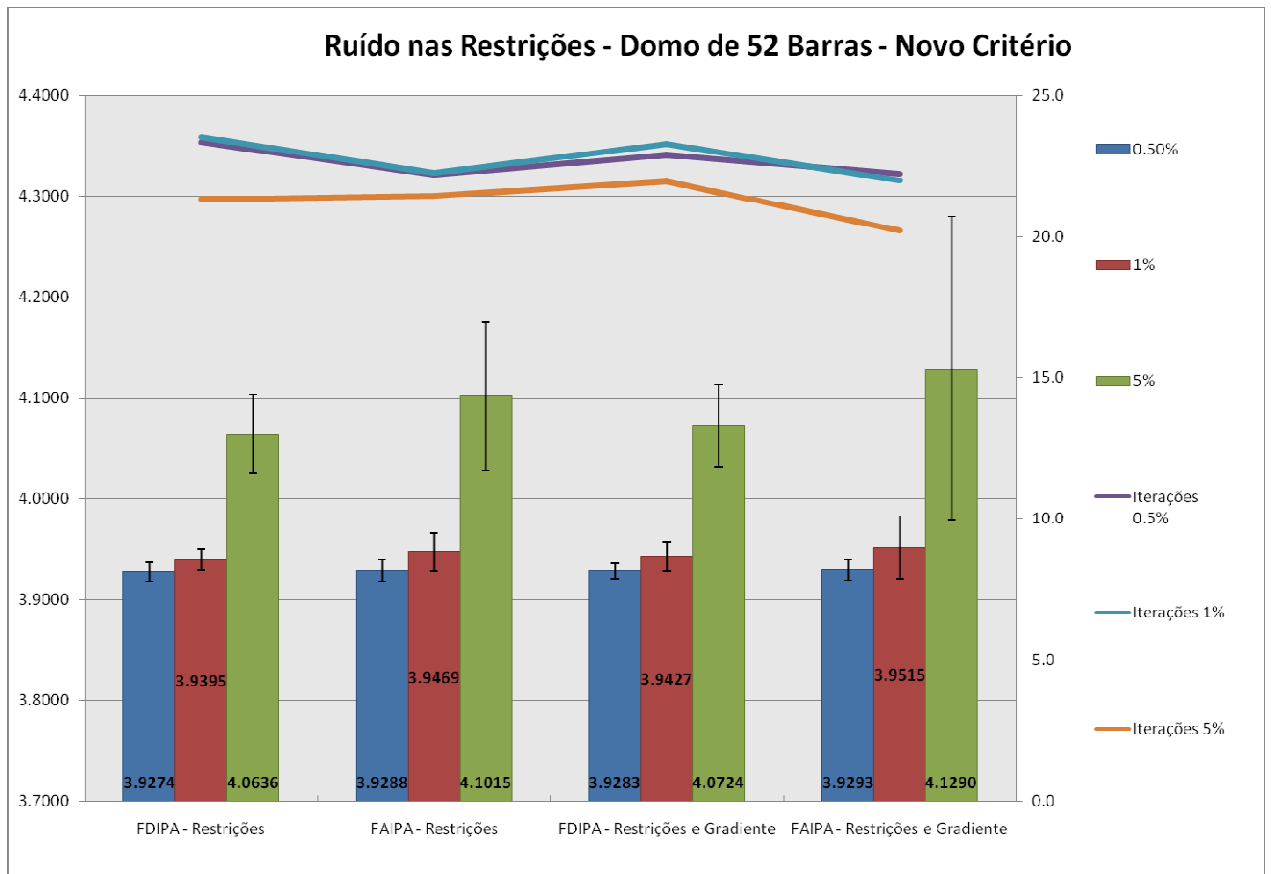


Figura 21 - Resultados do efeito do ruído nas restrições para o domo de 52 barras com o novo critério de parada

Quando mudamos o critério de parada, há uma leve melhora nos resultados e um significativo aumento no número de iterações. Afóra isso, a presença de ruído continua afetando a convergência do algoritmo.

### 9.3. Efeito do ruído em tudo

Adicionar ruído em todos os componentes do algoritmo pode nos dar uma idéia de como os algoritmos funcionariam em situações mais realistas e nos permite determinar qual seria a piora em sua precisão.

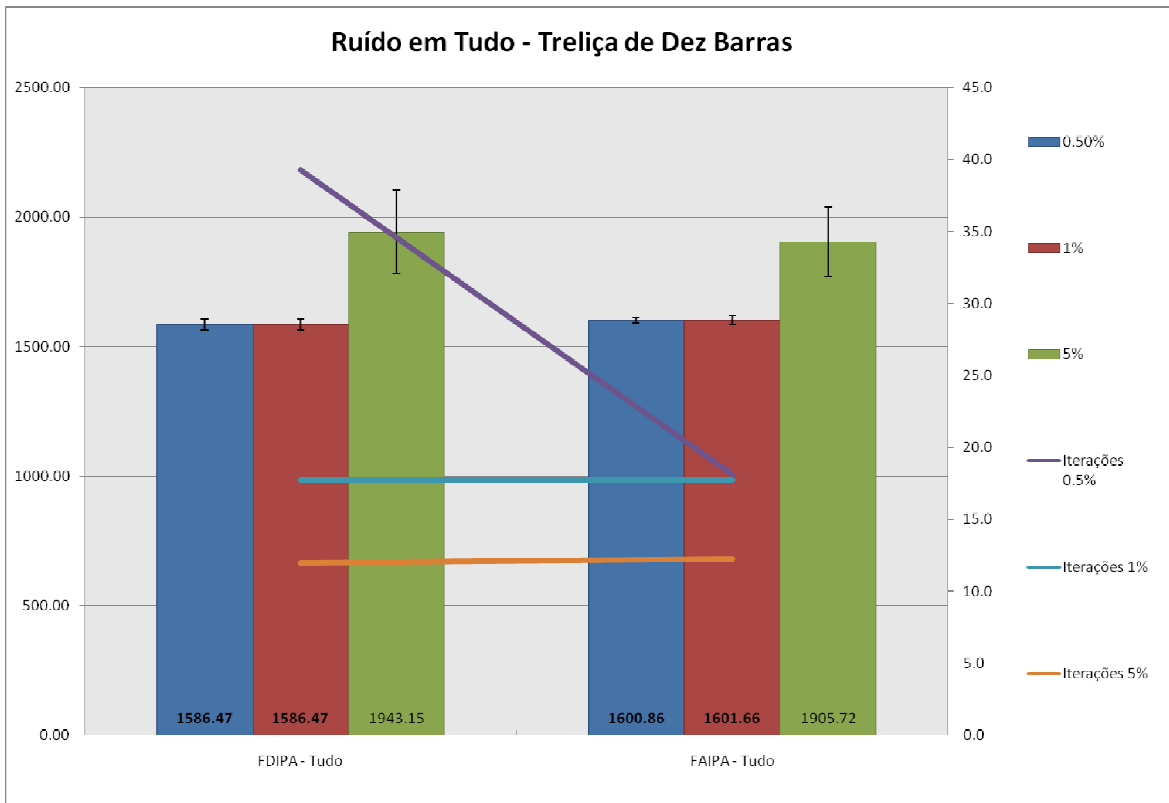


Figura 22 - Resultados do efeito do ruído em tudo para a trelça de dez barras com o critério de parada original

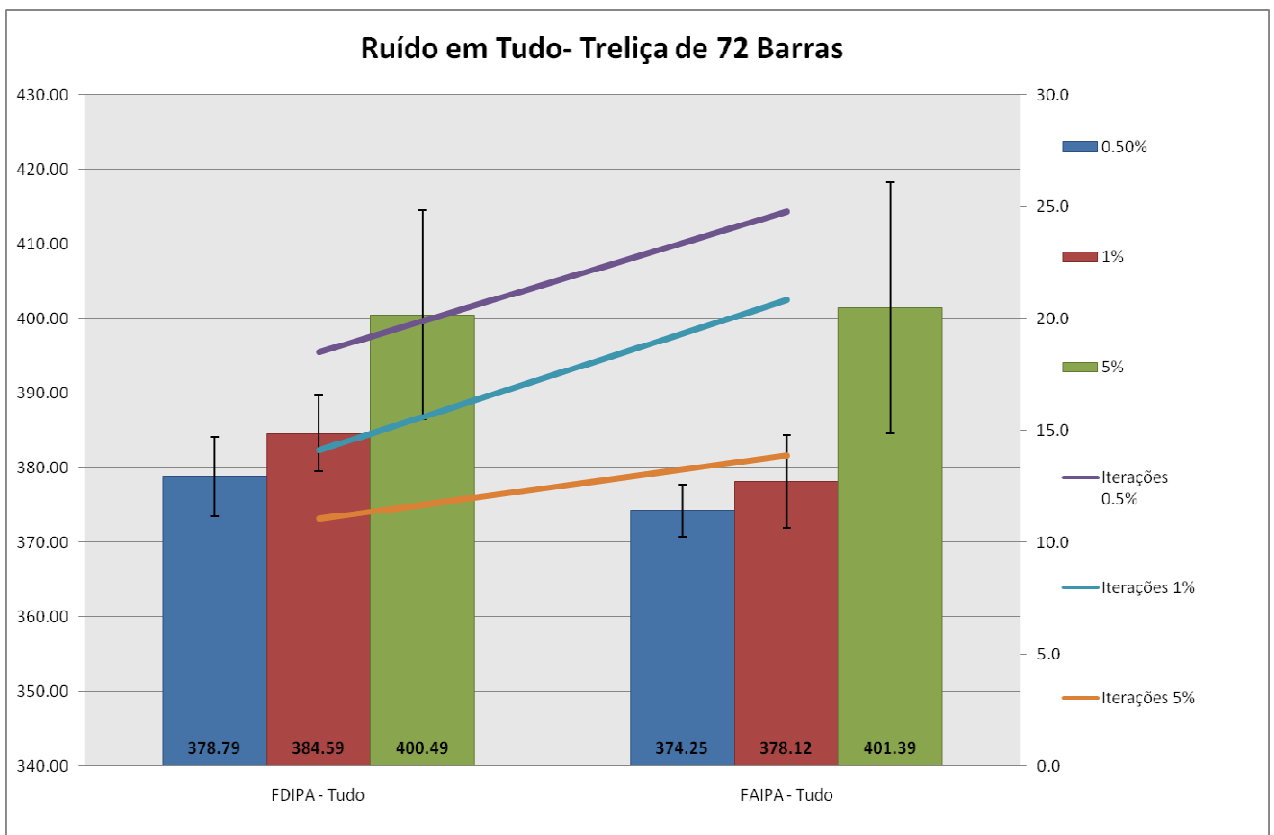


Figura 23 - Resultados do efeito do ruído em tudo para a trelça de 72 barras com o critério de parada original

Nos resultados acima observa-se que os algoritmos FAIPA e FDIPA são tolerantes ao ruído quando esse apresenta-se em níveis moderados, de 0,5 e 1%. Na verdade, na maioria dos casos, a piora na média dos resultados obtidos é um pouco maior que o nível de ruído adicionado para o caso analisado.

O número de iterações indica que o critério de parada foi alcançado antes do que seria quando não tivéssemos ruído. Isso indica que o fator determinante para que os resultados acima fosse alcançado foi a presença de ruído na função objetivo. Que como já foi discutido, leva uma falha na busca linear. Essa conclusão pode ser corroborada com os resultados apresentados no apêndice C.

#### **9.4. Conclusões**

Analisando os resultados expostos acima podemos constatar a funcionalidade dos algoritmos FAIPA e FDIPA para a maioria dos casos de ruído. Aparentemente, a situação mais grave ocorre quando o ruído afeta as restrições. Nesses casos foi difícil encontrar um resultado viável. Essa desvantagem poderia ser compensada com o uso de restrições mais conservativas, o que, infelizmente, comprometeria um pouco o resultado final.

Usar o critério de parada proposto para casos de ruído no gradiente nos casos acima se mostrou, em geral, inútil para melhorar os resultados. O que a análise dos resultados acima nos permite dizer com bastante clareza é o efeito que tem a adição de ruído aleatório em cada componente do algoritmo.

Os resultados acima parecem indicar que ruído em diferentes componentes do algoritmo tem diferentes efeitos:

- Ruído nas funções: tem efeito limitado. Leva a uma leve piora dos resultados e a uma convergência precoce.
- Ruído nas restrições: de uma maneira geral tem efeito limitado no resultado final, pode levar a uma convergência precoce e, dependendo do problema, a soluções inviáveis.
- Ruído nos gradientes: Tem pouco efeito no resultado final e na viabilidade das soluções, mas leva a uma piora na convergência.
- Os efeitos são similares entre os algoritmos FAIPA e FDIPA e o desempenho dos mesmos varia conforme o problema teste resolvido.

## 10. Efeito do Ruído em Algoritmos Sem Derivadas

### 10.1. Derivadas com Diferenças Finitas

Para compensar, na medida do possível, o efeito do ruído nas aproximações das derivadas, utilizou-se diferenças proporcionais ao nível de ruído. Como a mudança no valor das diferenças finitas também altera o valor final da função objetivo, abaixo estão valores de referência para a resolução dos problemas teste propostos para os diferentes níveis de ruído.

#### 10.1.1. Valor de Referência - Treliça de 10 Barras

<b>FDIPA</b>			
<b>Sem Ruído</b>	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>
Valor Final	1586.10	1589.47	1602.96
<b>Iterações</b>	20	17	15
<b>FAIPA</b>			
<b>Sem Ruído</b>	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>
Valor Final	1585.69	1585.69	1606.63
<b>Iterações</b>	23	23	18

Tabela 7 - Valores de referência para a treliça de 10 barras

#### 10.1.2. Valor de Referência - Treliça de 72 Barras

<b>FDIPA</b>			
<b>Sem Ruído</b>	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>
Valor Final	370.54	370.54	398.96
<b>Iterações</b>	30	29	14
<b>FAIPA</b>			
<b>Sem Ruído</b>	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>
Valor Final	370.54	370.55	383.49
<b>Iterações</b>	28	27	22

Tabela 8 - Valores de referência para a treliça de 72 barras

### 10.1.3. Valor de Referência - Domo de 52 Barras

<b>FDIPA</b>			
<b>Sem Ruído</b>	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>
<b>Valor Final</b>	3.9294	3.9864	4.5865
<b>Iterações</b>	13	12	10
<b>FAIPA</b>			
<b>Sem Ruído</b>	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>
<b>Valor Final</b>	3.9430	4.0000	4.4906
<b>Iterações</b>	13	12	14

Tabela 9 - Valores de referência para o domo de 52 barras



## 10.2. Ruído nas Restrições – Aproximação por Diferenças Finitas

### 10.2.1. Treliça de 10 Barras

<b>FDIPA</b>			
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>
Media	2688.85	2792.37	2896.55
Desvio Padrão	562.29	626.38	685.37
Soluções Viáveis	0.00	0.00	0.00
Soluções Viáveis (%)	0%	0%	0%
Media das Soluções Viáveis	2688.85	2825.88	2896.55
Pior Valor Viável	4194.47	2825.88	5474.30
Melhor Valor Viável	1848.65	2825.88	1827.19
<b>Número Médio de Iterações</b>	51.61	44.42	38.82
<b>Desvio Padrão</b>	21.10	20.46	16.20
<b>FAIPA</b>			
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>
Media	2774.84	2848.98	2865.76
Desvio Padrão	599.91	750.07	687.21
Soluções Viáveis	0.00	0.00	0.00
Soluções Viáveis (%)	0%	0%	0%
Media das Soluções Viáveis	2774.84	2848.98	2865.76
Pior Valor Viável	4271.90	5103.24	4888.24
Melhor Valor Viável	1798.18	1819.57	1842.85
<b>Número Médio de Iterações</b>	52.58	45.24	35.01
<b>Desvio Padrão</b>	27.94	21.46	16.22

Tabela 10 - Ruído nas restrições para treliça de dez barras com gradiente aproximado por diferenças finitas

A análise fica um pouco dificultada porque não foi possível chegar a nenhum resultado viável. Ainda assim, é possível notar que a convergência foi prejudicada e que a média dos resultados obtidos está distante do resultado ótimo.

### 10.2.2. Treliza de 72 Barras

<b>FDIPA</b>			
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>
Media	410.75	411.28	394.50
Desvio Padrão	8.12	11.89	15.27
Soluções Viáveis	0.00	0.00	0.00
Soluções Viáveis (%)	0%	0%	0%
Media das Soluções Viáveis	410.75	411.28	394.50
Pior Valor Viável	430.23	480.76	458.18
Melhor Valor Viável	392.08	390.34	367.06
<b>Número Médio de Iterações</b>	39.53	35.84	36.03
<b>Desvio Padrão</b>	11.27	10.34	8.57
<b>FAIPA</b>			
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>
Media	404.70	406.99	399.12
Desvio Padrão	7.54	11.12	27.40
Soluções Viáveis	0.00	0.00	0.00
Soluções Viáveis (%)	0%	0%	0%
Media das Soluções Viáveis	404.70	406.99	399.12
Pior Valor Viável	427.54	455.06	526.57
Melhor Valor Viável	383.83	381.95	370.87
<b>Número Médio de Iterações</b>	43.78	40.05	36.50
<b>Desvio Padrão</b>	14.20	12.25	10.29

Tabela 11 - Ruído nas restrições para treliza de 72 barras com gradiente aproximado por diferenças finitas

O ruído nas restrições comprometeu menos o resultado do que o ruído na função objetivo. No entanto, não é possível fazer uma análise muito mais criteriosa, pois não foi obtido nenhum resultado viável.

Como visto anteriormente, imprecisões no gradiente das restrições comprometeram a convergência dos algoritmos.

### 10.2.3. Domo de 52 Barras

<b>FDIPA</b>			
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>
Media	4.1174	4.0685	4.7405
Desvio Padrão	0.6763	0.2149	0.4079
Soluções Viáveis	1.0000	2.0000	2.0000
Soluções Viáveis (%)	1%	2%	2%
Media das Soluções Viáveis	4.0284	4.0118	4.5697
Pior Valor Viável	4.0284	4.0319	4.6130
Melhor Valor Viável	4.0284	3.9916	4.5264
<b>Número Médio de Iterações</b>	19.5100	17.6500	17.8300
<b>Desvio Padrão</b>	6.4456	4.8894	5.6837
<b>FAIPA</b>			
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>
Media	4.0082	4.0690	4.7716
Desvio Padrão	0.1157	0.1707	0.4089
Soluções Viáveis	2.0000	3.0000	1.0000
Soluções Viáveis (%)	2%	3%	1%
Media das Soluções Viáveis	3.9535	3.9847	4.3572
Pior Valor Viável	3.9653	3.9958	4.3572
Melhor Valor Viável	3.9418	3.9781	4.3572
<b>Número Médio de Iterações</b>	19.2600	17.8200	18.5900
<b>Desvio Padrão</b>	5.2544	4.9815	6.4528

Tabela 12 - Ruído nas restrições para domo de 52 barras com gradiente aproximado por diferenças finitas

O efeito do ruído no domo de 52 barras foi muito parecido com o que ocorreu no problema de 72 barras. A maioria dos resultados foi inviável e a convergência foi comprometida.

Tomando somente os resultados viáveis para fazer uma avaliação dos algoritmos FAIPA e FDIPA, pode-se concluir que o desempenho de ambos os algoritmos foi próximo do que permitia a aproximação por diferenças finitas.

### 10.3. Ruído na Função Objetivo e nas Restrições – Aproximação por Diferenças Finitas

#### 10.3.1. Treliça de 10 Barras

<b>FDIPA</b>			
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>
Media	12253.00	12272.20	12362.80
Desvio Padrão	936.21	842.14	880.61
Soluções Viáveis	100.00	100.00	100.00
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%
Media das Soluções Viáveis	12253.00	12272.20	12362.80
Pior Valor Viável	12652.28	12718.37	13526.32
Melhor Valor Viável	8424.05	9187.28	8948.59
<b>Número Médio de Iterações</b>	4.26	4.67	4.75
<b>Desvio Padrão</b>	2.25	2.09	1.82
<b>FAIPA</b>			
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>
Media	12044.60	11822.07	12258.46
Desvio Padrão	1191.79	1417.26	1149.22
Soluções Viáveis	99.00	100.00	99.00
Soluções Viáveis (%)	99%	100%	99%
Media das Soluções Viáveis	12067.16	11822.07	12289.90
Pior Valor Viável	12657.47	12710.31	13323.02
Melhor Valor Viável	7396.87	6889.96	6254.24
<b>Número Médio de Iterações</b>	4.90	5.40	4.83
<b>Desvio Padrão</b>	2.71	2.60	2.12

Tabela 13 - Ruído na função objetivo e nas restrições para treliça de dez barras com gradiente aproximado por diferenças finitas

A combinação de ruído nas restrições e na função objetivo repete o resultado encontrado para o caso em que há somente ruído na função objetivo.

### 10.3.2. Treliza de 72 Barras

<b>FDIPA</b>			
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>
Media	1016.43	985.57	1160.38
Desvio Padrão	507.95	510.18	439.28
Soluções Viáveis	84.00	89.00	93.00
Soluções Viáveis (%)	84%	89%	93%
Media das Soluções Viáveis	1131.31	1053.09	1192.40
Pior Valor Viável	1713.98	1726.11	1806.63
Melhor Valor Viável	400.88	385.74	427.38
<b>Número Médio de Iterações</b>	30.56	28.93	13.54
<b>Desvio Padrão</b>	29.78	26.56	10.40
<b>FAIPA</b>			
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>
Media	1032.92	1062.11	1187.03
Desvio Padrão	537.69	490.88	437.00
Soluções Viáveis	81.00	95.00	94.00
Soluções Viáveis (%)	81%	95%	94%
Media das Soluções Viáveis	1176.73	1094.39	1214.36
Pior Valor Viável	1720.07	1729.79	1811.42
Melhor Valor Viável	385.33	398.60	429.11
<b>Número Médio de Iterações</b>	29.75	23.53	14.65
<b>Desvio Padrão</b>	29.09	22.83	12.07

Tabela 14 - Ruído na função objetivo e nas restrições para treliza de 72 barras com gradiente aproximado por diferenças finitas

Os resultados obtidos são uma mistura dos efeitos isolados do ruído na função objetivo e nas restrições. A maioria dos resultados encontrados foi viável, mas não todos e a convergência foi um pouco prejudicada para ruído moderado. Considerando-se somente os melhores resultados viáveis, pode-se considerar que eles estão próximos dos resultados sem ruído.

### 10.3.3. Domo

<b>FDIPA</b>			
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>
Media	4.2487	4.2790	5.1969
Desvio Padrão	0.7645	0.5246	0.6911
Soluções Viáveis	5.0000	11.0000	29.0000
Soluções Viáveis (%)	5%	11%	29%
Media das Soluções Viáveis	4.0339	4.0674	5.1984
Pior Valor Viável	4.2237	4.2198	6.8050
Melhor Valor Viável	3.9537	3.9837	4.4209
<b>Número Médio de Iterações</b>	19.2000	16.7000	13.1800
<b>Desvio Padrão</b>	5.8517	3.8730	2.8155
<b>FAIPA</b>			
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>
Media	4.2036	4.2056	5.1463
Desvio Padrão	0.3496	0.3092	0.4949
Soluções Viáveis	9.0000	8.0000	34.0000
Soluções Viáveis (%)	9%	8%	34%
Media das Soluções Viáveis	4.0292	4.2450	5.1426
Pior Valor Viável	4.2321	5.4160	6.2791
Melhor Valor Viável	3.9397	3.9619	4.4807
<b>Número Médio de Iterações</b>	19.0500	17.1600	13.5300
<b>Desvio Padrão</b>	4.8625	3.9408	2.8761

Tabela 15 - Ruído na função objetivo e nas restrições para domo de 52 barras com gradiente aproximado por diferenças finitas

Nesse problema, a quantidade de resultados viáveis encontrados foi pequena, ainda que seja maior do que quando temos ruído somente na função objetivo. Mais uma vez os melhores resultados viáveis demonstram o bom funcionamento dos algoritmos na presença de ruído.

## 10.4. Ruído nas Restrições - Aproximação por Interpolação Linear

### 10.4.1. Treliça de 10 Barras

FDIPA				
	0,5% Ruído	1% Ruído	5% Ruído	Sem Ruído
Media	2176.72	2704.83	1612.42	1584.00
Desvio Padrão	477.90	751.71	56.22	0.00
Soluções Viáveis	0.00	0.00	21.00	100.00
Soluções Viáveis (%)	0%	0%	21%	100%
Media das Soluções Viáveis	2176.72	2704.83	1603.35	-
Pior Valor Viável	4225.99	5197.35	1620.35	-
Melhor Valor Viável	1679.21	1779.78	1593.07	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	81.77	83.74	17.62	<b>28.00</b>
<b>Desvio Padrão</b>	35.28	36.55	2.81	<b>0.00</b>
FAIPA				
	0,5% Ruído	1% Ruído	5% Ruído	Sem Ruído
Media	2077.34	2787.16	1702.28	1584.00
Desvio Padrão	327.24	733.60	58.34	0.00
Soluções Viáveis	0.00	0.00	9.00	100.00
Soluções Viáveis (%)	0%	0%	9%	100%
Media das Soluções Viáveis	2077.34	2787.16	1691.54	-
Pior Valor Viável	3684.34	5524.02	1748.81	-
Melhor Valor Viável	1714.39	1831.18	1658.83	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	80.88	81.53	18.78	<b>25.00</b>
<b>Desvio Padrão</b>	28.96	33.51	5.09	<b>0.00</b>

Tabela 16 - Ruído nas restrições para treliça de dez barras com gradiente aproximado por interpolação linear

Não foi possível encontrar resultados próximo do ótimo para o problema de 10 barras usando aproximação por interpolação linear.

#### 10.4.2. Treliza de 72 Barras

<b>FDIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	407.22	635.01	1081.47	370.54
Desvio Padrão	21.71	40.72	63.56	0.00
Soluções Viáveis	0.00	0.00	0.00	100.00
Soluções Viáveis (%)	0%	0%	0%	100%
Media das Soluções Viáveis	407.22	635.01	1081.47	-
Pior Valor Viável	508.93	734.96	1350.95	-
Melhor Valor Viável	373.88	545.27	952.58	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	100.21	71.01	21.81	<b>32.00</b>
<b>Desvio Padrão</b>	25.84	27.88	7.79	<b>0.00</b>
<b>FAIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	401.53	612.05	1072.20	370.54
Desvio Padrão	20.37	49.57	62.34	0.00
Soluções Viáveis	2.00	1.00	0.00	100.00
Soluções Viáveis (%)	2%	1%	0%	100%
Media das Soluções Viáveis	454.73	655.28	1072.20	-
Pior Valor Viável	498.05	655.28	1245.75	-
Melhor Valor Viável	400.43	655.28	943.26	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	91.72	78.90	20.51	<b>33.00</b>
<b>Desvio Padrão</b>	26.88	31.92	7.48	<b>0.00</b>

Tabela 17 - Ruído nas restrições para treliza de 72 barras com gradiente aproximado por interpolação linear

Para níveis de ruído moderado, foi possível alcançar resultados próximos do ótimo se levarmos em conta o melhor resultado viável. Outra vantagem da interpolação linear é que todos os resultados encontrados foram viáveis.

Para o nível de 5% de ruído, pode-se considerar que a aproximação por interpolação linear não funcionou.



### 10.4.3. Domo de 52 Barras

<b>FDIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	4.1208	4.4692	7.8866	3.9138
Desvio Padrão	0.2062	0.4413	0.7843	0.0000
Soluções Viáveis	1.0000	0.0000	4.0000	100.0000
Soluções Viáveis (%)	1%	0%	4%	100%
Media das Soluções Viáveis	3.9962	4.4692	7.3975	-
Pior Valor Viável	4.0054	6.3548	7.6323	-
Melhor Valor Viável	3.9870	3.9591	7.1562	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	18.9100	23.1100	23.1200	<b>16.0000</b>
<b>Desvio Padrão</b>	5.8657	7.4953	7.8692	<b>0.0000</b>
<b>FAIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	3.9836	4.0951	4.1423	3.9138
Desvio Padrão	0.0739	0.2079	0.0752	0.0000
Soluções Viáveis	6.0000	5.0000	11.0000	100.0000
Soluções Viáveis (%)	6%	5%	11%	100%
Media das Soluções Viáveis	3.9522	3.9874	4.2106	-
Pior Valor Viável	3.9944	4.0928	4.4274	-
Melhor Valor Viável	3.9336	3.9506	4.1282	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	20.0600	20.5100	15.1100	<b>15.0000</b>
<b>Desvio Padrão</b>	5.1342	6.2385	4.3552	<b>0.0000</b>

Tabela 18 - Ruído nas restrições para o domo de 52 barras com gradiente aproximado por interpolação linear

Em todos os níveis de ruído foi possível chegar a um resultado muito próximo do ótimo, no entanto, para o caso de 5% de ruído a dispersão foi elevada. Vale ressaltar que todos os resultados encontrados foram viáveis.

## 10.5. Ruído na Função Objetivo e nas Restrições

### 10.5.1. Treliça de 10 Barras

FDIPA				
	0,5% Ruído	1% Ruído	5% Ruído	Sem Ruído
Media	11850.27	11889.12	12554.01	1584.00
Desvio Padrão	1214.90	1105.34	312.53	0.00
Soluções Viáveis	100.00	100.00	100.00	100.00
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%	100%
Media das Soluções Viáveis	11850.27	11889.12	12554.01	-
Pior Valor Viável	12670.95	12647.19	13132.13	-
Melhor Valor Viável	6793.21	8065.19	9752.48	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	5.64	5.35	4.64	<b>28.00</b>
<b>Desvio Padrão</b>	3.04	3.00	1.83	<b>0.00</b>
FAIPA				
	0,5% Ruído	1% Ruído	5% Ruído	Sem Ruído
Media	11922.16	11796.62	12560.62	1584.00
Desvio Padrão	1138.89	1449.09	276.12	0.00
Soluções Viáveis	100.00	100.00	100.00	100.00
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%	100%
Media das Soluções Viáveis	11922.16	11796.62	12560.62	-
Pior Valor Viável	12671.73	12640.54	12804.96	-
Melhor Valor Viável	7790.92	6408.26	9931.41	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	5.60	5.78	4.47	<b>25.00</b>
<b>Desvio Padrão</b>	2.89	3.05	1.78	<b>0.00</b>

Tabela 19 - Ruído na função objetivo e nas restrições para treliça de dez barras com gradiente aproximado por interpolação linear

Não foi possível encontrar resultados próximo do ótimo para o problema de 10 barras usando aproximação por interpolação linear.

### 10.5.2. Treliza de 72 Barras

<b>FDIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	802.79	842.74	1668.07	370.54
Desvio Padrão	322.15	315.09	85.39	0.00
Soluções Viáveis	94.00	99.00	100.00	100.00
Soluções Viáveis (%)	94%	99%	100%	100%
Media das Soluções Viáveis	819.56	846.62	1668.07	-
Pior Valor Viável	1715.45	1703.79	1789.19	-
Melhor Valor Viável	397.47	453.05	1375.82	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	40.55	39.39	4.91	<b>32.00</b>
<b>Desvio Padrão</b>	28.41	30.39	2.17	<b>0.00</b>
<b>FAIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	854.37	805.62	1685.04	370.54
Desvio Padrão	354.74	348.71	65.92	0.00
Soluções Viáveis	96.00	92.00	100.00	100.00
Soluções Viáveis (%)	96%	92%	100%	100%
Media das Soluções Viáveis	873.29	834.39	1685.04	-
Pior Valor Viável	1707.12	1707.41	1782.02	-
Melhor Valor Viável	420.55	408.09	1419.92	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	43.28	44.48	4.94	<b>33.00</b>
<b>Desvio Padrão</b>	34.24	31.62	2.05	<b>0.00</b>

Tabela 20 - Ruído na função objetivo e nas restrições para treliza de 72 barras com gradiente aproximado por interpolação linear

A mistura de ruído na função objetivo e nas restrições comprometeu o resultado encontrado. Mesmo os melhores resultados viáveis são piores que seus equivalentes quando se usa a aproximação por diferenças finitas.

Embora a convergência também tenha sido prejudicada, o que pode ser percebido pelo número médio de iterações, o percentual de resultados viáveis foi maior.

### 10.5.3. Domo

<b>FDIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	4.3488	4.2820	14.9186	3.9138
Desvio Padrão	0.9067	0.3006	5.2485	0.0000
Soluções Viáveis	8.0000	5.0000	86.0000	100.0000
Soluções Viáveis (%)	8%	5%	86%	100%
Media das Soluções Viáveis	4.0675	4.1579	15.6366	-
Pior Valor Viável	4.2311	4.3984	23.2984	-
Melhor Valor Viável	3.9747	3.9834	6.6941	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	17.8000	17.8600	12.6800	<b>16.0000</b>
<b>Desvio Padrão</b>	5.7384	5.0313	7.9174	<b>0.0000</b>
<b>FAIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	4.1013	4.0666	13.9438	3.9138
Desvio Padrão	0.2858	0.1607	4.8200	0.0000
Soluções Viáveis	9.0000	11.0000	79.0000	100.0000
Soluções Viáveis (%)	9%	11%	79%	100%
Media das Soluções Viáveis	4.0691	4.0629	13.9739	-
Pior Valor Viável	4.4075	4.2826	21.9305	-
Melhor Valor Viável	3.9485	3.9566	6.0869	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	19.0000	18.8000	14.7900	<b>15.0000</b>
<b>Desvio Padrão</b>	4.4107	4.1072	9.8158	<b>0.0000</b>

Tabela 21 - Ruído na função objetivo e nas restrições para domo de 52 barras com gradiente aproximado por interpolação linear

Para níveis moderados de ruído, a aproximação por interpolação linear retornou bons resultados quando comparada à aproximação por diferenças finitas. Vale ressaltar que os melhores valores viáveis são próximos do resultado ótimo quando não temos adição de ruído.

Considerando o número de resultados viáveis, ele é um pouco maior quando usamos interpolação, no entanto, particularmente para o caso em que há 5% de ruído, isso provavelmente se deve ao fato de que os resultados encontrados são piores, portanto, mais distantes das restrições.

## 10.6. Conclusões

Analisando somente a média dos resultados obtidos, poderíamos ser levados a concluir que os algoritmos FAIPA e FDIPA não são capazes de funcionar com os gradientes aproximados na presença de ruído. No entanto, o melhor resultado viável encontrado em cada problema indica o contrário: que os algoritmos não só são capazes de funcionar, mas também são capazes de entregar resultados próximos do correto. O problema está em garantir que uma determinada quantidade de amostras alcance bons resultados e que os algoritmos funcionem bem para todos os problemas. Vemos, por exemplo, que a aproximação por diferenças finitas não funcionou no problema teste da treliça de dez barras, embora esse fosse o problema teste mais simples.

Comparando os dois métodos de aproximação, concluímos que, em geral, o método de interpolação tem melhor desempenho para níveis de 0,5% e 1% de ruído, e que o método de diferenças finitas sofre menos na presença de 5% de ruído. Vale ressaltar que, por não precisar ser atualizado a cada iteração, a interpolação linear pode ser computacionalmente menos custoso.

## 11. Conclusões Finais

Após uma extensiva análise dos resultados, é possível chegar a diversas conclusões sobre o funcionamento dos algoritmos FAIPA e FDIPA na presença de ruído. Cada componente usado na resolução dos problemas foi escrutinado para que o efeito do ruído em um componente isolado pudesse ser mensurado.

Embora já tenham sido comentadas algumas conclusões ao longo deste trabalho, é importante ratificá-las nesta parte final. Algumas das conclusões possibilitadas pela análise são concretas, podem servir como uma regra sobre o funcionamento do FAIPA e FDIPA e também de outros algoritmos tipo Newton. Outras conclusões não são tão fortes, seja pela pouca quantidade de problemas teste ou pelo tipo de problema analisado.

Quando foi adicionado ruído somente na função objetivo, pôde-se notar que ele tem pouco efeito sobre o desempenho do algoritmo e afeta muito pouco seu funcionamento. Imaginava-se que os resultados eram obtidos devido à ativação precoce do critério de parada, mas como os resultados não melhoraram quando o critério foi alterado, o provável é que os resultados sejam fruto de problemas na determinação da direção de busca.

Entretanto, ruído somente na função objetivo é uma situação que não poderia ser encontrada na prática. Numa situação mais realista, haveria, adicionalmente, ruído pelo menos no gradiente da função objetivo. Quando combinado com ruído no gradiente, vemos que há uma piora na qualidade dos resultados, principalmente para níveis mais altos de ruído. É interessante notar que o efeito combinado do ruído na função objetivo e em seus gradientes leva a resultados piores que cada caso isoladamente. Poderíamos concluir que, em termos absolutos, temos um grau de incerteza maior se tivermos uma mesma quantidade de ruído em dois componentes diferentes. No entanto, os resultados parecem indicar que soma resultante é maior que a simples adição dos produtos.

Ruído somente no gradiente da função objetivo é um caso que pode acontecer na prática, por exemplo, quando usamos métodos adjuntos para encontrar o gradiente [6]. Os resultados mostram que ele tem efeito limitado sobre o desempenho dos algoritmos. Todos os resultados encontrados mostraram pouca variação com relação ao valor sem ruído, mesmo para casos em que o ruído podia chegar a 10%.

Quando tratamos de ruído nas restrições, embora também seja um caso pouco realista, os efeitos da adição de ruído se fazem mais evidentes. Os resultados encontrados quando havia ruído somente nas restrições indicam que seu efeito é mais relevante do que quando o ruído está na função objetivo. Mais que isso: a presença de ruído afeta o desempenho do algoritmo de duas formas distintas e opostas. Por um lado, dificulta a obtenção de resultados viáveis, levando a média dos valores encontrados a diminuir à medida que aumenta o nível de ruído; por outro, prejudica o cálculo da direção de busca, afetando a convergência do algoritmo e levando a média dos resultados obtidos a ficar maior que o valor de referência.

Se a consequência principal do ruído nas restrições será a falta de resultados viáveis ou a piora na convergência, parece depender do problema analisado. Como no

problema mais simples analisado, a treliça de dez barras, prevalece o efeito de piora na convergência e no mais complexo prevaleceu a dificuldade de encontrar resultados viáveis, pode ser que essa tendência ocorra também para outros problemas teste. Contudo, a baixa quantidade de problemas teste disponível no trabalho não nos permite testar essa hipótese.

Combinar os efeitos do ruído nas restrições e em seus gradientes, como esperado, magnifica o efeito de piora na convergência, levando a um aumento na média dos resultados alcançados e da quantidade de soluções viáveis. Embora a falta de resultados viáveis atrapalhe nossas conclusões, é possível afirmar que o efeito de piora na convergência causada pelo ruído presente nas restrições é mais evidente para níveis moderados de ruído.

O efeito do ruído somente no gradiente das restrições não chega a levar a resultados muito piores do que quando não temos ruído. O impacto é muito maior do que quando temos apenas ruído no gradiente da função objetivo. Ainda assim, foi possível chegar a 10% de ruído sem que o algoritmo parasse de funcionar. Vale notar que a piora na média dos resultados no pior caso de ruído foi muito menor que 10%: ficou em torno de 1%. Isso demonstra que os algoritmos funcionam muito bem com ruído nos gradientes, mesmo que ele esteja em altos níveis.

Usando somente três problemas teste é difícil afirmar qual característica do problema será mais relevante para o resultado obtido na presença de ruído. Ainda, assim, pode-se dizer que, quando há ruído no gradiente das restrições, parece ser o número de restrições do problema que determinará o impacto do ruído na média dos resultados, e não o número de variáveis. A nossa treliça de 10 barras (com 36 restrições) foi a que teve os resultados menos afetados, enquanto a treliça de 72 barras (com 240 restrições) foi a que teve os resultados mais afetados.

Quando temos ruído somente nos gradientes, a direção de busca em cada iteração, embora uniformemente viável, dificilmente é a melhor possível. A consequência disso é que a solução do problema de otimização acaba convergindo para um valor muito próximo da fronteira da região viável e de lá, não consegue sair. Esse efeito fica evidente quando mudamos o critério de parada sem que houvesse grandes ganhos de desempenho. Com o critério de parada menos rígido, o valor das restrições fica próximo à precisão de ponto flutuante do computador, ainda assim o valor da função objetivo fica um pouco maior que o valor obtido para o caso sem ruído. Não se pode dizer que o ponto final satisfaz as condições de KKT, pois caso satisfizesse, o valor da direção de busca seria próximo de zero.

A partir dos resultados obtidos, não se pode afirmar que o efeito da combinação de ruído no gradiente das restrições com ruído no gradiente da função objetivo seria maior do que a soma deles isoladamente. Os resultados encontrados para esse último caso são similares aos resultados encontrados quando só havia ruído no gradiente das restrições.

Além das conclusões para cada componente do algoritmo, pode-se falar um pouco mais da relação entre desempenho dos algoritmos e o nível de ruído. Como era de se esperar, à medida que o ruído aumentava, era perceptível a piora nos resultados. Apesar disso, o componente em que ruído é adicionado, e uma maneira geral, tem

mais importância do que o nível de ruído. Mesmo chegando a altos níveis de ruído nos gradientes, chegamos a resultados piores quando havia somente ruído nas restrições ou na função objetivo.

Apesar do grande número de amostras analisadas, algumas hipóteses são difíceis de verificar. Não é possível dizer, por exemplo, que o algoritmo FDIPA obteve desempenho superior ao FAIPA. Mesmo analisando um problema-teste isoladamente, não é possível traçar uma tendência. Testes estatísticos poderiam ser utilizados, mas a grande diferença na dispersão dos resultados obtidos inviabiliza o uso de testes mais simples. Observa-se, quando não temos ruído, que o desempenho dos algoritmos varia um pouco dependendo do problema. Se o FDIPA precisou de menos iterações que o FAIPA para otimizar as treliças de dez e 72 barras, para o domo de 52 barras ocorreu o oposto.

Salvo algumas exceções, a complexidade (número de variáveis ou de restrições) do problema também nos diz pouco sobre como o algoritmo vai funcionar. Em alguns casos, o problema de 10 barras, o mais simples (embora não seja o que tem menos variáveis) foi o que demonstrou pior desempenho. Chama a atenção os casos em que foram utilizadas aproximações dos gradientes, em que, muitas vezes, nenhum dos algoritmos sequer funcionou (teve só uma ou duas iterações).

As variações dos algoritmos que usam gradientes aproximados, testados com nossas treliças, mostram uma área em que, com algum estudo, pode-se colher bons resultados. De uma maneira geral, o desempenho dos algoritmos foi bastante ruim, especialmente quando havia altos níveis de ruído. Em um caso real, considerando a média dos resultados obtidos, seria difícil usar resultados com essa qualidade. Ainda assim, apesar das dificuldades, é possível notar que os algoritmos são capazes de funcionar nessas condições.

Também podemos observar que para níveis moderados de ruído, entre as cem amostras foi possível alcançar valores muito próximo dos corretos. Com aproximação por diferenças finitas, quando se usava diferenças muito pequenas, os algoritmos travavam em uma ou duas iterações. No entanto, quando aumentamos o tamanho o tamanho mínimo permissível para as diferenças foi possível chegar a melhores resultados.

O uso de diferentes critérios de parada nos permitiu perceber como aspectos como o tamanho do passo, da direção de busca e do lagrangeano influenciam o resultado final. Acima de tudo, a mudança do critério de parada nos permitiu perceber que esses aspectos tem efeito limitado. Como os algoritmos são programados para parar quando a direção de busca alcança um número máximo de iterações, ao usar um critério de parada menos rígido, o resultado passou a ser alcançado quando o ponto analisado estava fora da região viável, ou quando a direção encontrada não era de descida. Isso evidencia que o principal gargalo para o bom funcionamento dos algoritmos na presença de ruído é a etapa de busca linear.

Para melhorar o desempenho dos algoritmos uma opção é desenvolver um novo método de busca linear, que seja menos sujeito a efeitos do ruído, principalmente nas restrições e na determinação da direção de busca. Ao contrário do método atual, o



novo método deve ser capaz de funcionar quando o ponto avaliado estiver próximo à superfície que separa a região viável da região inviável.

Algumas variações do método de busca linear foram tentadas ao longo do trabalho, mas por não se mostrarem bem sucedidas, foram descartadas. Inicialmente foi utilizada uma variação em que o cálculo da direção de busca era compensado proporcionalmente à presença de ruído, para que a análise ficasse o máximo possível dentro da região viável [3], depois passou-se a variar a curvatura ( $\rho$ ) quando a busca linear falhasse, de forma a tentar manter a direção de descida ou uniformemente viável, dependendo de qual era a situação crítica. A um grande custo computacional, substituiu-se a busca linear por algoritmos heurísticos e *pattern search* que pudessem determinar simultaneamente um valor para o passo  $t$  e para  $\rho$ .

Nenhuma dessas tentativas, porém, foi capaz de melhorar os resultados. Compensar a direção de busca para que ela se mantivesse uniformemente viável levava a resultados um pouco piores, possivelmente porque a direção obtida não era de descida. Ajustar a variação necessária à curvatura para que o algoritmo pudesse continuar convergindo não melhorou a média dos resultados, trouxe valores parecidos com os obtidos para o novo critério de parada quando usado nos gradientes, mas teve o efeito de “consertar” a falha na busca linear: o algoritmo parava depois de mil iterações. O algoritmo heurístico utilizado foi o ALGA (Augmented Lagrangian Genetic Algorithm), Nelder-Mead foi o *pattern search*, ambos penalizam as restrições para se manterem dentro da região viável. Além do imenso custo computacional, esbarrou-se na improbabilidade desses algoritmos de convergirem a resultados viáveis quando eles partem de pontos inviáveis. Quanto mais perto do resultado, menor é a região viável para a “busca linear” na presença de ruído e mais improvável a convergência.

## 12. Referências

- [1] RAMOS, H. O. C, Um algoritmo para otimização restrita com aproximação de derivadas, Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2011
- [2] LUENBERGER, D. G, YE, Y, Nonlinear Programming, 3<sup>rd</sup> ed. Springer
- [3] HERSKOVITS, J. “Feasible direction interior-point technique for nonlinear optimization”, *J. Optim. Theory Appl.*, v. 99, n. 1, pp. 121–146, 1998.
- [4] CHONG, E. K. P., ŽAK, S. H., An introduction to Optimization, 2<sup>nd</sup> ed., Wiley
- [5] CONN, A. R., SCHEINBERG, K., VICENTE, L. N., Introduction to Derivative-Free Optimization, SIAM, 2009
- [6] MOHAMADI, B., PIRONNEAU, O., Applied Shape Optimization for Fluids, *Oxford Science Publications*
- [7] FISH, J. BELYTSCHKO, T., A First Course in Finite Elements, Wiley
- [8] AUSTRELL, P-E, DAHLBLOM, O., LINDEMANN, J., OLSSON, A., OLSSON, K-G, PERSSON, K., PETERSON, H., RISTINMAA M., SANDBERG, H., WERNBERG, P-A, CALFEM – A finite Element Toolbox, Version 3.4
- [9] KIRSCH, U. Structural Optimization: Fundamentals and Applications,
- [10] MONTGOMERY, C.D., Design and Analysis of Experiments, 5<sup>th</sup> ed., Wiley
- [11] HERSKOVITS, J., Um projeto automático de sistemas de estruturas ótimas, Dissertação de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 1976

## Apêndice A – FAIPA Noise Analysis

O programa elaborado permite rodar programas teste pré-definidos ou inseridos pelo usuário para verificar o desempenho dos algoritmos FAIPA e FDIPA para diferentes casos de ruído. Ao executar o programa, surge a seguinte interface:

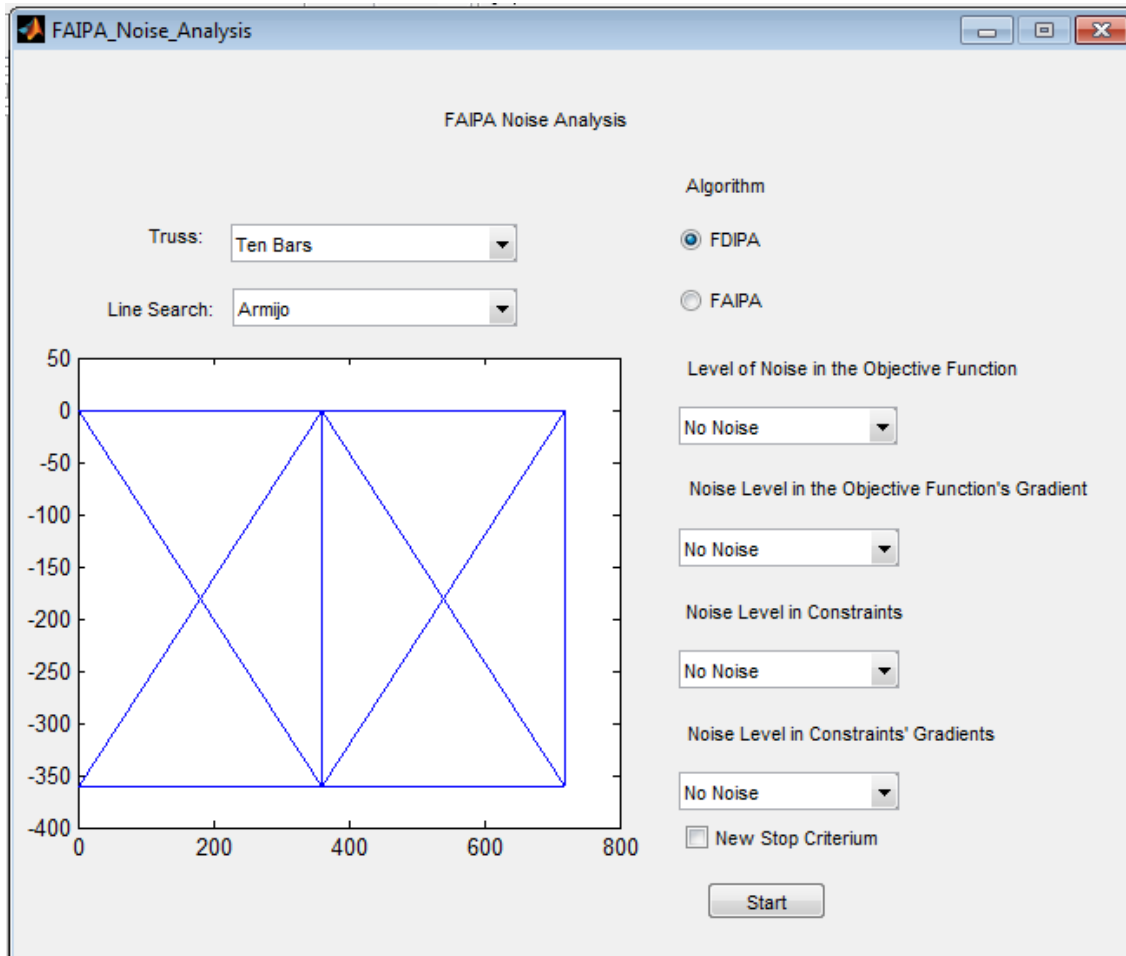


Figura 24 - Interface do programa

Essa interface tem quatro funções importantes:

1. Definição da treliça

Essa funcionalidade, que está evidenciada nas figuras 2 e 3 abaixo, nos permite escolher entre as três treliças pré definidas ou uma inserida pelo usuário. Assim que a treliça é selecionada, o programa apresenta seu desenho no gráfico.

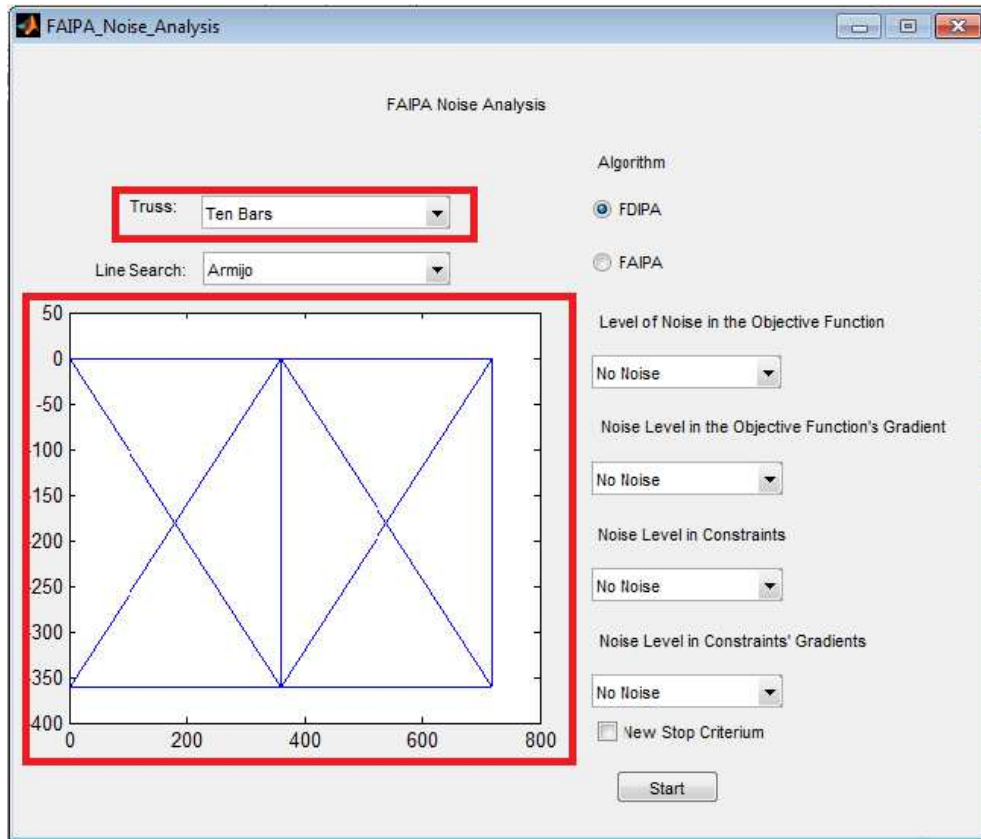


Figura 25 - Definição de treliças

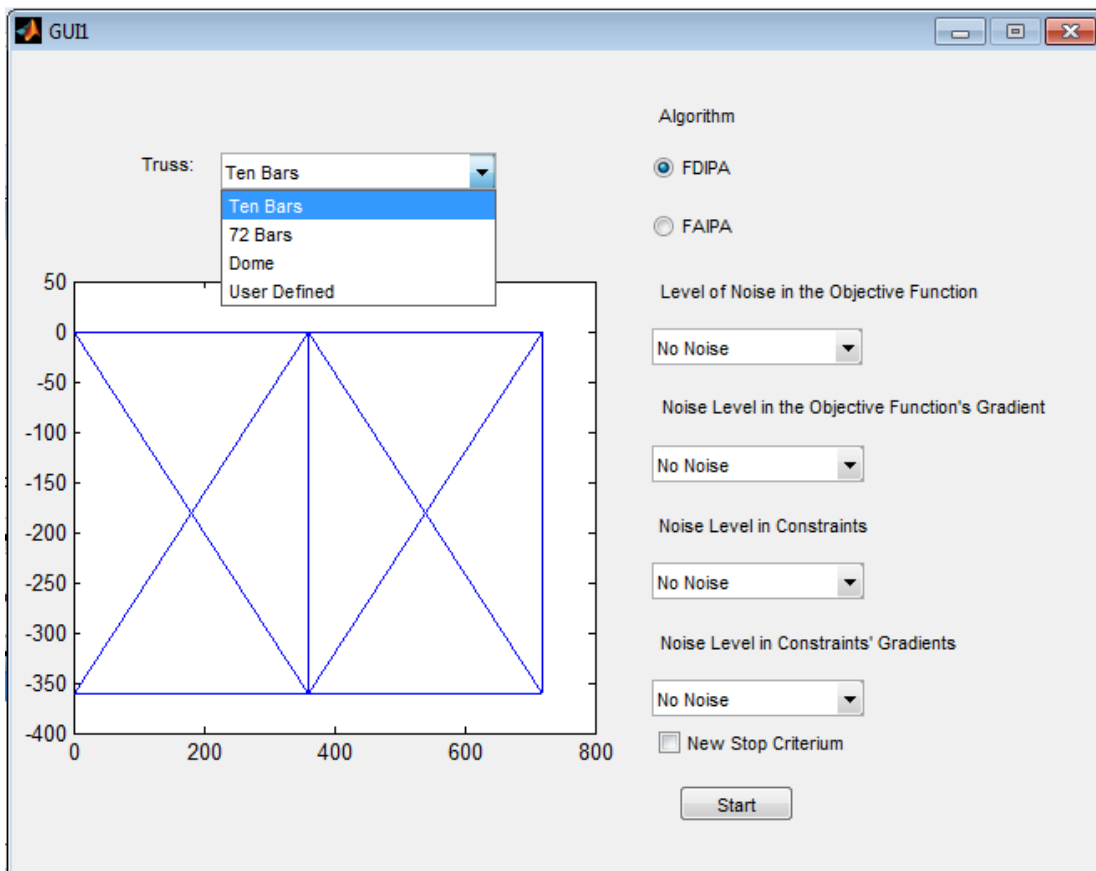
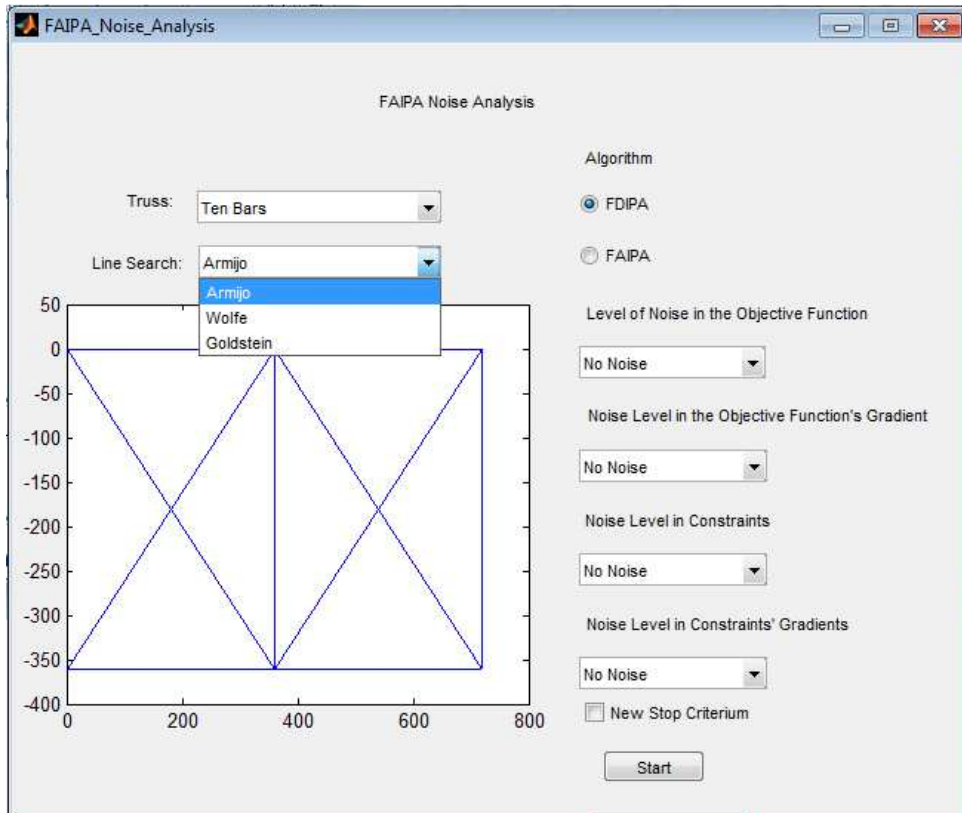


Figura 26 - Opções de treliça

## 2. Seleção da busca linear

Permite ao usuário escolher qual será a busca linear utilizada.



## 3. Seleção do algoritmo

Essa funcionalidade permite ao usuário alternar entre os algoritmos FFDIPA e FAIPA.

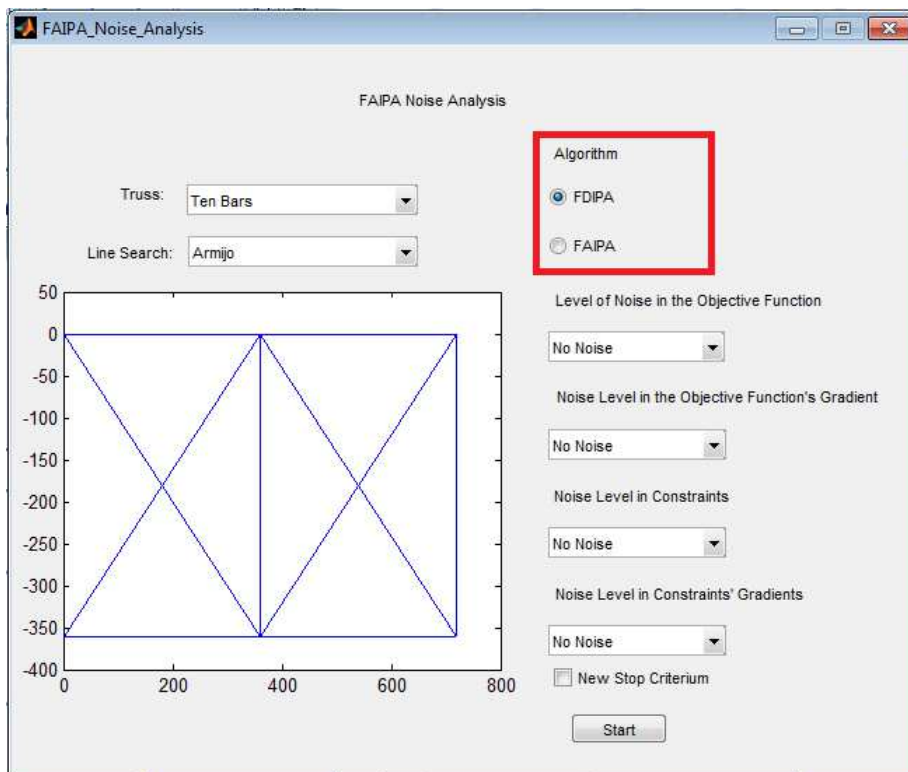


Figura 27 - Botões para selecionar o algoritmo

4. Definição dos níveis de ruído para o teste:

Essa funcionalidade nos permite escolher os diferentes casos de ruído individualmente para a função objetivo, para o gradiente da função objetivo, para as restrições e para o gradiente das restrições. Para a função objetivo e para as restrições o ruído pode variar entre zero e 5%, enquanto para os gradientes ele pode variar de zero a 10%.

Também é possível aproximar os gradientes por diferenças finitas, no entanto, só é permitida a aproximação simultânea do gradiente das restrições e função objetivo. Não é possível usar um gradiente aproximado para um e exato para o outro.

O tamanho da diferença é proporcional ao nível de ruído na função e é dado por

$$h = 10 * \sigma$$

onde  $\sigma$  é o valor do desvio padrão do ruído aleatório introduzido.

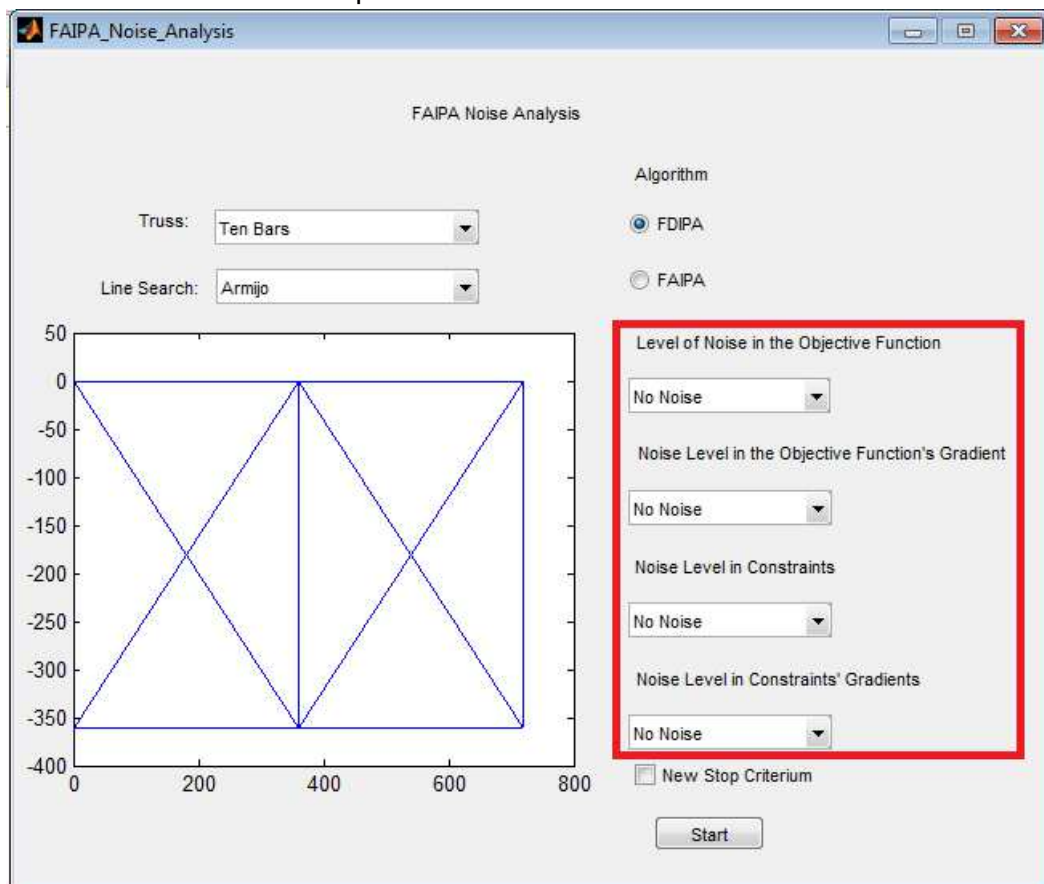


Figura 28 - Caixas para selecionar os níveis de ruído

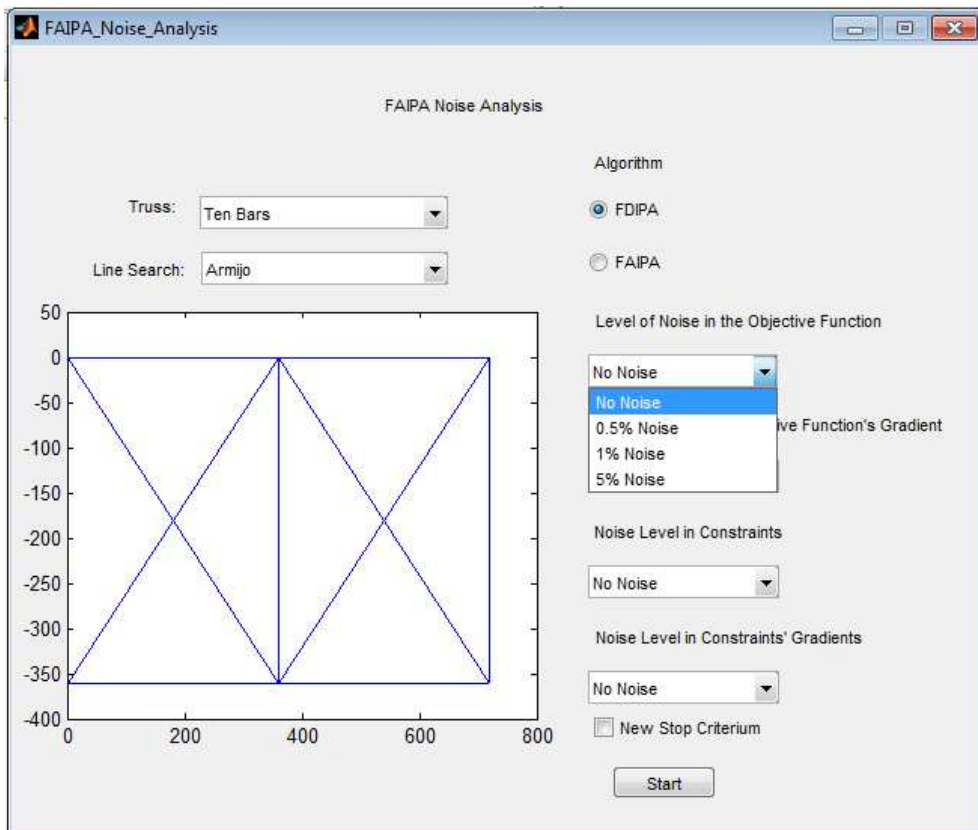


Figura 29 - Opções para ruído nas funções e restrições

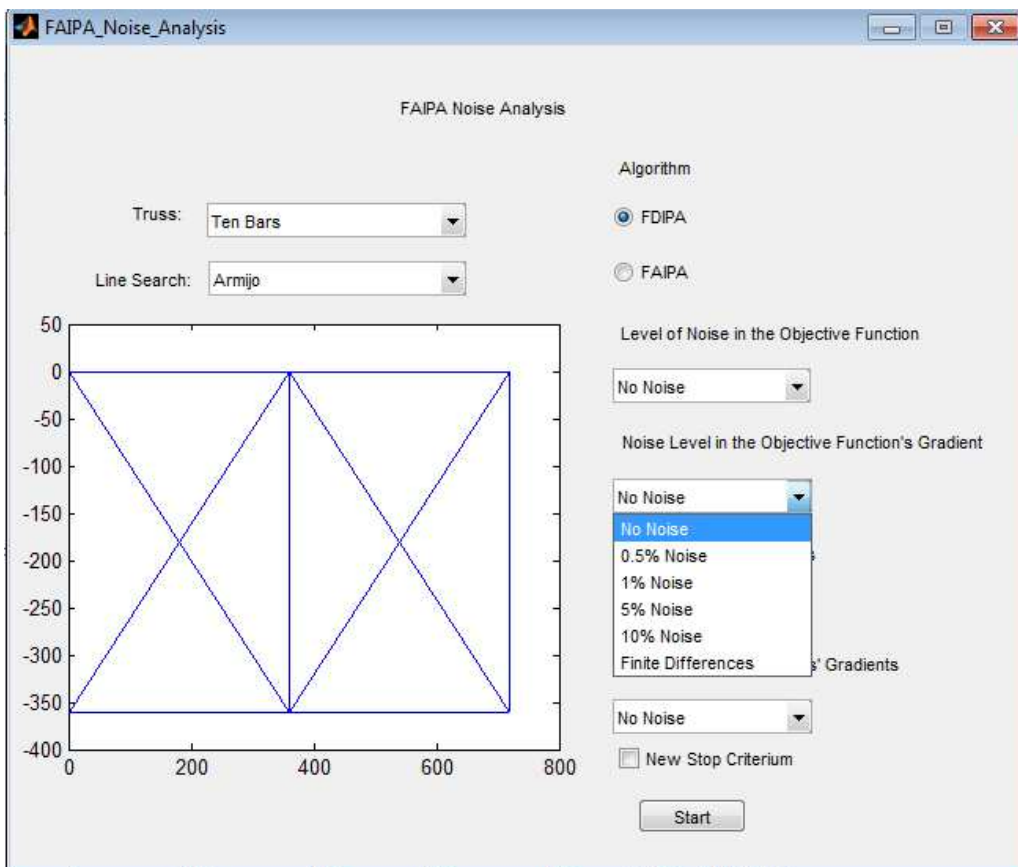


Figura 30 - Opções para ruído nos gradientes

5. Escolha do critério de parada:

O checkbox evidenciado na figura 8 permite escolher entre o critério de parada original dos algoritmos e o novo critério de parada.

Critérios de Parada	
Original	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Se gradiente do Lagrangiano é menor que <math>10^{-5}</math></li> <li>2. Se o módulo da direção de descida é menor que <math>10^{-5}</math></li> <li>3. Se a diferença entre a iteração atual e a anterior é menor que <math>10^{-5}</math></li> <li>4. Se o número de iterações na busca Linear excede 100</li> </ol>
Novo	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Por 5 iterações o gradiente do Lagrangiano é menor que <math>10^{-5}</math></li> <li>2. Por 5 iterações o módulo da direção de descida é menor que <math>10^{-5}</math></li> <li>3. Se o número de iterações na busca Linear excede 100</li> </ol>

Tabela 22- Critérios de Parada

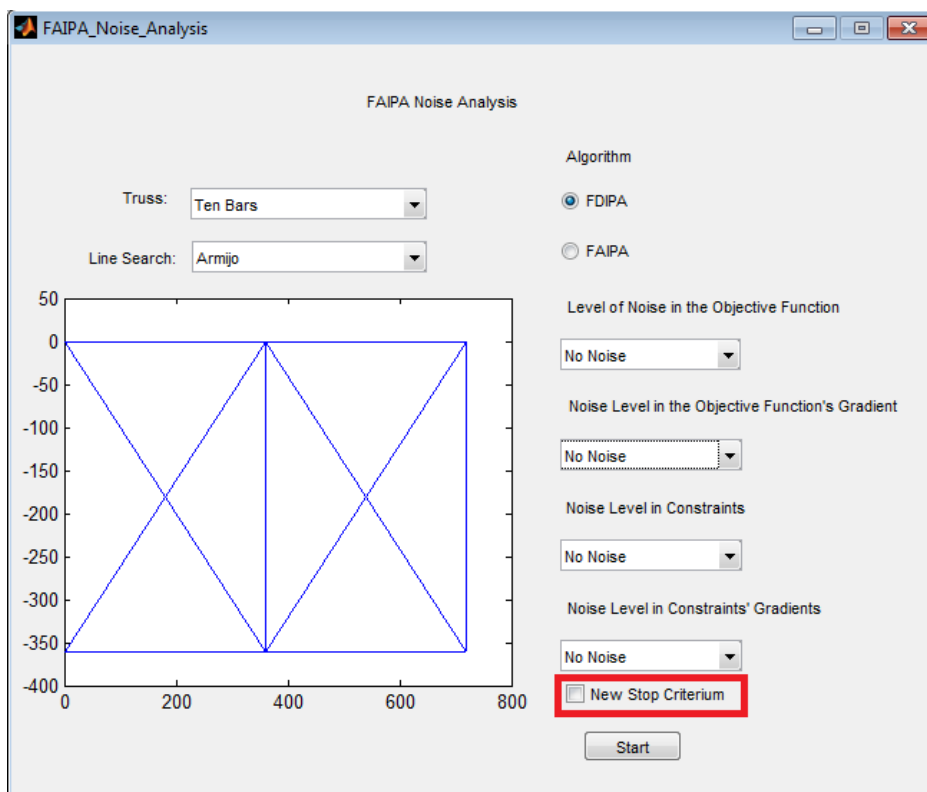


Figura 31 - Seleção do Critério de Parada

### Usando Treliza Definida pelo Usuário

Ao escolher "User Defined" na lista de treliças, aparece a seguinte tela:



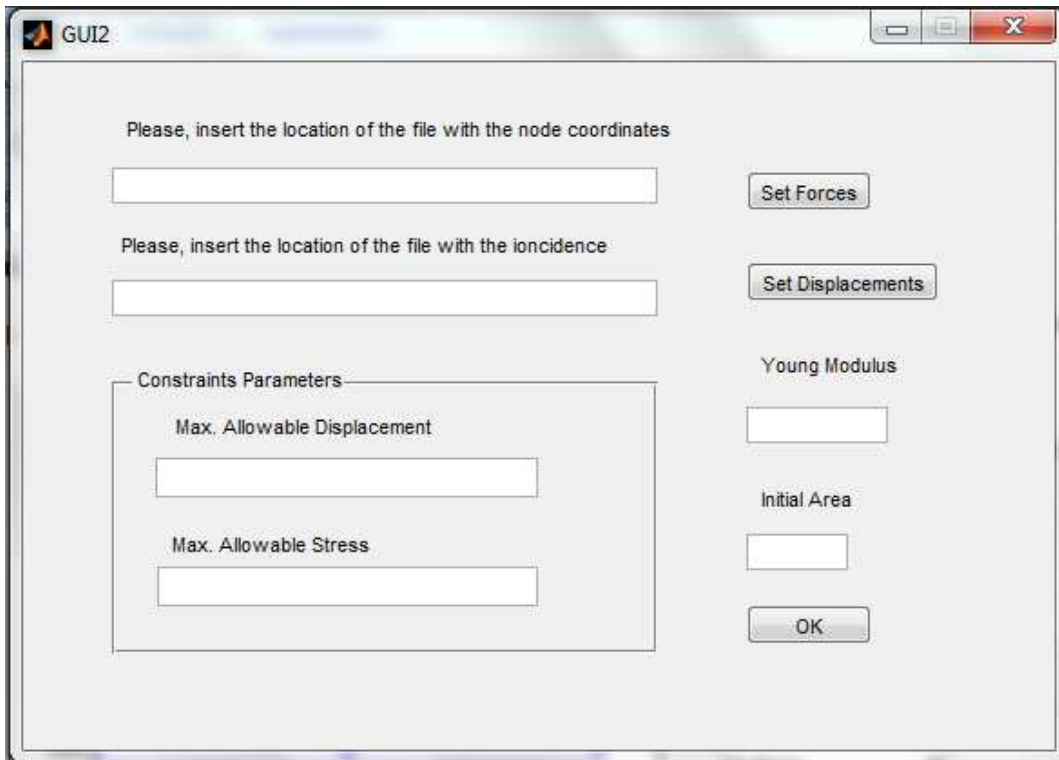


Tabela 23 - Tela para inserir informações sobre uma treliça qualquer

No campo onde está escrito :”Please, insert the location of the file with the node coordinates” deve-se inserir a localização de um arquivo .dat com as coordenadas dos nós. Por exemplo: “C:\Desktop\nodes.dat”

O arquivo deve trazer a posição dos nós com relação a um referencial escolhido organizadas da seguinte forma:

$$\begin{array}{lll}
 N\acute{o}1,x & N\acute{o}1,y & N\acute{o}1,z \\
 N\acute{o}2,x & N\acute{o}2,y & N\acute{o}2,z \\
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 N\acute{o}n,x & N\acute{o}n,y & N\acute{o}n,z
 \end{array}$$

Um exemplo para a treliça de 72 barras está exposto na figura 8.

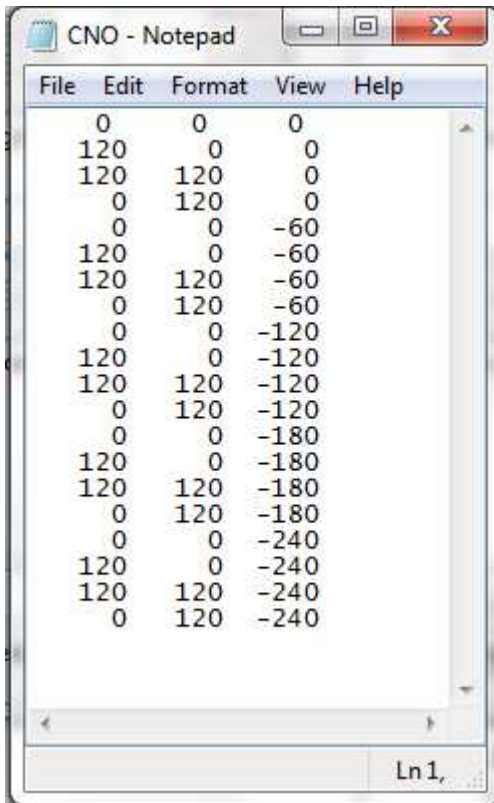


Figura 32 - Exemplo de arquivo .dat com a posição dos nós da treliça

No campo onde está escrito: "Please, insert the location of the file with the incidence" deve-se inserir a localização do arquivo .dat com a matriz de incidência dos elementos e suas variáveis de projeto.

As informações devem ser organizadas da seguinte forma:

<b>Número do Elemento</b>	<b>Nó 1</b>	<b>Nó2</b>	<b>Variável de Projeto</b>
---------------------------	-------------	------------	----------------------------

A figura 9 traz a matriz de incidência para o problema de 72 barras para os primeiros 20 elementos.

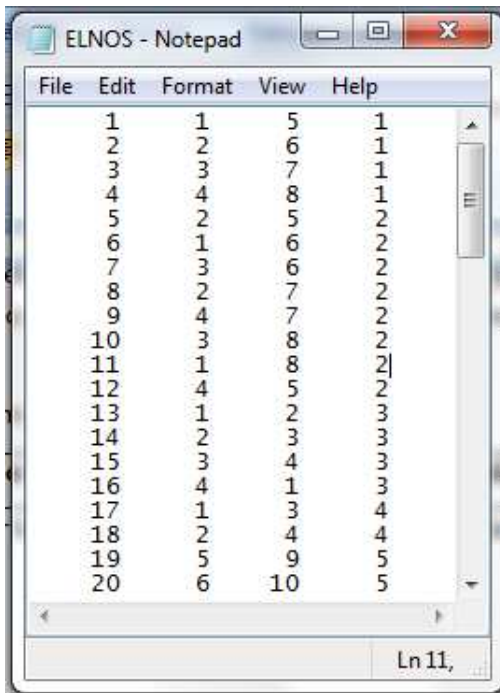


Figura 33 - Exemplo de Matriz de Incidência

Forças e deslocamentos são inseridos pelos botões “Set Forces” e “Set Displacements”. Ao clicar no botão “Set Forces” aparece a janela mostrada na Figura 10.

A ordem em que as direções são arranjadas é seqüencial, começando no primeiro nó.

Quando o botão “Set Displacements” é pressionado, aparece a janela mostrada na Figura 11.

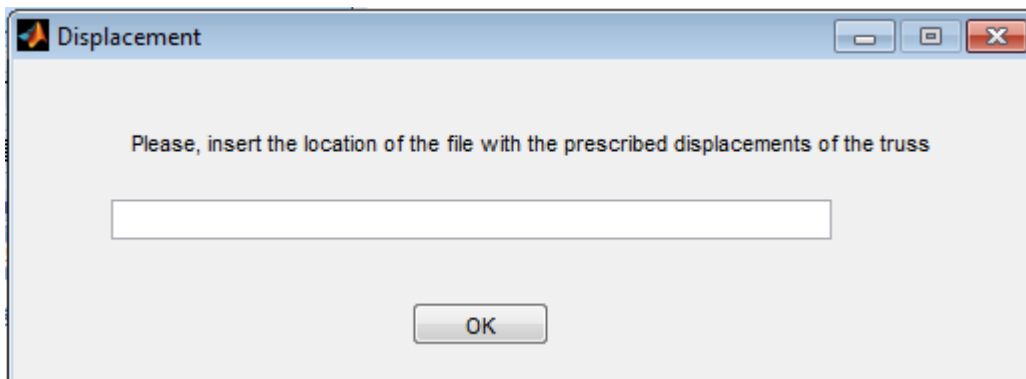


Figura 34 - Janela que permite inserir os deslocamentos prescritos

O arquivo com as informações sobre os deslocamentos tem a seguinte organização:

Direção do Deslocamento	Valor prescrito para o deslocamento
-------------------------	-------------------------------------

A Figura 12 mostra o valor para a matriz dos deslocamentos prescritos para a treliça de 72 barras, em que os quatro nós da base são fixos.

60	0
59	0
58	0
57	0
56	0
55	0
54	0
53	0
52	0
51	0
50	0
49	0

Figura 35 - Matriz com os Deslocamentos Prescritos

As forças são inseridas da mesma forma que os deslocamentos. A primeira coluna indica os nós em que elas atuam e a segunda, sua magnitude.

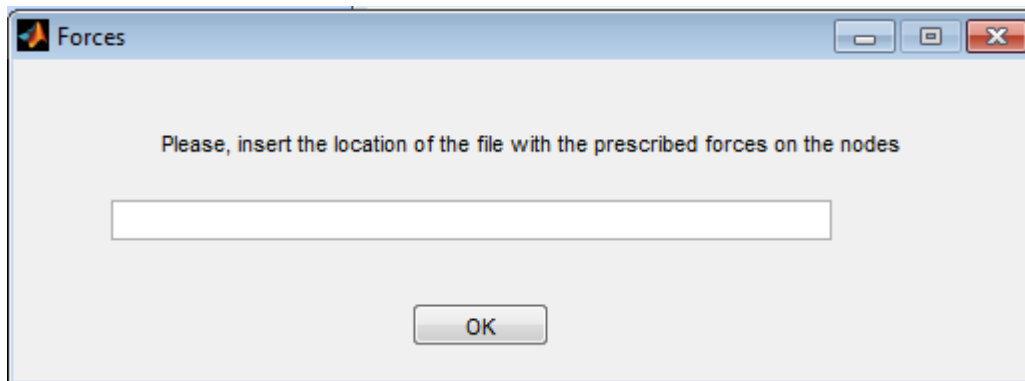


Figura 36 - Janela que permite inserir as forças

Como é possível perceber, o procedimento é o mesmo utilizado para a matriz com a posição dos nós e a matriz de incidência.

Uma vez inseridas as informações sobre a geometria da treliça, deve-se inserir nos devidos campos o módulo de Young do material, o máximo deslocamento permitido nos nós, a máxima tensão permitida nos elementos, e a área inicial das barras.

Para simplificar a utilização do programa, não é possível definir tensões máximas ou área transversal inicial individualmente para cada barra ou deslocamento máximo para cada nó.

## Apêndice B – Resultados obtidos para ruído nos gradientes

As tabelas abaixo apresentam os resultados para ruído nos gradientes. Os níveis de ruído utilizados foram 0,5%, 1%, 5% e 10%. Como para os três primeiros níveis não houve grande impacto nos resultados, foi experimentado mais um nível.

### B.1. Ruídos no gradiente das funções

#### B.1.1. Treliza de 10 Barras

FDIPA					
	0,5% Ruído	1% Ruído	5% Ruído	10% Ruído	Sem Ruído
Média	1584.00	1584.01	1584.02	1584.04	1584.00
Desvio Padrão	0.0051	0.0081	0.0227	0.0835	0
Soluções Viáveis	100	100	99	100	100
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	99%	100%	100%
Média das Soluções Viáveis	1584.00	1584.01	1584.02	1584.04	-
Pior Valor Viável	1584.03	1584.04	1584.11	1584.69	-
Melhor Valor Viável	1584.00	1584.00	1584.00	1584.00	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	29.97	32.01	41.84	46.43	<b>23</b>
<b>Desvio Padrão</b>	5.43	7.10	11.69	11.00	<b>0</b>
FAIPA					
	0,5% Ruído	1% Ruído	5% Ruído	10% Ruído	Sem Ruído
Média	1584.00	1584.00	1584.01	1584.01	1584.00
Desvio Padrão	0.0002	0.0053	0.0127	0.0324	0
Soluções Viáveis	100	100	100	100	100
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%	100%	100%
Média das Soluções Viáveis	1584.00	1584.00	1584.01	1584.01	-
Pior Valor Viável	1584.00	1584.05	1584.09	1584.26	-
Melhor Valor Viável	1584.00	1584.00	1584.00	1584.00	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	28.3	29.22	40.91	48.86	<b>25</b>
<b>Desvio Padrão</b>	4.81	5.03	8.43	9.56	<b>0</b>

Tabela 24 - Ruído no gradiente da função objetivo para a treliza de 10 barras e critério de parada original

O ruído tem efeito praticamente nulo quando no gradiente da função. Isso pode ser visto pela média dos resultados para os diferentes níveis de ruído. No nosso problema mais simples, o pior resultado só apresenta piora no quinto algarismo significativo.

Sobre a convergência do algoritmo, no entanto, não podemos dizer o mesmo. É visível que um maior número de iterações foi necessário à medida que o nível de ruído aumentava.

### B.1.2. Treliza de 72 Barras

<b>FDIPA</b>					
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>10% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Média	370.54	370.55	370.59	371.36	370.54
Desvio Padrão	0.0024	0.0050	0.1894	0.9385	0
Soluções Viáveis	100	100	100	100	100
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%	100%	100%
Média das Soluções Viáveis	370.54	370.55	370.59	371.36	-
Pior Valor Viável	370.56	370.57	372.26	374.02	-
Melhor Valor Viável	370.54	370.54	370.54	370.56	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	34.48	35.06	36.97	36.32	<b>32</b>
<b>Desvio Padrão</b>	3.15	4.94	6.60	8.76	<b>0</b>
<b>FAIPA</b>					
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>10% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Média	370.55	370.55	370.58	371.13	370.54
Desvio Padrão	0.0117	0.0124	0.0967	0.8865	0
Soluções Viáveis	100	100	100	100	100
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%	100%	100%
Média das Soluções Viáveis	370.55	370.55	370.58	371.13	-
Pior Valor Viável	370.60	370.59	371.36	374.17	-
Melhor Valor Viável	370.54	370.54	370.55	370.56	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	33.84	33.6	35.99	38.66	<b>33</b>
<b>Desvio Padrão</b>	6.11	5.81	7.10	10.84	<b>0</b>

Tabela 25 - Ruído no gradiente da função objetivo para a treliza de 72 barras e critério de parada original

A treliza de 72 barras é um problema mais complexo que a treliza de 10 barras, nele o efeito do ruído no gradiente da função é um pouco mais evidente, mas em comparação com os outros casos, o efeito continua sendo pequeno mesmo para uma incerteza nos gradientes da ordem de 10%

### B.1.3. Domo de 52 barras

<b>FDIPA</b>					
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>10% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Média	3.9228	3.9270	3.9265	3.9413	3.9138
Desvio Padrão	0.0114	0.0191	0.0314	0.0636	0
Soluções Viáveis	100	100	100	100	100
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%	100%	100%
Média das Soluções Viáveis	3.9228	3.9270	3.9265	3.9413	-
Pior Valor Viável	3.9863	4.0231	4.2035	4.3139	-
Melhor Valor Viável	3.9138	3.9138	3.9138	3.9138	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	19.50	18.77	18.85	18.76	<b>16</b>
<b>Desvio Padrão</b>	3.0168	2.5261	3.2298	3.1338	<b>0</b>
<b>FAIPA</b>					
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>10% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Média	3.9168	3.9168	3.9170	3.9162	3.9138
Desvio Padrão	0.01077489	0.010775	0.019544	0.007244	0
Soluções Viáveis	100	100	100	100	100
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%	100%	100%
Média das Soluções Viáveis	3.9168	3.9168	3.9170	3.9162	-
Pior Valor Viável	3.9868	3.9868	4.1010	3.9610	-
Melhor Valor Viável	3.9138	3.9138	3.9138	3.9137	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	18.06	17.59	16.71	20.28	<b>15</b>
<b>Desvio Padrão</b>	6.5718	4.7121	2.0807	5.6802	<b>0</b>

Tabela 26 - Ruído no gradiente da função objetivo para o domo e critério de parada original

O domo não traz novidades em comparação com os outros problemas. O que chama a atenção nos resultados é como o FAIPA foi mais eficiente em resolver o problema na presença de ruído, encontrando resultados melhores para todos os níveis de ruído.

## B.2. Ruídos no gradiente das restrições

### B.2.1 Treliza de 10 Barras

<b>FDIPA</b>					
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>10% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Média	1584.00	1584.01	1584.60	1584.61	1584.00
Desvio Padrão	0.0097	0.0573	0.3951	3.9513	0
Soluções Viáveis	100	100	100	100	100
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%	100%	100%
Média das Soluções Viáveis	1584.00	1584.01	1584.60	1584.61	-
Pior Valor Viável	1584.05	1584.44	1622.973	1622.97	-
Melhor Valor Viável	1584.00	1584.00	1584.00	1584.00	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	28.34	30.05	39.4	39.4	<b>23</b>
<b>Desvio Padrão</b>	3.1147	4.4253	10.9424	10.9425	<b>0</b>
<b>FAIPA</b>					
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>10% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Média	1584.00	1584.00	1584.02	1584.84	1584.00
Desvio Padrão	0.0002	0.0084	0.0644	4.4723	0
Soluções Viáveis	100	100	100	100	100
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%	100%	100%
Média das Soluções Viáveis	1584.00	1584.00	1584.02	1584.84	-
Pior Valor Viável	1584.00	1584.06	1584.42	1627.91	-
Melhor Valor Viável	1584.00	1584.00	1584.00	1584.00	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	28.12	29.24	36.99	43.6	<b>25</b>
<b>Desvio Padrão</b>	2.3880	4.6496	8.0760	11.5286	<b>0</b>

Tabela 27 - Ruído no gradiente das restrições para a treliza de 10 barras e critério de parada original

Nota-se que o efeito do ruído foi bastante limitado sobre a média dos resultados obtidos. Pode-se ver pelo valor do desvio padrão, que mesmo os piores resultados foram bem próximo do valor ótimo encontrado sem ruído.

Sobre a convergência do algoritmo já não se pode afirmar o mesmo. À medida que o nível de ruído aumentava, nota-se claramente que o número de iterações necessárias até que o algoritmo chegasse ao resultado final foi bem maior, chegando quase ao dobro no pior caso de ruído.



### B.2.2 Treliza de 72 Barras

FDIPA					
	0,5% Ruído	1% Ruído	5% Ruído	10% Ruído	Sem Ruído
Média	370.55	370.56	372.85	373.01	370.54
Desvio Padrão	0.0067	0.0312	1.3721	1.7023	0
Soluções Viáveis	100	100	100	100	100
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%	100%	100%
Média das Soluções Viáveis	370.55	370.56	372.85	373.01	-
Pior Valor Viável	370.60	370.82	377.38	380.05	-
Melhor Valor Viável	370.54	370.54	370.65	370.62	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	37.62	42.79	38.91	46.79	<b>32</b>
<b>Desvio Padrão</b>	5.5044	9.9253	11.0564	13.8237	<b>0</b>
FAIPA					
	0,5% Ruído	1% Ruído	5% Ruído	10% Ruído	Sem Ruído
Média	370.56	370.56	371.04	373.07	370.54
Desvio Padrão	0.0652	0.0382	0.7430	1.7270	0
Soluções Viáveis	100	100	100	100	100
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%	100%	100%
Média das Soluções Viáveis	370.56	370.56	371.036	373.07	-
Pior Valor Viável	371.14	370.8318	373.7439	377.69	-
Melhor Valor Viável	370.54	370.54	370.56	370.60	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	40.78	43.63	52.55	48.08	<b>33</b>
<b>Desvio Padrão</b>	12.0860	12.2595	14.3797	16.8287	<b>0</b>

Tabela 28 - Ruído no gradiente das restrições para a treliza de 72 barras e critério de parada original

O efeito do ruído no gradiente das restrições foi mais significativo do que no gradiente da função objetivo. No entanto, não é possível determinar se isso ocorre porque as restrições são compostas por funções não lineares, enquanto a função objetivo é linear, ou se os algoritmos são mais sensíveis a ruído no gradiente das restrições. De qualquer maneira, se mantêm a tendência de piora na convergência. Não houve diferença significativa entre os desempenhos dos algoritmos.

### B.2.3. Domo de 52 Barras

<b>FDIPA</b>					
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>10% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Média	3.9208	3.9258	3.9246	3.9221	3.9138
Desvio Padrão	0.00963111	0.024259	0.024641	0.0160175	0
Soluções Viáveis	100	100	100	100	100
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%	1	100%
Média das Soluções Viáveis	3.9208	3.9258	3.9242	3.9221	-
Pior Valor Viável	3.95876232	4.129624	4.100111	4.0059	-
Melhor Valor Viável	3.91376011	3.91376	3.91376	3.9138	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	18.64	19.04	20.38	19.83	<b>16</b>
<b>Desvio Padrão</b>	4.1864	5.7400	6.5162	5.05136	<b>0</b>
<b>FAIPA</b>					
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>10% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Média	3.9200	3.9197	3.9142	3.9179	3.9138
Desvio Padrão	0.0258	0.0212	0.0022	0.0157	0
Soluções Viáveis	100	100	100	100	100
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%	100%	100%
Média das Soluções Viáveis	3.9200	3.9197	3.9142	3.9179	-
Pior Valor Viável	4.1046	4.0440	3.9301	4.0055	-
Melhor Valor Viável	3.9138	3.9138	3.9138	3.9138	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	16.32	16.33	16.46	18.68	<b>15</b>
<b>Desvio Padrão</b>	2.9606	2.4290	3.4478	4.1897	<b>0</b>

Tabela 29 - Ruído no gradiente das restrições para o domo barras e critério de parada original

Para o domo, praticamente não houve alteração no resultado ao longo dos diferentes níveis de ruído, só o que pode ser notado é uma leve piora na convergência. Também é possível observar que o FAIPA obteve um desempenho um pouco melhor com esse problema teste.

### B.3. Ruídos nos gradientes da função e das restrições

#### B.3.1. Treliza de 10 Barras

FDIPA					
	0,5% Ruído	1% Ruído	5% Ruído	10% Ruído	Sem Ruído
Média	1584.01	1584.02	1584.51	1592.59	1584.00
Desvio Padrão	0.0164	0.0479	1.6692	22.6596	0
Soluções Viáveis	100	100	100	100	100
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%	100%	100%
Média das Soluções Viáveis	1584.01	1584.02	1584.51	1592.59	-
Pior Valor Viável	1584.15	1584.37	1598.20	1715.00	-
Melhor Valor Viável	1584.00	1584.00	1584.00	1584.03	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	28.63	30.76	49.13	53.72	<b>23</b>
<b>Desvio Padrão</b>	3.9329	5.5069	14.6057	18.3221	<b>0</b>
FAIPA					
	0,5% Ruído	1% Ruído	5% Ruído	10% Ruído	Sem Ruído
Média	1584.00	1584.00	1584.03	1584.46	1584.00
Desvio Padrão	0.0024	0.0054	0.1597	1.6318	0
Soluções Viáveis	100	100	100	100	100
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%	100%	100%
Média das Soluções Viáveis	1584.00	1584.00	1584.03	1584.46	-
Pior Valor Viável	1584.02	1584.05	1585.56	1599.62	-
Melhor Valor Viável	1584.00	1584.00	1584.00	1584.00	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	29.56	29.42	36.97	54.4	<b>25</b>
<b>Desvio Padrão</b>	4.7595	4.9322	7.7752	13.6626	<b>0</b>

Tabela 30 - Ruído no gradiente das restrições e da função objetivo para a treliza de 10 barras e critério de parada original

Houve uma piora substancial na média dos resultados obtidos com o FDIPA para 10% de ruído, mas para todos os outros níveis, não houve grande variação nos resultados. O efeito combinado de ruído no gradiente da função objetivo e das restrições também não prejudicou significativamente a convergência, em comparação com o caso em que só há ruído no gradiente das restrições.

### B.3.2. Treliça de 72 Barras

FDIPA					
	0,5% Ruído	1% Ruído	5% Ruído	10% Ruído	Sem Ruído
Média	370.55	370.57	373.52	373.57	370.54
Desvio Padrão	0.0062	0.0628	1.3902	2.1921	0
Soluções Viáveis	100	100	100	100	100
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%	100%	100%
Média das Soluções Viáveis	370.55	370.57	373.52	373.57	-
Pior Valor Viável	370.60	370.86	379.54	380.78	-
Melhor Valor Viável	370.54	370.54	370.58	370.61	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	37.41	42.51	38.89	45.16	<b>32</b>
<b>Desvio Padrão</b>	5.6512	9.3975	10.3785	14.1583	<b>0</b>
FAIPA					
	0,5% Ruído	1% Ruído	5% Ruído	10% Ruído	Sem Ruído
Média	370.55	370.57	371.56	374.01	370.54
Desvio Padrão	0.0294	0.1222	1.0387	2.2977	0
Soluções Viáveis	100	100	100	100	100
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%	100%	100%
Média das Soluções Viáveis	370.55	370.57	371.56	374.01	-
Pior Valor Viável	370.77	371.72	375.07	383.35	-
Melhor Valor Viável	370.54	370.54	370.55	370.62	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	42.25	42.21	55.43	47.39	<b>33</b>
<b>Desvio Padrão</b>	11.6258	11.3050	17.6533	15.5419	<b>0</b>

Tabela 31 - Ruído no gradiente das restrições e da função objetivo para a treliça de 72 barras e critério de parada original

Observa-se uma piora considerável na média dos resultados para níveis altos de ruído, como 5 e 10% de ruído, no entanto, mesmo nesses casos extremos, foi possível encontrar resultados próximos do ótimo entre as 100 iterações.

Para os níveis mais baixos de ruído, dados as médias dos resultados e seu desvio padrão, pode-se dizer que é seguro usar tanto o FAIPA quanto o FDIPA para resolver um problema de otimização.

### B.3.3 Domo de 52 Barras

FDIPA					
	0,5% Ruído	1% Ruído	5% Ruído	10% Ruído	Sem Ruído
Média	3.9333	3.9258	3.9252	3.9290	3.9138
Desvio Padrão	0.0371	0.0173	0.0288	0.0455	0
Soluções Viáveis	100	100	100	100	100
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%	100%	100%
Média das Soluções Viáveis	3.9333	3.9258	3.9251	3.9289	-
Pior Valor Viável	4.2331	4.0231	4.1382	4.3443	-
Melhor Valor Viável	3.9138	3.9138	3.9138	3.9138	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	18.82	19.64	19.61	22.28	<b>16</b>
<b>Desvio Padrão</b>	4.0085	5.3909	4.4402	6.3819	<b>0</b>
FAIPA					
	0,5% Ruído	1% Ruído	5% Ruído	10% Ruído	Sem Ruído
Média	3.9201	3.9189	3.9170	3.9253	3.9138
Desvio Padrão	0.0313	0.0187	0.0228	0.0241	0
Soluções Viáveis	100	100	100	100	100
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%	100%	100%
Média das Soluções Viáveis	3.9201	3.9190	3.9170	3.9253	-
Pior Valor Viável	4.1532	4.0583	4.1350	4.0729	-
Melhor Valor Viável	3.9138	3.9138	3.9138	3.9138	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	16.96	16.80	16.72	21.71	<b>15</b>
<b>Desvio Padrão</b>	5.2646	3.3993	3.3547	5.0056	<b>0</b>

Tabela 32 - Ruído no gradiente das restrições e da função objetivo para o domo e critério de parada original

Para o domo houve piora na convergência do algoritmo, como era de se esperar, e o efeito do ruído chegou ao terceiro algoritmo significativo da média dos resultados obtidos. Outro ponto que chama a atenção é que para o presente problema, o nível de ruído não parece ter influência na média dos resultados. Foram encontrados valores um pouco mais altos quando o ruído estava em 0,5% do que quando estava em 5%.

#### B.4. Removendo o critério de parada

Na tentativa de melhorar os resultados encontrados, procurou-se desenvolver um novo critério de parada. Primeiramente, removeu-se o critério de parada para descobrir até que valores o algoritmo poderia chegar. No entanto as imprecisões numéricas associadas a números muito pequenos, próximos a precisão de ponto flutuante do computador, causaram erros na execução do algoritmo e não permitiram que um resultado fosse obtido.

#### B.5. Ruídos no gradiente da função - Algoritmo com novo critério de parada

##### B.5.1. Treliza de 10 barras

FDIPA					
	0,5% Ruído	1% Ruído	5% Ruído	10% Ruído	Sem Ruído
Média	1584.00	1584.00	1584.00	1584.01	1584.00
Desvio Padrão	0.0002	0.0001	0.003162628	0.031155	0
Soluções Viáveis	100	100	99	97	100
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	99%	97%	100%
Média das Soluções Viáveis	1584.00	1584.00	1584.00	1584.011	-
Pior Valor Viável	1584.00	1584.00	1584.02	1584.177	-
Melhor Valor Viável	1584.00	1584.00	1584.00	1584.00	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	47.72	50.77	62.54	69.16	<b>27</b>
<b>Desvio Padrão</b>	15.9519987	15.97842927	18.7973886	24.43285	<b>0</b>
FAIPA					
	0,5% Ruído	1% Ruído	5% Ruído	10% Ruído	Sem Ruído
Média	1584.00	1584.00	1584.00	1586.63	1584.00
Desvio Padrão	6.98047E-05	5.26838E-05	0.0002	26.2243	0
Soluções Viáveis	100	100	100	100	100
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%	100%	100%
Média das Soluções Viáveis	1584.00	1584.00	1584.00	1586.66	-
Pior Valor Viável	1584.00	1584.00	1584.00	1846.25	-
Melhor Valor Viável	1584.00	1584.00	1584.00	1584.00	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	35.31	36.38	50.63	62.57	<b>32</b>
<b>Desvio Padrão</b>	6.7220	5.5610	11.0313	17.4027	<b>0</b>

Tabela 33 - Ruído no gradiente da função objetivo para a treliza de 10 barras e novo critério de parada

Embora os resultados para o caso acima já fossem bons com o critério de parada original, a mudança do critério de parada trouxe resultados um pouco melhores. O afrouxamento dos critérios levou, no entanto a um maior número de iterações.

Para o caso em que havia 10% de ruído e foi usado o FAIPA, o que foi dito acima também é válido. O maior valor encontrado é um *outlier*. Excluindo-o a média dos resultados seria 1584.008 lb. Condizente com os outros resultados obtidos para o mesmo caso.

Nem todas as soluções encontradas foram viáveis, mas isso provavelmente se deve a limitações na precisão do computador e não propriamente a violações nas restrições. A média do valor máximo das restrições evidencia isso e está apresentada na tabela abaixo.

FDIPA	5% Ruído	10% Ruído
Média do Maior Valor das Restrições	-2.20845E-09	-3.53817E-07

Tabela 34 - Média do máximo valor das restrições

### B.5.2. Treliza de 72 Barras

FDIPA					
	0,5% Ruído	1% Ruído	5% Ruído	10% Ruído	Sem Ruído
Média	370.54	370.55	370.60	371.54	370.54
Desvio Padrão	0.0011	0.0045	0.2106	1.0457	0
Soluções Viáveis	98	99	100	100	100
Soluções Viáveis (%)	98%	99%	100%	100%	100%
Média das Soluções Viáveis	370.54	370.55	370.60	371.54	-
Pior Valor Viável	370.55	370.57	371.95	374.29	-
Melhor Valor Viável	370.54	370.54	370.55	370.55	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	39.2	38	37.19	37.49	<b>38</b>
<b>Desvio Padrão</b>	6.618004216	7.54916545	7.70503574	8.03086848	<b>0</b>
FAIPA					
	0,5% Ruído	1% Ruído	5% Ruído	10% Ruído	Sem Ruído
Média	370.54	370.55	370.57	371.01	370.54
Desvio Padrão	0.0025	0.0091	0.0389	0.8504	0
Soluções Viáveis	99	100	100	100	100
Soluções Viáveis (%)	99%	100%	100%	100%	100%
Média das Soluções Viáveis	370.54	370.55	370.57	371.01	-
Pior Valor Viável	370.56	370.59	370.84	376.09	-
Melhor Valor Viável	370.54	370.54	370.55	370.56	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	39.92	38.24	38.7	39.84	<b>39</b>
<b>Desvio Padrão</b>	7.7885	6.6471	7.7414	11.965	<b>0</b>

Tabela 35 - Ruído no gradiente da função objetivo para a treliza de 72 barras e novo critério de parada

Para o problema de 72 barras, a mudança no critério de parada permitiu melhorar o desempenho dos dois algoritmos para os casos de cinco e dez por cento de ruído sem que a convergência fosse prejudicada.

Embora nem todas as soluções encontradas sejam viáveis, isso provavelmente se deve a imprecisões numéricas do computador, como pode ser visto pela média dos maiores valores das restrições.

Média do Maior Valor das Restrições	0.5% Ruído	1% Ruído	5% Ruído	10% Ruído
FDIPA	-2.2079E-07	-5.312E-07	-3.4138E-06	-9.248E-06
FAIPA	-4.0859E-07	-2.7182E-06	-8.756E-06	-2.454E-05

Tabela 36 - Média do valor máximo das restrições para a treliza de 72 barras



### B.5.3 Domo de 52 barras

FDIPA					
	0,5% Ruído	1% Ruído	5% Ruído	10% Ruído	Sem Ruído
Média	3.9156	3.9156	3.9185	3.9223	3.9138
Desvio Padrão	0.0020	0.0025	0.0093	0.0182	0
Soluções Viáveis	72	85	85	79	100
Soluções Viáveis (%)	72%	85%	85%	79%	100%
Média das Soluções Viáveis	3.9151	3.9153	3.9186	3.9227	-
Pior Valor Viável	3.9222	3.9266	3.9756	4.0401	-
Melhor Valor Viável	3.9138	3.913	3.9138	3.9138	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	246.84	216.95	289.16	339.57	<b>21</b>
<b>Desvio Padrão</b>	239.74	239.13	370.05	365.0425	<b>0</b>
FAIPA					
	0,5% Ruído	1% Ruído	5% Ruído	10% Ruído	Sem Ruído
Média	3.9138	3.9138	3.9140	3.9143	3.9138
Desvio Padrão	0.0000	0.0000	0.0015	0.0021	0
Soluções Viáveis	100	100	100	100	100
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%	100%	100%
Média das Soluções Viáveis	3.9138	3.9138	3.9140	3.9143	-
Pior Valor Viável	3.9138	3.9138	3.9270	3.9269	-
Melhor Valor Viável	3.9138	3.9138	3.9138	3.9138	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	30.14	31.2	35.98	34.9	<b>21</b>
<b>Desvio Padrão</b>	26.6102	38.1178	37.2537	24.5318	<b>0</b>

Tabela 37 - Ruído no gradiente da função objetivo para o domo e novo critério de parada

Houve pouca diferença no desempenho do critério de parada original e do novo. Ainda assim, o algoritmo FDIPA se beneficiou das mudanças propostas e obteve um melhor desempenho. A dispersão nos resultados obtidos foi menor em todos os casos para o novo critério.

A convergência, como era de se esperar piorou bastante. No algoritmo FDIPA, muitas vezes chegou-se ao máximo de iterações permitidas, mil, o que elevou a média das iterações. Nota-se, pelo desvio padrão, que o número de iterações apresentou grande dispersão.

Apesar de nem todas as soluções terem sido viáveis, a média do maior valor das restrições indica que a causa é a precisão numérica do computador.

Média do Maior Valor das Restrições	0.5% Ruído	1% Ruído	5% Ruído	10% Ruído
FDIPA	-2.75373E-08	-1.78814E-08	-6.031E-09	-0.0001285
FAIPA	-1.63048E-08	-1.49984E-07	-8.3647E-08	-3.395E-07

Tabela 38 - Média do valor máximo das restrições para a treliça de 72 barras

## B.6. Ruído no gradiente das restrições - Algoritmo com novo critério de parada

### B.6.1. Treliza de 10 Barras

FDIPA					
	0,5% Ruído	1% Ruído	5% Ruído	10% Ruído	Sem Ruído
Média	1584.00	1584.00	1584.19	1584.58	1584.00
Desvio Padrão	0.00015	0.00011	1.71792	1.26656	0
Soluções Viáveis	100	100	85	75	100
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	85%	75%	100%
Média das Soluções Viáveis	1584.00	1584.00	1584.19	1584.59	-
Pior Valor Viável	1584.00	1584.00	1601.19	1591.91	-
Melhor Valor Viável	1584.00	1584.00	1584.00	1584.00	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	37.51	39.79	79.85	91.44	<b>27</b>
<b>Desvio Padrão</b>	5.40	6.39	29.19	32.74	<b>0</b>
FAIPA					
	0,5% Ruído	1% Ruído	5% Ruído	10% Ruído	Sem Ruído
Média	1584.00	1584.00	1584.00	1584.07	1584.00
Desvio Padrão	0.0000	0.0000	0.0006	0.3092	0
Soluções Viáveis	100	100	99	87	100
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	99%	87%	100%
Média das Soluções Viáveis	1584.00	1584.00	1584.00	1584.03	-
Pior Valor Viável	1584.00	1584.00	1584.00	1584.33	-
Melhor Valor Viável	1584.00	1584.00	1584.00	1584.00	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	34.35	36.61	54.48	88.7	<b>32</b>
<b>Desvio Padrão</b>	5.07	5.15	17.75	33.45	<b>0</b>

Tabela 39 - Ruído no gradiente das restrições para a treliza de 10 barras e novo critério de parada

Embora esse seja um problema bastante simples, pode-se observar que houve um ganho de precisão com a mudança do critério de parada, embora esse ganho tenha custado um número maior de iterações. Também é importante notar que os resultados estão menor dispersão do que estavam com o critério de parada original.

Tanto usando o FDIPA quanto usando o FAIPA, podemos ver que alguns dos resultados obtidos foram inviáveis. Isso não é, porém, um motivo de preocupação. As restrições foram pouco violadas, algo da ordem de  $10^{-10}$  ou menor e não comprometeriam um projeto de Engenharia.

Média do Maior Valor das Restrições	0.5% Ruído	1% Ruído	5% Ruído	10% Ruído
FDIPA	-3.2392E-10	-1.106E-09	-2.435E-09	8.59E-12
FAIPA	-9.0165E-10	-1.2207E-09	-4.4003E-09	-2.6213E-09

Tabela 40 - Média do valor máximo das restrições para a treliça de 10 barras

### B.6.2. Treliça de 72 Barras

FDIPA					
	0,5% Ruído	1% Ruído	5% Ruído	10% Ruído	Sem Ruído
Média	370.54	370.56	372.53	374.65	370.54
Desvio Padrão	0.0014	0.0357	1.2001	2.4856	0
Soluções Viáveis	65	53	30	22	100
Soluções Viáveis (%)	65%	53%	30%	22%	100%
Média das Soluções Viáveis	370.54	370.54	372.63	374.22	-
Pior Valor Viável	370.55	370.55	378.08	379.02	-
Melhor Valor Viável	370.54	370.54	370.72	371.17	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	52.13	59.35	61.04	49.54	<b>38</b>
<b>Desvio Padrão</b>	12.9776	16.7159	22.1929	17.4266	<b>0</b>
FAIPA					
	0,5% Ruído	1% Ruído	5% Ruído	10% Ruído	Sem Ruído
Média	370.54	370.55	370.9746	372.61	370.54
Desvio Padrão	0.0009	0.0023	0.658623	1.6173	0
Soluções Viáveis	75	54	19	24	100
Soluções Viáveis (%)	75%	54%	19%	24%	100%
Média das Soluções Viáveis	370.54	370.55	370.9615	372.19	-
Pior Valor Viável	370.55	370.56	374.0852	375.69	-
Melhor Valor Viável	370.54	370.54	370.5505	370.60	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	64.80	60.48	74.56	67.79	<b>39</b>
<b>Desvio Padrão</b>	16.6770	14.1888	25.0726	26.9711	<b>0</b>

Tabela 41 - Ruído no gradiente das restrições para a treliça de 72 barras e novo critério de parada

Alterar o critério de parada não melhorou a precisão do resultado para o problema de 72 barras. Os resultados melhoraram um pouco para os níveis mais baixos de ruído, mas para níveis mais altos, particularmente para o algoritmo FDIPA, não houve melhora.

Como pode ser visto na tabela abaixo, ainda que nem todas as soluções sejam viáveis, as restrições foram pouco violadas.

Média do Maior Valor das Restrições	0.5% Ruído	1% Ruído	5% Ruído	10% Ruído
FDIPA	4.2E-14	6.7E-14	3.25E-13	6.65E-13
FAIPA	3.9E-14	7.9E-14	3.83E-13	6.04E-13

Tabela 42- Média do valor máximo das restrições para a treliça de 72 barras

### B.6.3. Domo de 52 barras

FDIPA					
	0,5% Ruído	1% Ruído	5% Ruído	10% Ruído	Sem Ruído
Média	3.9156	3.9156	3.9185	3.9223	3.9138
Desvio Padrão	0.0020	0.0025	0.0093	0.0182	0
Soluções Viáveis	72	85	85	79	100
Soluções Viáveis* (%)	72%	85%	85%	79%	100%
Média das Soluções Viáveis	3.9151	3.9153	3.9186	3.9227	-
Pior Valor Viável	3.9222	3.9266	3.9756	4.0401	-
Melhor Valor Viável	3.9138	3.9138	3.9138	3.9138	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	246.84	216.95	289.16	339.57	<b>21</b>
<b>Desvio Padrão</b>	239.74	239.13	370.05	365.0425	<b>0</b>
FAIPA					
	0,5% Ruído	1% Ruído	5% Ruído	10% Ruído	Sem Ruído
Média	3.9156	3.9161	3.9138	3.9142	3.9138
Desvio Padrão	0.0136	0.0139	0.0000	0.0043	0
Soluções Viáveis	98	98	100	96	100
Soluções Viáveis (%)	98%	98%	100%	96%	100%
Média das Soluções Viáveis	3.9138	3.9143	3.9138	3.9138	-
Pior Valor Viável	3.9138	3.9683	3.9138	3.9144	-
Melhor Valor Viável	3.9138	3.9138	3.9138	3.9138	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	24.44	28.88	26.79	34.84	<b>21</b>
<b>Desvio Padrão</b>	15.57	24.06	14.78	28.80	<b>0</b>

Tabela 43 - Ruído no gradiente das restrições para o domo e novo critério de parada

O novo critério de parada levou a resultados mais precisos e menos dispersos para os dois algoritmos utilizados. A quantidade de iterações necessárias, no entanto, foi maior.

Embora haja restrições violadas, isso provavelmente se deve a problemas relacionados com a precisão do computador e essas soluções poderiam ser utilizadas.

Média do Maior Valor das Restrições	0.5% Ruído	1% Ruído	5% Ruído	10% Ruído
FDIPA	-2.75373E-08	-1.7881E-08	-6.031E-09	- 0.000128
FAIPA	-2.8011E-07	-2.0815E-07	-1.4339E-07	-2.27E-06

Tabela 44 - Média do valor máximo das restrições para o domo

## B.7. Ruído no gradiente da função objetivo e restrições - Algoritmo com novo critério de parada

### B.7.1. Trelça de 10 barras

FDIPA					
	0,5% Ruído	1% Ruído	5% Ruído	10% Ruído	Sem Ruído
Média	1584.00	1584.00	1584.08	1584.81	1584.0003
Desvio Padrão	0.0019	0.0001	0.2346	3.1742	0
Soluções Viáveis	100	98	74	75	100
Soluções Viáveis (%)	100%	98%	74%	75%	100%
Média das Soluções Viáveis	1584.00	1584.00	1584.08	1584.80	-
Pior Valor Viável	1584.02	1584.01	1586.10	1615.17	-
Melhor Valor Viável	1584.00	1584.00	1584.00	1584.00	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	42.06	48.18	85.94	97.86	<b>27</b>
<b>Desvio Padrão</b>	9.2298	16.4626	33.62	37.6185	<b>0</b>
FAIPA					
	0,5% Ruído	1% Ruído	5% Ruído	10% Ruído	Sem Ruído
Média	1584.00	1584.00	1584.00	1584.31	1584.0000
Desvio Padrão	0.0000	0.0000	0.0065	1.9504	0
Soluções Viáveis	100	100	96	84	100
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	96%	84%	100%
Média das Soluções Viáveis	1584.00	1584.00	1584.00	1584.35	-
Pior Valor Viável	1584.00	1584.00	1584.05	1603.06	-
Melhor Valor Viável	1584.00	1584.00	1584.00	1584.00	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	35.78	36.82	69.33	90.87	<b>32</b>
<b>Desvio Padrão</b>	4.4160	6.3395	25.5335	35.9168	<b>0</b>

Tabela 45 - Ruído no gradiente da função objetivo e das restrições para a trelça de 10 barras e novo critério de parada

A mudança no critério de parada não trouxe melhoras significativas à precisão dos algoritmos utilizados.

Média do Maior Valor das Restrições	0.5% Ruído	1% Ruído	5% Ruído	10% Ruído
FDIPA	-3.1456E-10	-9.586E-10	-1.3721E-07	-7.97684E-05
FAIPA	-9.4237E-10	-1.008E-09	-1.201E-08	0.000371322

Tabela 46 - Média do valor máximo das restrições para a trelça de 10 barras

### B.7.2. Treliza de 72 barras

FDIPA					
	0,5% Ruído	1% Ruído	5% Ruído	10% Ruído	Sem Ruído
Média	370.55	370.55	373.12	376.07	370.54
Desvio Padrão	0.0014	0.0069	1.2448	3.4861	0
Soluções Viáveis	88	66	19	26	100
Soluções Viáveis (%)	88%	66%	19%	26%	100%
Média das Soluções Viáveis	370.55	370.55	373.16	374.96	-
Pior Valor Viável	370.55	370.61	377.00	382.25	-
Melhor Valor Viável	370.54	370.54	370.56	371.18	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	52.09	59.15	59.05	48.35	<b>38</b>
<b>Desvio Padrão</b>	11.75	14.80	21.01	18.182	<b>0</b>
FAIPA					
	0,5% Ruído	1% Ruído	5% Ruído	10% Ruído	Sem Ruído
Média	370.54	370.55	371.23	373.38	370.54
Desvio Padrão	0.0018	0.0050	0.7481	1.7377	0
Soluções Viáveis	91	67	50	37	100
Soluções Viáveis (%)	91%	67%	50%	37%	100%
Média das Soluções Viáveis	370.54	370.55	371.23	373.42	-
Pior Valor Viável	370.55	370.57	373.85	379.96	-
Melhor Valor Viável	370.54	370.55	370.55	370.68	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	57.60	60.77	78.89	71.4	<b>39</b>
<b>Desvio Padrão</b>	13.77	14.96	39.21	30.00	<b>0</b>

Tabela 47 - Ruído no gradiente da função objetivo e das restrições para a treliza de 72 barras e novo critério de parada

A alteração do critério de parada não melhorou a precisão dos resultados para o problema acima. Tendo, até mesmo piorado no caso específico de 10% de ruído usando o FDIPA.

Média do Maior Valor das Restrições	0.5% Ruído	1% Ruído	5% Ruído	10% Ruído
FDIPA	-2.95732E-08	-2.07079E-07	-5.81739E-08	-1.42E-06
FAIPA	-1.07637E-07	-1.83914E-07	-5.48371E-06	-1.13E-06

Tabela 48 - Média do valor máximo das restrições para a treliza de 72 barras



### B.7.3. Domo de 52 barras

FDIPA					
	0,5% Ruído	1% Ruído	5% Ruído	10% Ruído	Sem Ruído
Média	3.9153	3.9165	3.9161	3.9152	3.9138
Desvio Padrão	0.0032	0.0070	0.0050	0.0037	0
Soluções Viáveis	73	74	76	81	100
Soluções Viáveis (%)	0.73	0.74	0.76	0.81	100%
Média das Soluções Viáveis	3.9144	3.9153	3.9149	3.9143	-
Pior Valor Viável	3.9274	3.9472	3.9260	3.9237	-
Melhor Valor Viável	3.9138	3.9138	3.9138	3.9138	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	103.48	95.75	75.31	59.53	<b>21</b>
<b>Desvio Padrão</b>	92.54	73.52	60.81	44.16	<b>0</b>
FAIPA					
	0,5% Ruído	1% Ruído	5% Ruído	10% Ruído	Sem Ruído
Média	3.9138	3.9138	3.9140	3.9142	3.9138
Desvio Padrão	0.0000	0.0002	0.0021	0.0012	0
Soluções Viáveis	100	100	98	95	100
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	98%	95%	100%
Média das Soluções Viáveis	3.9138	3.9138	3.9138	3.9141	-
Pior Valor Viável	3.9138	3.9160	3.9150	3.9188	-
Melhor Valor Viável	3.9138	3.9138	3.9138	3.9138	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	24.47	25.65	27.58	43.18	<b>21</b>
<b>Desvio Padrão</b>	9.1612	12.9173	17.7196	24.7478	<b>0</b>

Tabela 49- Ruído no gradiente da função objetivo e das restrições para o domo e novo critério de parada

Pode ser observada uma leve melhora no desempenho do algoritmo quando comparamos com o critério de parada original. A média dos resultados foi um pouco melhor e a dispersão foi menor.

A convergência, como já foi observado em resultados anteriores, piorou.

Média do Maior Valor das Restrições	0.5% Ruído	1% Ruído	5% Ruído	10% Ruído
FDIPA	-2.4065E-07	-9.78442E-08	-3.7704E-06	-8.515E-06
FAIPA	-1.5383E-07	-1.63826E-07	-3.6105E-07	-1.764E-05

Tabela 50 - Média do valor máximo das restrições para o domo

## Apêndice C – Resultados Abrangendo Outros Casos de Ruído

### C.1. Efeito do Ruído Somente na Função

Primeiramente foi verificado o efeito do ruído adicionado na função objetivo. Os Resultados são:

#### C.1.1. Treliza de dez barras

FDIPA				
	0,5% Ruído	1% Ruído	5% Ruído	Sem Ruído
Média	1584.45	1585.08	1592.02	1584.00
Desvio Padrão	0.00115	1.9165	11.8895	0
Soluções Viáveis	100	100	100	100
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%	100%
Média das Soluções Viáveis	1584.45	1585.08	1592.02	-
Pior Valor Viável	1595.02	1595.03	1677.64	-
Melhor Valor Viável	1584.00	1584.00	1584.01	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	<b>20.06</b>	<b>19.32</b>	<b>18.45</b>	<b>23</b>
<b>Desvio Padrão</b>	<b>2.286632211</b>	<b>2.6586</b>	<b>2.93489972</b>	<b>0</b>
FAIPA				
	0,5% Ruído	1% Ruído	5% Ruído	Sem Ruído
Média	1584.77	1584.99	1592.33	1584.00
Desvio Padrão	0.7587	1.2229	9.7099	0
Soluções Viáveis	100	100	100	100
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%	100%
Média das Soluções Viáveis	1584.77	1584.99	1592.33	-
Pior Valor Viável	1588.04	1591.12	1634.73	-
Melhor Valor Viável	1584.01	1584.00	1584.02	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	<b>20.64</b>	<b>20.25</b>	<b>18.96</b>	<b>25</b>
<b>Desvio Padrão</b>	<b>2.5367</b>	<b>2.2625</b>	<b>2.7337</b>	<b>0</b>

Tabela 51 - Ruído somente na função objetivo para treliza de dez barras

Para o caso em que só há ruído na função objetivo, os resultados apresentados podem ser considerados satisfatórios. À medida que o nível de ruído adicionado foi aumentado, o valor da média dos resultados encontradas foi maior. No entanto, a adição artificial de ruído teve pouco impacto no resultado final, e o valor obtido sem ruído esta sempre dentro do intervalo de confiança da amostra.

O número de iterações até o resultado foi menor à medida que o ruído aumentava, mas isso não significa que houve uma melhora na convergência. Em algoritmos de ponto interior o vetor direção de busca tende a ficar pequeno quando o resultado está

próximo , a presença de ruído nas funções pode levar a um erro no teste de convergência e, conseqüentemente, a uma convergência prematura.

### C.1.2. Treliça de 72 barras

<b>FDIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Média	372.42	374.74	385.75	370.54
Desvio Padrão	2.5428	3.9377	7.3647	0
Soluções Viáveis	100	100	100	100
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%	100%
Média das Soluções Viáveis	372.42	374.74	385.75	-
Pior Valor Viável	389.82	390.08	412.95	-
Melhor Valor Viável	370.54	370.64	373.62	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	28.69	23.69	15.25	<b>32</b>
<b>Desvio Padrão</b>	<b>6.8205</b>	<b>5.8026</b>	<b>4.9836</b>	<b>0</b>
<b>FAIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Média	372.66	375.09	396.28	370.54
Desvio Padrão	8.6055	11.3106	22.6616	0
Soluções Viáveis	100	100	100	100
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%	100%
Média das Soluções Viáveis	372.66	375.0860	396.28	-
Pior Valor Viável	420.39	415.5803	447.98	-
Melhor Valor Viável	370.54	370.5434	370.68	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	29.61	28.18	19.95	<b>33</b>
<b>Desvio Padrão</b>	<b>4.3226</b>	<b>5.4706</b>	<b>6.4907</b>	<b>0</b>

Tabela 52 - Ruído somente na função objetivo para treliça de 72 barras

Para a treliça de 72 barras as conclusões são similares às conclusões da treliça de 10 barras. No entanto alguns valores chamam a atenção: o impacto relativo do ruído foi muito maior em todas as faixas de ruído e houve diferença significativa entre o desempenho do FAIPA e do FDIPA, com vantagem para o segundo. Analisar somente a média, nesse caso, pode nos induzir ao erro, considerando apenas o melhor valor da amostra, o método FAIPA mostrou um desempenho melhor que o FDIPA. Apresentou, no entanto, maior dispersão.

A quantidade média de iterações necessárias para atingir o resultado foi menor do que o valor de referência. Como já foi dito, isso pode ter sido causado por uma convergência prematura do algoritmo.

### C.1.3. Domo de 52 barras

FDIPA				
	0,5% Ruído	1% Ruído	5% Ruído	Sem Ruído
Média	3.9148	3.9179	3.9347	3.9138
Desvio Padrão	0.0014	0.0063	0.0334	0
Soluções Viáveis	100	100	100	100
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%	100%
Média das Soluções Viáveis	3.9148	3.9179	3.9347	-
Pior Valor Viável	3.9201	3.9461	4.1276	-
Melhor Valor Viável	3.9138	3.9138	3.9139	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	17.56	16.23	14.61	<b>16</b>
<b>Desvio Padrão</b>	<b>2.1001</b>	2.5736	31.2625	<b>0</b>
FAIPA				
	0,5% Ruído	1% Ruído	5% Ruído	Sem Ruído
Média	3.914534384	3.9153	4.0755	3.9138
Desvio Padrão	0.000927968	0.0021	1.0776	0
Soluções Viáveis	100	100	100	100
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%	100%
Média das Soluções Viáveis	3.914534384	3.9153	4.0755	-
Pior Valor Viável	3.919243221	3.9241	11.580	-
Melhor Valor Viável	3.913771797	3.9138	3.9138	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	16.17	15.83	14.55	<b>15</b>
<b>Desvio Padrão</b>	<b>2.122772154</b>	<b>2.1323</b>	<b>32.2192</b>	<b>0</b>

Tabela 53 - Ruído somente na função objetivo para o domo de 52 barras

Nesse exemplo ambos os algoritmos funcionaram bem em todas as faixas de ruído. Especialmente em 0,5 e 1%. Mais uma vez parece que na faixa de 5% de ruído, o algoritmo FDIPA apresentou menor dispersão e o FAIPA um melhor resultado. Vemos que, apesar da média, com um número grande de amostras é possível chegar a um valor muito próximo do valor correto considerando apenas os melhores resultados viáveis.

## C.2. Ruído Somente nas Restrições

### C.2.1. Treliza de 10 barras:

FDIPA				
	0.50%	1%	5%	Sem Ruído
Média	1593.86	1606.62	1741.19	1584.00
Desvio Padrão	4.2198	9.2347	47.3512	0
Soluções Viáveis	1	0	3	100
Soluções Viáveis (%)	1%	0%	3%	100%
Média das Soluções Viáveis	1588.27	-	1719.30	-
Pior Valor Viável	1588.27	-	1780.07	-
Melhor Valor Viável	1588.27	-	1655.39	-
Número Médio de Iterações	23.39	22.91	18.61	<b>23</b>
Desvio Padrão	5.5010	4.3995	5.0650	<b>0</b>
FAIPA				
	0.50%	1%	5%	Sem Ruído
Média	1591.72	1601.143	1710.90	1584.00
Desvio Padrão	2.0380	6.9083	84.5114	0
Soluções Viáveis	8	6	5	100
Soluções Viáveis (%)	8%	6%	5%	100%
Média das Soluções Viáveis	1592.59	1601.68	1699.00	-
Pior Valor Viável	1593.84	1606.36	1734.57	-
Melhor Valor Viável	1591.02	1598.31	1652.66	-
Número Médio de Iterações	23.61	23.94	23.91	<b>25</b>
Desvio Padrão	4.8884	5.2045	7.0712	<b>0</b>

Tabela 54 - Ruído somente nas restrições para treliza de dez barras

A primeira coisa que chama a atenção nesse exemplo é a baixa quantidade de soluções viáveis encontradas, menos de 10% em todos os casos. Outra coisa que chama a atenção é a piora no resultado à medida que o nível de ruído aumenta. Isso evidencia que ruído nas restrições não afeta somente a viabilidade do resultado final, mas também a direção de busca. Em comparação com os resultados obtidos quando só havia ruído na função objetivo, os resultados aqui encontrados foram consideravelmente piores, em todas as faixas de ruído.

O número de iterações até chegar ao resultado indica que houve uma convergência precoce. Analisando os arquivos de texto gerados junto com as amostras verificou-se que as causas de erro são: número de iterações da busca linear excedida, possivelmente causado porque a busca saiu do interior da região viável; e redução da função menor que a tolerância, erro que também pode estar ligado a busca linear.

### C.2.2. Treliça de 72 Barras

FDIPA				
	0.50%	1%	5%	Sem Ruído
Média	371.36	371.32	369.06	370.54
Desvio Padrão	1.8551	2.7591	6.7447	0
Soluções Viáveis	0	0	0	100
Soluções Viáveis (%)	0%	0%	0%	100%
Média das Soluções Viáveis	-	-	-	-
Pior Valor Viável	-	-	-	-
Melhor Valor Viável	-	-	-	-
Número Médio de Iterações	32.30	28.43	24.39	<b>32</b>
Desvio Padrão	8.2713	7.3899399	6.8710	<b>0</b>
FAIPA				
	0.50%	1%	5%	Sem Ruído
Média	370.46	370.18	369.61	370.54
Desvio Padrão	0.3417	0.5326	4.1223	0
Soluções Viáveis	2	0	0	100
Soluções Viáveis (%)	2%	0%	0%	100%
Média das Soluções Viáveis	371.07	-	-	-
Pior Valor Viável	371.39	-	-	-
Melhor Valor Viável	370.75	-	-	-
Número Médio de Iterações	32.68	33.49	29.32	<b>33</b>
Desvio Padrão	5.1383	5.2117	7.6987	<b>0</b>

Tabela 55 - Ruído somente nas restrições para treliça de 72 barras

Para a treliça de 72 barras também não foi possível encontrar valores viáveis, no entanto, os valores encontrados diminuem à medida que o nível de ruído aumenta.

A razão para que isso aconteça parece ser que o efeito do ruído sobre a convergência do algoritmo não é tão significativo quanto seu efeito sobre a viabilidade do resultado.

Afora isso, pouco pode ser dito sobre os resultados, uma vez que eles não são viáveis.

### C.2.3. Domo de 52 barras:

FDIPA				
	0.50%	1%	5%	Sem Ruído
Media	3.9349	3.9476	4.0943	3.9138
Desvio Padrão	0.0114	0.0115	0.0396	0
Soluções Viáveis	9	13	20	100
Soluções Viáveis (%)	9%	13%	20%	100%
Media das Soluções Viáveis	3.9365	3.9540	4.1139	-
Pior Valor Viável	3.9446	3.9743	4.1683	-
Melhor Valor Viável	3.9315	3.9403	4.07333	-
Número Médio de Iterações	15.95	16.28	14.98	<b>16</b>
<b>Desvio Padrão</b>	<b>3.5884</b>	<b>3.0817</b>	<b>3.8085</b>	<b>0</b>
FAIPA				
	0.50%	1%	5%	Sem Ruído
Media	3.9366	3.9606	4.1648	3.9138
Desvio Padrão	0.0126	0.0216	0.1041	0
Soluções Viáveis	7	9	15	100
Soluções Viáveis (%)	7%	9%	15%	100%
Media das Soluções Viáveis	3.9366	3.9606	4.1648	-
Pior Valor Viável	4.0048	4.0724	4.6179	-
Melhor Valor Viável	3.9130	3.9279	4.0101	-
Número Médio de Iterações	15.86	15.99	16.97	<b>15</b>
<b>Desvio Padrão</b>	<b>3.4201</b>	<b>3.7430</b>	<b>4.4164</b>	<b>0</b>

Tabela 56 - Ruído somente nas restrições para o domo de 52 barras

Para o domo foi possível encontrar mais soluções viáveis em comparação com os dois primeiros problemas. O efeito do ruído foi mais intenso sobre a direção de busca do que sobre a viabilidade da solução.

Os resultados da tabela deixam clara a dicotomia entre viabilidade a viabilidade dos resultados e a convergência do algoritmo. O resultado com pior convergência foi o que teve mais valores viáveis e vice-versa.

## C.4. Efeito do ruído na função objetivo e em seus gradientes

### C.4.1. Treliza de 10 barras

<b>FDIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Média	1584.96	1586.66	1629.93	1584.00
Desvio Padrão	1.1169	7.3754	76.6196	0
Soluções Viáveis	100	100	100	100
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%	100%
Média das Soluções Viáveis	1584.96	1586.66	1629.93	-
Pior Valor Viável	1590.43	1656.37	2086.26	-
Melhor Valor Viável	1584.04	1584.05	1585.46	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	20.67	19.55	19.87	<b>23</b>
<b>Desvio Padrão</b>	2.4906	2.5441	4.7877	<b>0</b>
<b>FAIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Média	1585.26	1590.71	1624.29	1584.00
Desvio Padrão	1.5678	35.8207	56.05	0
Soluções Viáveis	100	100	100	100
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%	100%
Média das Soluções Viáveis	1585.26	1590.71	1624.29	-
Pior Valor Viável	1592.14	1942.67	1949.20	-
Melhor Valor Viável	1584.01	1584.10	1584.75	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	21.23	20.93	19.14	<b>25</b>

Tabela 57 - Ruído na função objetivo e em seus gradientes para treliza de dez barras

Quando ao ruído na função objetivo soma-se ruído no gradiente, nota-se uma piora na média dos resultados mais intensa do que quando há somente ruído na função e também uma leve piora na convergência. A piora na convergência, como ficará mais evidente ao longo do trabalho, pode ser associada ao ruído no gradiente, enquanto a piora na média dos resultados é causada provavelmente pelo ruído na função e agravada pelo ruído nos gradientes.



#### C.4.2. Treliza de 72 barras

<b>FDIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Média	373.06	376.03	387.15	370.54
Desvio Padrão	2.3825	3.8938	6.2135	0
Soluções Viáveis	100	100	100	100
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%	100%
Média das Soluções Viáveis	373.06	376.03	387.15	-
Pior Valor Viável	389.38	390.36	398.45	-
Melhor Valor Viável	370.55	370.61	374.91	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	27.03	21.48	14.24	<b>32</b>
<b>Desvio Padrão</b>	6.3125	5.2810	3.8353	<b>0</b>
<b>FAIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Média	372.18	374.14	386.9941	370.54
Desvio Padrão	4.8306	5.3974	10.4884	0
Soluções Viáveis	100	100	100	100
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%	100%
Média das Soluções Viáveis	372.18	374.14	386.99	-
Pior Valor Viável	400.75	410.15	432.37	-
Melhor Valor Viável	370.55	370.59	373.57	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	28.97	26.62	18.49	<b>33</b>
<b>Desvio Padrão</b>	5.7021	5.4842	4.3170	<b>0</b>

Tabela 58 - Ruído na função objetivo e em seus gradientes para treliza de 72 barras

Para o problema de 72 barras, predomina o efeito do ruído na função objetivo, sendo os resultados encontrados parecidos com o da Tabela 2. O efeito do ruído nos gradientes não é notado nem na média do número de iterações necessárias.

### C.4.3. Domo

<b>FDIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Média	3.9263	3.9291	3.9417	3.9138
Desvio Padrão	0.0121	0.0176	0.0309	0
Soluções Viáveis	100	100	100	100
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%	100%
Média das Soluções Viáveis	3.9263	3.9291	3.9417	-
Pior Valor Viável	3.9647	3.9961	4.0793	-
Melhor Valor Viável	3.9138	3.9138	3.9139	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	17.43	16.23	15.03	<b>16</b>
<b>Desvio Padrão</b>	3.3912	2.5736	2.4719	<b>0</b>
<b>FAIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Média	3.9198	3.9232	4.0104	3.9138
Desvio Padrão	0.0264	0.0205	0.7732	0
Soluções Viáveis	100	100	100	100
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%	100%
Média das Soluções Viáveis	3.9198	3.9232	4.0104	-
Pior Valor Viável	4.1649	4.0135	11.6615	-
Melhor Valor Viável	3.9138	3.9138	3.9138	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	16.36	16.53	15.06	<b>15</b>
<b>Desvio Padrão</b>	2.7310	2.5444	2.9774	<b>0</b>

Tabela 59 - Ruído na função objetivo e em seus gradientes para o domo de 52 barras

Nos resultados apresentados na tabela 9 nota-se que a piora no desempenho dos algoritmos se deve ao efeito do ruído na função objetivo, uma vez que esses resultados se assemelham aos apresentados na Tabela 3.

## C.4. Ruído nas restrições e seus gradientes

### C.4.1. Treliza de 10 barras

<b>FDIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Média	1594.16	1612.62	1755.20	1584.00
Desvio Padrão	3.9751	35.0177	63.8082	0
Soluções Viáveis	0	0	0	100
Soluções Viáveis (%)	0	0	0	100%
Média das Soluções Viáveis	-	-	1755.20	-
Pior Valor Viável	-	-	1959.58	-
Melhor Valor Viável	-	-	1641.82	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	24.26	25.33	20.25	<b>23</b>
<b>Desvio Padrão</b>	5.6829	6.8815	7.0645	<b>0</b>
<b>FAIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Média	1592.00	1602.68	1702.75	1584.00
Desvio Padrão	2.9396	23.1579	50.5735	0
Soluções Viáveis	11	8	2	100
Soluções Viáveis (%)	11%	8%	2%	100%
Média das Soluções Viáveis	1592.35	1603.04	1669.38	-
Pior Valor Viável	1596.13	1612.52	1673.91	-
Melhor Valor Viável	1590.57	1596.71	1664.84	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	25.54	24.51	22.5	<b>25</b>
<b>Desvio Padrão</b>	5.0979	5.8405	6.6765	<b>0</b>

Tabela 60 - Ruído nas restrições e em seus gradientes para treliza de dez barras

Os resultados apresentados na Tabela 10 assemelham-se aos resultados da tabela 4. O que indica que o ruído nas restrições tem maior impacto sobre o resultado final do que seus gradientes.

Houve pouca diferença entre o número de resultados viáveis e o número médio de iterações entre essas duas tabelas, parece, no entanto, que para níveis moderados de ruído o número médio de iterações fica um pouco maior (embora a dispersão não permita uma conclusão definitiva) e o número de resultados viáveis fica um pouco maior. Essa hipótese seria condizente com os outros resultados encontrados.

#### C.4.2. Treliza de 72 Barras

<b>FDIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Média	372.71	374.53	374.12	370.54
Desvio Padrão	1.9567	3.3957	6.6368	0
Soluções Viáveis	0	0	0	100
Soluções Viáveis (%)	0	0	0	100%
Média das Soluções Viáveis	372.71	374.53	374.12	-
Pior Valor Viável	384.82	385.28	405.53	-
Melhor Valor Viável	370.06	370.17	365.14	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	30.35	29.84	25.38	<b>32</b>
<b>Desvio Padrão</b>	7.6546	9.1373	8.9485	<b>0</b>
<b>FAIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Média	370.51	370.89	370.86	370.54
Desvio Padrão	0.5441	1.6216	4.9693	0
Soluções Viáveis	0	0	0	100
Soluções Viáveis (%)	0	0	0	100%
Média das Soluções Viáveis	370.77	370.89	370.86	-
Pior Valor Viável	371.16	380.85	391.97	-
Melhor Valor Viável	370.38	369.15	364.06	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	38.69	36.56	30.64	<b>33</b>
<b>Desvio Padrão</b>	8.9507	8.2698	7.6667	<b>0</b>

Tabela 61 - Ruído nas restrições e em seus gradientes para treliza de 72 barras

A falta de resultados viáveis não permite uma análise conclusiva dos resultados. No entanto, com o exposto na tabela é possível notar qual é a influência da associação do ruído nas restrições e em seus gradientes nos algoritmos. Os resultados obtidos não podem ser atribuídos isoladamente ao ruído nas restrições ou aos gradientes.

Nota-se que enquanto o valor da média dos resultados diminuía a medida que o nível de ruído aumentava, quando só havia ruído nas restrições, o mesmo não ocorre se colocarmos ruído somente nos gradientes.

### C.4.3. Domo de 52 barras

<b>FDIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Média	3.9379	3.9559	4.1110	3.9138
Desvio Padrão	0.0173	0.0283	0.0517	0
Soluções Viáveis	6	12	75	100
Soluções Viáveis (%)	6%	12%	75%	100%
Média das Soluções Viáveis	3.9374	3.9511	4.1351	-
Pior Valor Viável	3.9457	3.9676	4.2844	-
Melhor Valor Viável	3.9308	3.9400	4.0618	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	16.3	15.31	15.7	<b>16</b>
<b>Desvio Padrão</b>	3.2146	3.5411	3.9067	<b>0</b>
<b>FAIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Média	3.9290	3.9659	4.1775	3.9138
Desvio Padrão	0.0080	0.0362	0.1031	0
Soluções Viáveis	4	8	14	100
Soluções Viáveis (%)	4%	8%	14%	100%
Média das Soluções Viáveis	3.9293	3.9666	4.1589	-
Pior Valor Viável	3.9336	4.0059	4.3541	-
Melhor Valor Viável	3.9247	3.9467	4.0685	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	22.01	15.59	14.98	<b>15</b>
<b>Desvio Padrão</b>	6.7697	3.5394	3.7712	<b>0</b>

Tabela 62 - Ruído nas restrições e em seus gradientes para o domo de 52 barras

Os resultados apresentados na Tabela 12 assemelham-se aos resultados da Tabela 6. Indicando, como já visto nas Tabelas 10 e 11, que o ruído nas restrições tem mais importância no resultado final do que o ruído em seus gradientes.

### C.5. Ruído nas restrições e nos gradientes

Vejam agora o que acontece quando o temos ruído na restrição e nos gradientes

#### C.5.1. Treliza de 10 Barras

<b>FDIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Média	1592.85	1615.4007	1767.74	1584.00
Desvio Padrão	3.1799	32.9736	82.1220	0
Soluções Viáveis	0	0	1	100
Soluções Viáveis (%)	0	0	1%	100%
Média das Soluções Viáveis	1592.85	1615.40	1734.57	-
Pior Valor Viável	1602.87	1908.98	1734.57	-
Melhor Valor Viável	1587.08	1585.13	1734.57	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	29.7	23.74	22.54	<b>23</b>
<b>Desvio Padrão</b>	8.3925	6.9915	7.4487	<b>0</b>
<b>FAIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Média	1591.37	1600.73	1728.77	1584.00
Desvio Padrão	2.1325	7.6561	104.1086	0
Soluções Viáveis	5	8	8	100
Soluções Viáveis (%)	5%	8%	8%	100%
Média das Soluções Viáveis	1593.68	1601.80	1697.51	-
Pior Valor Viável	1596.98	1607.78	1795.92	-
Melhor Valor Viável	1590.19	1595.84	1661.21	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	24.53	23.38	24.59	<b>25</b>
<b>Desvio Padrão</b>	5.6075	5.7976	8.8433	<b>0</b>

Tabela 63 - Ruído nas restrições e em ambos os gradientes para treliza de dez barras

Pode-se observar que o ruído teve impacto tanto na média dos resultados quanto em sua viabilidade. O número de iterações necessárias não foi muito diferente do caso sem ruído, mas como o resultado foi pior, pode-se concluir que houve uma piora na convergência.

### C.5.2. Treliza de 72 Barras

FDIPA				
	0,5% Ruído	1% Ruído	5% Ruído	Sem Ruído
Média	372.40	3.74	373.08	370.54
Desvio Padrão	1.5444	0.0328	5.6745	0
Soluções Viáveis	0	0	0	100
Soluções Viáveis (%)	0	0	0	100%
Média das Soluções Viáveis	372.4044	3.74	373.08	-
Pior Valor Viável	377.3097	3.87	399.47	-
Melhor Valor Viável	370.1054	3.70	364.85	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	30.41	29.27	25.57	<b>32</b>
<b>Desvio Padrão</b>	7.5466	8.5621	8.7804	<b>0</b>
FAIPA				
	0,5% Ruído	1% Ruído	5% Ruído	Sem Ruído
Média	370.59	370.71	372.56	370.54
Desvio Padrão	0.5910	1.4501	12.5926	0
Soluções Viáveis	0	0	0	100
Soluções Viáveis (%)	0	0	0	100%
Média das Soluções Viáveis	370.59	370.71	372.5585	-
Pior Valor Viável	373.26	377.16	481.5331	-
Melhor Valor Viável	369.81	368.99	363.4536	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	39.12	37.11	31.61	<b>33</b>
<b>Desvio Padrão</b>	9.4786	8.8202	9.8123	<b>0</b>

Tabela 64 - Ruído nas restrições e em ambos os gradientes para treliza de 72 barras

A média dos resultados obtidos foi próxima do resultado encontrado quando não havia ruído, especialmente se considerarmos os resultados obtidos para o FAIPA, que foi mais eficaz para todos os níveis de ruído.

Quanto à viabilidade, os resultados foram menos animadores, visto que nenhuma das 100 amostras é viável. Apesar disso, na maioria dos casos, as restrições foram pouco violadas. Abaixo temos uma tabela com a média e o desvio padrão dos valores máximos das restrições. Podemos ver que realizar a otimização para uma tensão máxima aproximadamente 2% menor que a admitida no projeto, poderia levar a um resultado que na prática seria viável.

### C.5.3. Domo

<b>FDIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Média	3.9379	3.9569	4.1200	3.9138
Desvio Padrão	0.0173	0.0179	0.0517	0
Soluções Viáveis	6	15	75	100
Soluções Viáveis (%)	6%	15%	75%	100%
Média das Soluções Viáveis	3.9374	3.9619	4.1351	-
Pior Valor Viável	3.9457	4.0036	4.2844	-
Melhor Valor Viável	3.9308	3.9409	4.0618	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	16.3	16.07	15.7	<b>16</b>
<b>Desvio Padrão</b>	3.2146	3.6907	3.9067	<b>0</b>
<b>FAIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Média	3.9386	3.9386	4.1584	3.9138
Desvio Padrão	0.01534395	0.0153	0.0875	0
Soluções Viáveis	8	8	14	100
Soluções Viáveis (%)	8%	8%	14%	100%
Média das Soluções Viáveis	3.9368	3.9386	4.1541	-
Pior Valor Viável	3.9553	4.0134	4.3081	-
Melhor Valor Viável	3.9283	3.9178	4.0721	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	15.50	15.46	16.38	<b>15</b>
<b>Desvio Padrão</b>	2.9284	4.3634	4.0546	<b>0</b>

Tabela 65 - Ruído nas restrições e em ambos os gradientes para o domo de 52 barras

Pode ser observado um efeito similar ao que ocorreu para o problema de 72 barras. A diferença é que a quantidade de resultados viáveis encontrados foi maior e o desempenho do algoritmo FAIPA não apresentou desempenho melhor que o FDIPA como aconteceu no problema teste anterior.

Analisando também o número de iterações até se chegar ao resultado percebe-se que para o problema do domo, o ruído tem um maior efeito sobre a convergência dos algoritmos do que sobre a viabilidade dos resultados encontrados.



## C.6. Ruído em tudo

### C.6.1. Treliza de dez barras

<b>FDIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	1586.47	1586.47	1943.15	1584.00
Desvio Padrão	22.65	22.65	160.55	0.00
Soluções Viáveis	100.00	100.00	17.00	100.00
Soluções Viáveis (%)	1.00	1.00	0.17	1.00
Media das Soluções Viáveis	1586.47	1586.47	1943.15	-
Pior Valor Viável	1810.56	1810.56	2617.82	-
Melhor Valor Viável	1584.00	1584.00	1660.30	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	39.29	17.73	11.98	<b>23.00</b>
<b>Desvio Padrão</b>	9.20	2.63	2.72	<b>0.00</b>
<b>FAIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	1600.86	1601.66	1905.72	1584.00
Desvio Padrão	11.42	16.87	135.28	0.00
Soluções Viáveis	32.00	29.00	25.00	100.00
Soluções Viáveis (%)	0.32	0.29	0.25	1.00
Media das Soluções Viáveis	1600.86	1601.66	1905.72	-
Pior Valor Viável	1665.36	1757.45	2324.05	-
Melhor Valor Viável	1587.80	1590.55	1671.28	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	18.09	17.75	12.25	<b>25.00</b>
<b>Desvio Padrão</b>	2.40	2.45	3.25	<b>0.00</b>

Tabela 66 - Ruído em tudo para treliza de dez barras

Os resultados obtidos para a treliza de 10 Barras demonstram que o efeito combinado do ruído em todos os componentes tem maior impacto que cada um deles isolados. Dos resultados também é possível observar que o algoritmo FDIPA obteve um melhor desempenho tanto para encontrar melhores resultados quanto para alcançar soluções viáveis.

Apesar do efeito do ruído, nota-se que a melhor solução encontrada usando o algoritmo FDIPA é muito próxima da solução exata para um nível de ruído moderado.

### C.6.2. Treliza de 72 Barras

<b>FDIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	377.17	377.80	399.79	370.54
Desvio Padrão	3.81	3.86	14.42	0.00
Soluções Viáveis	19.00	16.00	13.00	100.00
Soluções Viáveis (%)	0.19	0.16	0.13	1.00
Media das Soluções Viáveis	375.84	376.50	407.86	-
Pior Valor Viável	386.74	382.36	436.11	-
Melhor Valor Viável	371.32	374.79	394.95	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	18.74	18.74	10.80	<b>32.00</b>
<b>Desvio Padrão</b>	4.26	3.97	2.75	<b>0.00</b>
<b>FAIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	375.35	375.27	398.55	370.54
Desvio Padrão	6.46	3.37	13.75	0.00
Soluções Viáveis	42.00	36.00	45.00	100.00
Soluções Viáveis (%)	0.42	0.36	0.45	1.00
Media das Soluções Viáveis	374.95	373.91	400.23	-
Pior Valor Viável	390.16	379.28	451.46	-
Melhor Valor Viável	371.05	371.16	380.68	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	24.24	23.27	14.42	<b>33.00</b>
<b>Desvio Padrão</b>	5.23	4.88	3.17	<b>0.00</b>

Tabela 67 - Ruído em tudo para treliza de 72 barras

Para o problema de 72 Barras, a adição de ruído causou uma piora nas médias dos resultados. O algoritmo FAIPA foi mais eficiente em encontrar soluções viáveis e foi o algoritmo que encontrou os melhores resultados.

É interessante notar que a quantidade de soluções viáveis é maior do que quando temos ruído somente nas restrições.

A convergência foi afetada. Ocorreu precocemente para níveis baixos de ruído e ainda mais precocemente à medida que o nível de ruído aumentava.

### C.6.3. Domo de 52 Barras

<b>FDIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	3.9208	3.9541	4.3167	3.9138
Desvio Padrão	0.0192	0.0248	0.7332	0.0000
Soluções Viáveis	100.0000	24.0000	30.0000	100.0000
Soluções Viáveis (%)	1.0000	0.2400	0.3000	1.0000
Media das Soluções Viáveis	3.9208	3.9504	4.4914	-
Pior Valor Viável	4.0769	3.9745	11.4885	-
Melhor Valor Viável	3.9138	3.9301	4.1053	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	19.0300	14.1200	11.8100	<b>16.0000</b>
<b>Desvio Padrão</b>	4.2532	2.3880	2.1821	<b>0.0000</b>
<b>FAIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	3.9475	3.9475	3.9550	3.9138
Desvio Padrão	0.0164	0.0164	0.0282	0.0000
Soluções Viáveis	28.0000	28.0000	21.0000	100.0000
Soluções Viáveis (%)	0.2800	0.2800	0.2100	1.0000
Media das Soluções Viáveis	3.9592	3.9592	3.9615	-
Pior Valor Viável	4.0294	4.0294	4.0294	-
Melhor Valor Viável	3.9353	3.9353	3.9398	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	13.8500	13.7000	12.6200	<b>15.0000</b>
<b>Desvio Padrão</b>	2.2445	2.6034	2.6392	<b>0.0000</b>

Tabela 68 - Ruído em tudo para o domo de 52 barras

Para o domo de 52 barras, foi possível chegar a um resultado próximo do correto com os algoritmos. Para 0.5% de ruído, o algoritmo FDIPA obteve um desempenho melhor, enquanto para 5% de ruído o melhor desempenho foi do FAIPA. Para 1% de ruído ambos tiveram um desempenho parecido.

### C.7. Novo Critério de Parada

Usando o critério de parada proposto inicialmente para problemas com ruído nos gradientes obtemos os seguintes resultados:

### C.8. Ruído somente na função – Novo critério de parada

#### C.8.1. Treliça de 10 barras

<b>FDIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	1584.49	1585.01	1593.53	1584.00
Desvio Padrão	1.14	1.45	17.24	0.00
Soluções Viáveis	100.00	100.00	100.00	100.00
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%	100%
Media das Soluções Viáveis	1584.49	1585.01	1593.53	-
Pior Valor Viável	1594.37	1591.09	1720.00	-
Melhor Valor Viável	1584.00	1584.00	1584.04	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	20.03	19.72	17.88	<b>23.00</b>
<b>Desvio Padrão</b>	2.52	2.25	3.14	<b>0.00</b>
<b>FAIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	1584.71	1585.12	1593.50	1584.00
Desvio Padrão	0.87	1.15	20.04	0.00
Soluções Viáveis	100.00	100.00	100.00	100.00
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%	100%
Media das Soluções Viáveis	1584.71	1585.12	1593.50	-
Pior Valor Viável	1589.77	1590.81	1736.55	-
Melhor Valor Viável	1584.00	1584.01	1584.02	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	21.27	20.24	19.22	<b>25.00</b>
<b>Desvio Padrão</b>	2.73	2.38	3.02	<b>0.00</b>

Tabela 69 - Ruído na função objetivo para treliça de dez barras usando o novo critério de parada

Não foi observada nenhuma diferença no desempenho dos algoritmos usando o novo critério de parada.

### C.8.2. Treliza de 72 barras

<b>FDIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	372.85	375.34	388.10	370.54
Desvio Padrão	3.45	4.79	6.86	0.00
Soluções Viáveis	100.00	100.00	100.00	100.00
Soluções Viáveis (%)	1.00	1.00	1.00	1.00
Media das Soluções Viáveis	372.85	375.34	387.40	-
Pior Valor Viável	388.54	390.63	403.38	-
Melhor Valor Viável	370.55	370.56	374.01	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	28.62	23.01	13.90	<b>32.00</b>
<b>Desvio Padrão</b>	7.59	6.65	4.58	<b>0.00</b>
<b>FAIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	371.84	376.22	400.20	370.54
Desvio Padrão	6.16	12.74	23.72	0.00
Soluções Viáveis	100.00	100.00	100.00	100.00
Soluções Viáveis (%)	1.00	1.00	1.00	1.00
Media das Soluções Viáveis	371.84	376.22	400.20	-
Pior Valor Viável	412.81	420.39	449.68	-
Melhor Valor Viável	370.54	370.54	370.58	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	29.80	27.99	18.84	<b>33.00</b>
<b>Desvio Padrão</b>	3.65	5.88	6.93	<b>0.00</b>

Tabela 70 - Ruído na função objetivo para treliza de 72 barras usando o novo critério de parada

Não foi observada nenhuma diferença no desempenho dos algoritmos usando o novo critério de parada.

### C.8.3. Domo de 52 barras

<b>FDIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	3.9153	3.9169	3.9331	3.9138
Desvio Padrão	0.0023	0.0049	0.0287	0.0000
Soluções Viáveis	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000
Soluções Viáveis (%)	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
Media das Soluções Viáveis	3.9153	3.9169	3.9331	-
Pior Valor Viável	3.9304	3.9434	4.1254	-
Melhor Valor Viável	3.9138	3.9138	3.9138	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	17.3700	16.8400	14.8900	<b>16.0000</b>
<b>Desvio Padrão</b>	2.4809	2.5415	2.5698	<b>0.0000</b>
<b>FAIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	3.9147	3.9150	3.9224	3.9138
Desvio Padrão	0.0012	0.0014	0.0161	0.0000
Soluções Viáveis	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000
Soluções Viáveis (%)	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
Media das Soluções Viáveis	3.9147	3.9150	3.9224	-
Pior Valor Viável	3.9192	3.9219	4.0309	-
Melhor Valor Viável	3.9138	3.9138	3.9138	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	16.0400	15.6100	14.5400	<b>15.0000</b>
<b>Desvio Padrão</b>	2.2380	2.1922	2.6531	<b>0.0000</b>

Tabela 71 - Ruído na função objetivo para treliça de 72 barras usando o novo critério de parada

Não é possível observar nenhuma melhora no desempenho dos algoritmos causada pela alteração do critério de parada. Mesmo para o FAIPA com 5% de ruído não é possível afirmar que houve uma grande melhora no desempenho porque a média obtida para o resultado sem ruído foi alterada por outliers.

## C.9. Efeito do ruído somente nas restrições - Novo critério de parada

### C.9.1. Treliza de 10 barras

FDIPA				
	0,5% Ruído	1% Ruído	5% Ruído	Sem Ruído
Media	1591.83	1605.02	1714.02	1584.00
Desvio Padrão	3.31	8.55	42.63	0.00
Soluções Viáveis	3.00	1.00	0.00	100.00
Soluções Viáveis (%)	0.03	0.01	0.00	1.00
Media das Soluções Viáveis	1593.85	1613.15	1714.02	-
Pior Valor Viável	1595.04	1613.15	1895.71	-
Melhor Valor Viável	1592.96	1613.15	1634.15	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	27.58	26.33	23.47	<b>23.00</b>
<b>Desvio Padrão</b>	7.73	7.00	7.92	<b>0.00</b>
FAIPA				
	0,5% Ruído	1% Ruído	5% Ruído	Sem Ruído
Media	1589.86	1595.82	1691.77	1584.00
Desvio Padrão	2.30	4.99	189.10	0.00
Soluções Viáveis	6.00	1.00	4.00	100.00
Soluções Viáveis (%)	0.06	0.01	0.04	1.00
Media das Soluções Viáveis	1592.15	1600.63	1681.27	-
Pior Valor Viável	1594.71	1600.63	1722.81	-
Melhor Valor Viável	1590.23	1600.63	1661.56	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	27.80	28.33	22.74	<b>25.00</b>
<b>Desvio Padrão</b>	6.88	7.23	7.22	<b>0.00</b>

Tabela 72 - Ruído somente nas restrições para treliza de dez barras usando o novo critério de parada

Houve uma melhora leve na média dos resultados encontrados, mas essa pode ser uma observação precipitada devido ao baixo número de resultados viáveis.

O resultado mais interessante que pode ser observado na tabela acima é que, mesmo com um maior número de iterações, em média, foi possível alcançar quantidade similar de resultados viáveis com os dois critérios de parada. Em ambos os casos o FAIPA leve uma ligeira vantagem sobre o FDIPA.

### C.9.2. Treliza de 72 barras

<b>FDIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	370.61	370.43	366.51	370.54
Desvio Padrão	1.86	3.13	7.32	0.00
Soluções Viáveis	0.00	0.00	0.00	100.00
Soluções Viáveis (%)	0%	0%	0%	100%
Media das Soluções Viáveis	370.61	370.43	366.51	-
Pior Valor Viável	384.50	396.85	414.15	-
Melhor Valor Viável	369.27	368.39	360.44	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	42.07	35.93	30.01	<b>32.00</b>
<b>Desvio Padrão</b>	10.47	9.66	9.03	<b>0.00</b>
<b>FAIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	370.22	369.80	367.15	370.54
Desvio Padrão	0.70	0.91	3.78	0.00
Soluções Viáveis	0.00	0.00	0.00	100.00
Soluções Viáveis (%)	0%	0%	0%	100%
Media das Soluções Viáveis	370.22	369.80	367.15	-
Pior Valor Viável	376.21	377.52	391.14	-
Melhor Valor Viável	369.68	368.85	360.31	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	42.10	42.75	38.48	<b>33.00</b>
<b>Desvio Padrão</b>	9.04	9.22	11.62	<b>0.00</b>

Tabela 73 - Ruído somente nas restrições para treliza de 72 barras usando o novo critério de parada

Embora nenhum dos resultados obtidos tenha sido viável, fica evidente que o maior número de iterações provocado pela alteração no critério de parada levou à diminuição da média dos resultados obtidos. Nota-se também que o valor da média dos resultados diminui a medida que o nível de ruído aumenta.



### C.9.3. Domo

<b>FDIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	3.9274	3.9395	4.0636	3.9138
Desvio Padrão	0.0095	0.0103	0.0391	0.0000
Soluções Viáveis	2.0000	6.0000	12.0000	100.0000
Soluções Viáveis (%)	0.0200	0.0600	0.1200	1.0000
Media das Soluções Viáveis	3.9292	3.9429	4.0937	-
Pior Valor Viável	3.9303	3.9456	4.1313	-
Melhor Valor Viável	3.9280	3.9390	4.0389	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	23.3300	23.5000	21.3200	<b>16.0000</b>
<b>Desvio Padrão</b>	7.3965	7.7074	7.2640	<b>0.0000</b>
<b>FAIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	3.9288	3.9469	4.1015	3.9138
Desvio Padrão	0.0111	0.0187	0.0738	0.0000
Soluções Viáveis	1.0000	5.0000	9.0000	100.0000
Soluções Viáveis (%)	0.0100	0.0500	0.0900	1.0000
Media das Soluções Viáveis	3.9390	3.9543	4.1519	-
Pior Valor Viável	3.9390	3.9815	4.4959	-
Melhor Valor Viável	3.9390	3.9424	4.0585	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	22.1800	22.2400	21.4500	<b>15.0000</b>
<b>Desvio Padrão</b>	6.3124	7.4374	6.7680	<b>0.0000</b>

Tabela 74 - Ruído somente nas restrições para o domo de 52 barras usando o novo critério de parada

O maior número de iterações usadas com o novo critério de para diminuiu a quantidade de resultados viáveis obtidos, no entanto, a média dos resultados foi um pouco melhor com o presente critério.

**C.10. Efeito do ruído na função objetivo e em seus gradientes - Novo critério de parada**

**C.10.1.Treliça de 10 barras**

<b>FDIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	1584.91	1585.92	1623.92	1584.00
Desvio Padrão	1.64	2.42	46.40	0.00
Soluções Viáveis	100.00	100.00	100.00	100.00
Soluções Viáveis (%)	1.00	1.00	1.00	1.00
Media das Soluções Viáveis	1584.91	1585.92	1623.92	-
Pior Valor Viável	1597.86	1600.57	1854.59	-
Melhor Valor Viável	1584.01	1584.05	1584.36	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	20.99	19.99	19.01	<b>23.00</b>
<b>Desvio Padrão</b>	2.75	3.06	4.09	<b>0.00</b>
<b>FAIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	1584.94	1588.26	1623.06	1584.00
Desvio Padrão	1.13	7.98	61.05	0.00
Soluções Viáveis	100.00	100.00	100.00	100.00
Soluções Viáveis (%)	1.00	1.00	1.00	1.00
Media das Soluções Viáveis	1584.94	1588.26	1623.06	-
Pior Valor Viável	1592.00	1633.65	2029.75	-
Melhor Valor Viável	1584.01	1584.04	1584.67	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	21.79	19.82	19.25	<b>25.00</b>
<b>Desvio Padrão</b>	2.89	3.12	3.71	<b>0.00</b>

Tabela 75 - Ruído na função objetivo e em seus gradientes para treliça de dez barras usando o novo critério de parada

Não foi possível observar nenhuma melhora relevante nos resultados obtidos com o novo critério de parada.

### C.10.2. Treliza de 72 barras

<b>FDIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	373.00	376.34	387.51	370.54
Desvio Padrão	1.96	4.71	6.76	0.00
Soluções Viáveis	100.00	100.00	100.00	100.00
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%	100%
Media das Soluções Viáveis	373.00	376.34	387.51	-
Pior Valor Viável	383.29	391.36	407.73	-
Melhor Valor Viável	370.55	370.74	375.57	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	26.90	21.84	13.94	<b>32.00</b>
<b>Desvio Padrão</b>	6.12	5.91	3.21	<b>0.00</b>
<b>FAIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	371.99	375.20	387.80	370.54
Desvio Padrão	4.15	7.82	12.85	0.00
Soluções Viáveis	100.00	100.00	100.00	100.00
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%	100%
Media das Soluções Viáveis	371.99	375.20	387.80	-
Pior Valor Viável	402.86	418.90	437.10	-
Melhor Valor Viável	370.56	370.57	372.23	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	28.89	26.25	18.16	<b>33.00</b>
<b>Desvio Padrão</b>	4.93	5.99	4.20	<b>0.00</b>

Tabela 76 - Ruído na função objetivo e em seus gradientes para treliza de 72 barras usando o novo critério de parada

Não há diferença de desempenho entre os dois critérios de parada. O critério de parada que foi ativado foi o limite de iterações na busca linear.

### C.10.3. Domo

<b>FDIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	3.9276	3.9294	3.9546	3.9138
Desvio Padrão	0.0158	0.0172	0.0596	0.0000
Soluções Viáveis	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%	100%
Media das Soluções Viáveis	3.9276	3.9294	3.9546	-
Pior Valor Viável	3.9833	4.0106	4.2363	-
Melhor Valor Viável	3.9138	3.9140	3.9147	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	17.0300	16.2700	14.3800	<b>16.0000</b>
<b>Desvio Padrão</b>	2.9179	2.7629	2.7844	<b>0.0000</b>
<b>FAIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	3.9227	3.9195	3.9320	3.9138
Desvio Padrão	0.0269	0.0140	0.0194	0.0000
Soluções Viáveis	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%	100%
Media das Soluções Viáveis	3.9227	3.9195	3.9320	-
Pior Valor Viável	4.0874	4.0171	4.0236	-
Melhor Valor Viável	3.9138	3.9138	3.9138	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	17.2800	16.3700	15.0900	<b>15.0000</b>
<b>Desvio Padrão</b>	2.8958	2.7105	2.8607	<b>0.0000</b>

Tabela 77 - Ruído na função objetivo e em seus gradientes para domo de 52 barras usando o novo critério de parada

Não há diferença de desempenho entre os dois critérios de parada. O critério de parada que foi ativado foi o limite de iterações na busca linear.

## C.11. Efeito do ruído nas restrições e seus gradientes - Novo critério de parada

### C.11.1. Treliza de 10 barras

<b>FDIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	1592.60	1610.85	1751.77	1584.00
Desvio Padrão	3.69	29.13	187.63	0.00
Soluções Viáveis	0.00	0.00	2.00	100.00
Soluções Viáveis (%)	0%	0%	2%	100%
Media das Soluções Viáveis	1.59	1.61	1.71	-
Pior Valor Viável	1.62	1.87	1.73	-
Melhor Valor Viável	1.59	1.59	1.69	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	29.09	27.56	24.96	<b>23.00</b>
<b>Desvio Padrão</b>	7.50	7.71	8.90	<b>0.00</b>
<b>FAIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	1589.81	1597.03	1690.02	1584.00
Desvio Padrão	2.34	5.16	46.60	0.00
Soluções Viáveis	0.00	5.00	3.00	100.00
Soluções Viáveis (%)	0%	5%	3%	100%
Media das Soluções Viáveis	1589.81	1600.49	1670.13	-
Pior Valor Viável	1596.61	1606.08	1675.07	-
Melhor Valor Viável	1583.82	1598.29	1663.98	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	27.65	29.33	24.57	<b>25.00</b>
<b>Desvio Padrão</b>	6.81	6.84	7.58	<b>0.00</b>

Tabela 78 - Ruído nas restrições e em seus gradientes para treliza de dez barras usando o novo critério de parada

A falta de resultados viáveis dificulta a análise dos resultados. Aparentemente o novo critério de parada teve o efeito de diminuir a média dos resultados obtidos, especialmente para níveis mais baixos de ruído. Diferença também pode ser notada no número de iterações necessárias até que se alcançasse o resultado ótimo, maior para o novo critério nos níveis mais baixos de ruído.

Não se pode deixar de ressaltar, no entanto, que essas conclusões tem pouco resultado prático, uma vez que os resultados encontrados foram, em sua maioria inviáveis.

### C.11.2. Treliza de 72 barras

<b>FDIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	372.15	372.80	370.61	370.54
Desvio Padrão	1.90	2.55	4.81	0.00
Soluções Viáveis	0.00	0.00	0.00	100.00
Soluções Viáveis (%)	0%	0%	0%	100%
Media das Soluções Viáveis	372.15	372.80	370.61	-
Pior Valor Viável	383.43	386.35	393.31	-
Melhor Valor Viável	369.90	369.07	363.55	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	39.94	38.35	36.62	<b>32.00</b>
<b>Desvio Padrão</b>	12.69	13.73	12.93	<b>0.00</b>
<b>FAIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	370.21	370.49	368.44	370.54
Desvio Padrão	0.39	1.60	3.82	0.00
Soluções Viáveis	0.00	0.00	0.00	100.00
Soluções Viáveis (%)	0%	0%	0%	100%
Media das Soluções Viáveis	370.21	370.49	368.44	-
Pior Valor Viável	371.53	378.54	383.47	-
Melhor Valor Viável	369.66	368.59	362.31	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	51.46	47.98	41.27	<b>33.00</b>
<b>Desvio Padrão</b>	13.39	13.86	14.23	<b>0.00</b>

Tabela 79 - Ruído nas restrições e em seus gradientes para treliza de 72 barras usando o novo critério de parada

A falta de resultados viáveis não permite concluir que o desempenho de um critério de parada seja melhor que o outro. O efeito da mudança, no entanto, fica evidente ao observarmos que em todos os casos o valor da média dos resultados obtidos foi menor, ao passo que o número de iterações até a parada aumentou.

### C.11.3. Domo

<b>FDIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	3.9283	3.9427	4.0724	3.9138
Desvio Padrão	0.0081	0.0144	0.0407	0.0000
Soluções Viáveis	5.0000	6.0000	6.0000	100.0000
Soluções Viáveis (%)	5%	6%	6%	100%
Media das Soluções Viáveis	3.9292	3.9538	4.0879	-
Pior Valor Viável	3.9306	3.9932	4.1047	-
Melhor Valor Viável	3.9280	3.9275	4.0449	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	22.8900	23.2700	21.9600	<b>16.0000</b>
<b>Desvio Padrão</b>	7.2096	7.7458	7.6011	<b>0.0000</b>
<b>FAIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	3.9293	3.9515	4.1290	3.9138
Desvio Padrão	0.0105	0.0312	0.1507	0.0000
Soluções Viáveis	3.0000	3.0000	7.0000	100.0000
Soluções Viáveis (%)	3%	3%	7%	100%
Media das Soluções Viáveis	3.9288	3.9495	4.0946	-
Pior Valor Viável	3.9312	3.9581	4.1585	-
Melhor Valor Viável	3.9255	3.9374	4.0277	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	22.2200	21.9700	20.2200	<b>15.0000</b>
<b>Desvio Padrão</b>	6.2790	6.1290	6.6493	<b>0.0000</b>

Tabela 80 - Ruído nas restrições e em seus gradientes para o domo de 52 barras usando o novo critério de parada

Embora o baixo número de resultados viáveis impossibilite uma análise conclusiva, é possível notar da Tabela que houve uma melhora dos resultados quando o novo critério de parada foi utilizado.

Comparando o número de resultados viáveis encontrados, vemos que foram encontrados menos resultados viáveis quando o critério de parada novo foi utilizado.

**C.12. Efeito do ruído nas restrições e em ambos os gradientes - Novo critério de parada**

**C.12.1. Treliza de 10 barras**

<b>FDIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	1593.53	1608.15	1752.52	1584.00
Desvio Padrão	3.40	16.04	81.62	0.00
Soluções Viáveis	0.00	0.00	1.00	100.00
Soluções Viáveis (%)	0%	0%	1%	100%
Media das Soluções Viáveis	1593.53	1608.15	1747.83	-
Pior Valor Viável	1603.81	1735.49	1992.30	-
Melhor Valor Viável	1587.26	1591.35	1634.62	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	28.95	30.58	27.30	<b>23.00</b>
<b>Desvio Padrão</b>	8.76	9.20	10.70	<b>0.00</b>
<b>FAIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	1590.21	1599.06	1708.28	1584.00
Desvio Padrão	2.27	11.16	79.35	0.00
Soluções Viáveis	2.00	5.00	2.00	100.00
Soluções Viáveis (%)	2%	5%	2%	100%
Media das Soluções Viáveis	1592.20	1599.00	1683.78	-
Pior Valor Viável	1593.17	1604.89	1684.94	-
Melhor Valor Viável	1591.24	1591.66	1682.61	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	28.43	28.12	28.01	<b>25.00</b>
<b>Desvio Padrão</b>	7.34	8.16	8.81	<b>0.00</b>

Tabela 81 - Ruído nas restrições e em ambos os gradientes para treliza de dez barras usando o novo critério de parada

Para a maior parte do resultados não pode ser observada nenhuma melhora quando trocamos os critérios de parada. Ainda assim, o número de iterações necessárias até que o algoritmo parasse de funcionar foi substancialmente maior com o novo critério proposto.



### C.12.2. Treliza de 72 barras

<b>FDIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	372.01	373.03	371.51	370.54
Desvio Padrão	1.24	2.50	5.35	0.00
Soluções Viáveis	0.00	0.00	0.00	100.00
Soluções Viáveis (%)	0%	0%	0%	100%
Media das Soluções Viáveis	372.01	373.03	371.51	-
Pior Valor Viável	376.83	384.61	394.64	-
Melhor Valor Viável	369.89	369.81	363.31	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	40.27	37.02	33.55	<b>32.00</b>
<b>Desvio Padrão</b>	11.22	11.05	11.79	<b>0.00</b>
<b>FAIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	370.32	370.34	368.32	370.54
Desvio Padrão	0.63	1.50	2.91	0.00
Soluções Viáveis	0.00	0.00	0.00	100.00
Soluções Viáveis (%)	0%	0%	0%	100%
Media das Soluções Viáveis	370.32	370.34	368.32	-
Pior Valor Viável	373.54	379.15	376.66	-
Melhor Valor Viável	369.71	368.76	362.61	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	55.94	50.27	44.19	<b>33.00</b>
<b>Desvio Padrão</b>	16.09	15.44	12.85	<b>0.00</b>

Tabela 82 - Ruído nas restrições e em ambos os gradientes para treliza de 72 barras usando o novo critério de parada

Embora a falta de resultados viáveis não permita uma análise conclusiva, podemos notar que, para os resultados inviáveis, houve uma diminuição da média enquanto o número de iterações aumentou.

### C.12.3. Domo

<b>FDIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	3.9358	3.9458	4.0841	3.9138
Desvio Padrão	0.0395	0.0157	0.0402	0.0000
Soluções Viáveis	8.0000	8.0000	4.0000	100.0000
Soluções Viáveis (%)	8%	8%	4%	100%
Media das Soluções Viáveis	3.9276	3.9455	4.0994	-
Pior Valor Viável	3.9329	3.9586	4.1224	-
Melhor Valor Viável	3.9239	3.9334	4.0806	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	23.6100	22.8900	20.8100	<b>16.0000</b>
<b>Desvio Padrão</b>	5.9745	6.6650	7.6735	<b>0.0000</b>
<b>FAIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	3.9307	3.9498	4.1209	3.9138
Desvio Padrão	0.0144	0.0224	0.0730	0.0000
Soluções Viáveis	4.0000	7.0000	13.0000	100.0000
Soluções Viáveis (%)	4%	7%	13%	100%
Media das Soluções Viáveis	3.9366	3.9485	4.1132	-
Pior Valor Viável	3.9623	3.9589	4.1752	-
Melhor Valor Viável	3.9258	3.9396	4.0434	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	21.3300	23.5100	22.7800	<b>15.0000</b>
<b>Desvio Padrão</b>	5.7103	7.4975	7.2677	<b>0.0000</b>

Tabela 83 - Ruído nas restrições e em ambos os gradientes para o domo de 52 barras usando o novo critério de parada

Particularmente para esse problema, foi possível melhorar o resultado retornado pelos algoritmos alterando o critério de parada. O número de iterações necessárias para alcançar os resultados, porém foi maior.

Para o caso em que há ruído de 1% e foi utilizado o algoritmo FAIPA, as conclusões acima não se aplicam. Nesse caso, houve uma piora na média dos resultados.

### C.13. Efeito do ruído em tudo

#### C.13.1. Treliza de 10 barras

<b>FDIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	1605.47	1640.61	1926.01	1584.00
Desvio Padrão	34.10	44.93	124.13	0.00
Soluções Viáveis	19.00	13.00	15.00	100.00
Soluções Viáveis (%)	19%	13%	15%	100%
Media das Soluções Viáveis	1606.41	1643.39	1908.56	-
Pior Valor Viável	1612.96	1699.58	2171.50	-
Melhor Valor Viável	1600.60	1618.08	1734.84	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	18.01	16.46	11.97	<b>23.00</b>
<b>Desvio Padrão</b>	2.79	2.80	2.89	<b>0.00</b>
<b>FAIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	1600.32	1616.14	1916.87	1584.00
Desvio Padrão	14.10	13.79	229.43	0.00
Soluções Viáveis	37.00	33.00	30.00	100.00
Soluções Viáveis (%)	37%	33%	30%	100%
Media das Soluções Viáveis	1593.75	1618.32	1880.80	-
Pior Valor Viável	1596.40	1645.35	2136.85	-
Melhor Valor Viável	1589.54	1597.00	1714.57	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	17.64	17.20	13.08	<b>25.00</b>
<b>Desvio Padrão</b>	2.30	2.55	3.76	<b>0.00</b>

Tabela 84 - Ruído em tudo para treliza de dez barras usando o novo critério de parada

A mudança do critério de parada não alterou o desempenho do algoritmo FAIPA.

Com o algoritmo FDIPA, os resultados para níveis moderados de ruído foram piores com o novo critério de parada proposto e o número de iterações até a parada foi menor.

### C.13.2. Treliça de 72 barras

<b>FDIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	378.79	384.59	400.49	370.54
Desvio Padrão	5.32	5.13	14.01	0.00
Soluções Viáveis	12.00	9.00	15.00	100.00
Soluções Viáveis (%)	12%	9%	15%	100%
Media das Soluções Viáveis	378.44	385.31	406.19	-
Pior Valor Viável	393.69	395.28	424.42	-
Melhor Valor Viável	372.43	377.43	387.61	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	18.48	14.12	11.06	<b>32.00</b>
<b>Desvio Padrão</b>	4.61	3.29	2.74	<b>0.00</b>
<b>FAIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	374.25	378.12	401.39	370.54
Desvio Padrão	3.49	6.18	16.77	0.00
Soluções Viáveis	52.00	37.00	47.00	100.00
Soluções Viáveis (%)	52%	37%	47%	100%
Media das Soluções Viáveis	373.91	376.64	397.93	-
Pior Valor Viável	388.94	385.99	435.95	-
Melhor Valor Viável	371.20	371.46	374.14	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	24.75	20.83	13.89	<b>33.00</b>
<b>Desvio Padrão</b>	5.08	4.38	3.48	<b>0.00</b>

Tabela 85 - Ruído em tudo para treliça de 72 barras usando o novo critério de parada

O problema teste da treliça de 72 barras praticamente repete os resultados obtidos para o problema de 10 barras.

O desempenho do algoritmo FDIPA com o novo critério de parada foi pior do que com o critério de parada original. Não houve alteração no desempenho do FAIPA quando comparamos os dois critérios.

### C.13.3. Domo

<b>FDIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	3.9515	3.9859	4.3381	3.9138
Desvio Padrão	0.0238	0.0517	0.7425	0.0000
Soluções Viáveis	28.0000	30.0000	41.0000	100.0000
Soluções Viáveis (%)	28%	30%	41%	100%
Media das Soluções Viáveis	3.9528	3.9787	4.4755	-
Pior Valor Viável	3.9919	4.0808	11.5912	-
Melhor Valor Viável	3.9296	3.9436	4.1274	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	13.8300	12.8200	11.5100	<b>16.0000</b>
<b>Desvio Padrão</b>	2.2205	2.1196	2.4058	<b>0.0000</b>
<b>FAIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	3.9515	3.9840	4.3054	3.9138
Desvio Padrão	0.0278	0.0396	0.1548	0.0000
Soluções Viáveis	26.0000	25.0000	30.0000	100.0000
Soluções Viáveis (%)	26%	25%	30%	100%
Media das Soluções Viáveis	3.9310	3.9909	4.3477	-
Pior Valor Viável	3.9370	4.1348	4.9047	-
Melhor Valor Viável	3.9188	3.9510	4.1566	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	13.6000	12.7800	12.5900	<b>15.0000</b>
<b>Desvio Padrão</b>	2.4782	2.0527	2.2297	<b>0.0000</b>

Tabela 86 - Ruído em tudo para o domo de 52 barras usando o novo critério de parada

Não foi possível melhorar o desempenho dos algoritmos com o novo critério de parada. Exceção existe para o caso de 5% de ruído resolvido com FDIPA. A média dos resultados piorou com o novo critério de parada.

## Apêndice D – Resultados Abrangendo Versões do Algoritmo para Derivadas Aproximadas

### D.1. Ruído na Função Objetivo – Aproximação por Diferenças Finitas

#### D.1.1. Treliza de 10 Barras

<b>FDIPA</b>			
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>
Media	12817.31	12558.38	12472.37
Desvio Padrão	2477.09	1682.42	1725.89
Soluções Viáveis	100.00	100.00	100.00
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%
Media das Soluções Viáveis	12817.31	12558.38	12472.37
Pior Valor Viável	30617.27	22025.30	16074.61
Melhor Valor Viável	7019.41	5421.27	3687.22
<b>Número Médio de Iterações</b>	3.75	3.70	4.13
<b>Desvio Padrão</b>	2.35	1.76	3.04
<b>FAIPA</b>			
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>
Media	12228.09	12463.86	12880.00
Desvio Padrão	1831.51	1715.30	3926.81
Soluções Viáveis	100.00	100.00	100.00
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%
Media das Soluções Viáveis	12228.09	12463.86	12880.00
Pior Valor Viável	16451.25	21920.67	48563.07
Melhor Valor Viável	4476.63	5311.97	5414.81
<b>Número Médio de Iterações</b>	3.61	3.48	3.90
<b>Desvio Padrão</b>	2.06	1.81	2.13

Tabela 87 - Ruído na função objetivo para treliza de dez barras com gradiente aproximado por diferenças finitas

Para o problema de 10 barras os algoritmos funcionaram com muito custo, não sendo possível, em muitos casos, fazer mais de uma iteração. Mesmo os melhores resultados estão distantes do que a aproximação sem ruído permitiria.

### D.1.2 Treliza de 72 Barras

<b>FDIPA</b>			
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>
Media	1242.97	1118.14	1385.81
Desvio Padrão	575.28	557.33	469.17
Soluções Viáveis	100.00	100.00	100.00
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%
Media das Soluções Viáveis	1242.97	1118.14	1385.81
Pior Valor Viável	1717.84	1727.16	1801.62
Melhor Valor Viável	381.64	396.44	408.66
<b>Número Médio de Iterações</b>	21.04	20.15	10.60
<b>Desvio Padrão</b>	25.34	20.16	10.53
<b>FAIPA</b>			
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>
Media	1177.22	1200.60	1375.77
Desvio Padrão	544.36	561.02	450.10
Soluções Viáveis	100.00	100.00	100.00
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%
Media das Soluções Viáveis	1177.22	1200.60	1375.77
Pior Valor Viável	1719.52	1726.76	1834.81
Melhor Valor Viável	393.07	391.49	437.08
<b>Número Médio de Iterações</b>	21.54	21.39	11.05
<b>Desvio Padrão</b>	24.23	24.61	11.55

Tabela 88 - Ruído na função objetivo para treliza de 72 barras com gradiente aproximado por diferenças finitas

É possível notar que os algoritmos FAIPA-FD-N e FDIPA-FD-N funcionaram na presença de ruído moderado e também com os 5% de ruído. A média dos resultados ficou distante do resultado ótimo principalmente porque a dispersão foi grande. Contudo, foi possível chegar a bons resultados considerando-se somente a melhor amostra.

### D.1.3. Domo

<b>FDIPA</b>			
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>
Media	4.0264	4.0903	5.1454
Desvio Padrão	0.1973	0.2724	0.7505
Soluções Viáveis	100.0000	100.0000	100.0000
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%
Media das Soluções Viáveis	4.0264	4.0903	5.1454
Pior Valor Viável	5.1882	5.8834	8.4286
Melhor Valor Viável	3.9155	3.9213	4.2490
<b>Número Médio de Iterações</b>	24.0400	20.1100	14.5600
<b>Desvio Padrão</b>	6.6802	5.3369	3.9140
<b>FAIPA</b>			
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>
Media	4.0158	4.0762	4.9252
Desvio Padrão	0.1686	0.1574	0.5272
Soluções Viáveis	100.0000	100.0000	100.0000
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%
Media das Soluções Viáveis	4.0158	4.0762	4.9252
Pior Valor Viável	5.0242	4.6480	7.2897
Melhor Valor Viável	3.9145	3.9195	4.2327
<b>Número Médio de Iterações</b>	25.3500	22.8200	16.5300
<b>Desvio Padrão</b>	6.7140	6.0726	4.5891

Tabela 89 - Ruído na função objetivo para o domo de 52 barras com gradiente aproximado por diferenças finitas

Conclusões similares podem ser tiradas para o problema do Domo de 52 barras. Mesmo a média dos resultados foi bastante próxima do que a precisão da aproximação por diferenças finitas permite e os melhores resultados foram abaixo desse limite. Isso não significa, no entanto, que a estimativa para a precisão da aproximação por diferenças finitas esteja errado. Para chegar ao melhor resultado foram necessárias mais iterações. Sem ruído, o critério de parada foi atingido um pouco antes.



## D.2. Ruído na Função Objetivo - Aproximação por Interpolação Linear

### D.2.1. Treliza de 10 Barras

<b>FDIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	14447.92	14447.92	15272.18	1584.00
Desvio Padrão	19059.87	19059.87	12188.98	0.00
Soluções Viáveis	100.00	100.00	100.00	100.00
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%	100%
Media das Soluções Viáveis	14447.92	14447.92	15272.18	-
Pior Valor Viável	198673.57	198673.57	120733.07	-
Melhor Valor Viável	4809.13	4809.13	12546.84	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	4.42	4.01	3.89	<b>28.00</b>
<b>Desvio Padrão</b>	3.46	1.88	1.84	<b>0.00</b>
<b>FAIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	13092.61	13525.39	15446.27	1584.00
Desvio Padrão	5372.58	7014.43	13413.89	0.00
Soluções Viáveis	100.00	100.00	100.00	100.00
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%	100%
Media das Soluções Viáveis	13092.61	13525.39	15446.27	-
Pior Valor Viável	47113.92	81348.41	124923.38	-
Melhor Valor Viável	3976.84	9183.45	11570.73	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	4.46	4.13	3.73	<b>25.00</b>
<b>Desvio Padrão</b>	3.21	2.23	1.75	<b>0.00</b>

Tabela 90 - Ruído na função objetivo para treliza de dez barras com gradiente aproximado por interpolação linear

Não foi possível chegar a nenhum resultado próximo do ótimo nesse problema teste.

### D.2.2. Treliza de 72 Barras

<b>FDIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	616.88	1081.88	1633.40	370.54
Desvio Padrão	418.59	490.31	164.66	0.00
Soluções Viáveis	100.00	100.00	100.00	100.00
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%	100%
Media das Soluções Viáveis	616.88	1081.88	1633.40	-
Pior Valor Viável	1716.47	1727.36	1847.49	-
Melhor Valor Viável	373.05	391.86	1032.58	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	41.81	17.70	4.80	<b>32.00</b>
<b>Desvio Padrão</b>	24.13	19.25	2.28	<b>0.00</b>
<b>FAIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	573.08	1071.25	1653.47	370.54
Desvio Padrão	396.79	499.17	139.07	0.00
Soluções Viáveis	100.00	100.00	100.00	100.00
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%	100%
Media das Soluções Viáveis	573.08	1071.25	1653.47	-
Pior Valor Viável	1715.68	1726.76	1797.29	-
Melhor Valor Viável	378.65	385.63	901.62	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	46.08	21.00	4.96	<b>33.00</b>
<b>Desvio Padrão</b>	24.13	21.21	2.41	<b>0.00</b>

Tabela 91 - Ruído na função objetivo para treliza de 72 barras com gradiente aproximado por interpolação linear

Para ruído moderado, a aproximação por interpolação linear apresenta resultados mais consistentes do que a aproximação por diferenças finitas. Isso não ocorre para o caso em que há 5% de ruído, quando os resultados alcançados quando usamos aproximação por interpolação linear distantes do ótimo. Na verdade, o número médio de iterações encontrados indica que os algoritmos mal conseguiram funcionar.

### D.2.3. Domo

<b>FDIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	4.1575	4.5331	10.7185	3.9138
Desvio Padrão	0.2473	0.6284	6.1661	0.0000
Soluções Viáveis	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%	100%
Media das Soluções Viáveis	4.1575	4.5331	10.7185	-
Pior Valor Viável	5.1028	7.3253	22.7896	-
Melhor Valor Viável	3.9232	3.9438	4.0931	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	19.6100	20.8400	15.9700	<b>16.0000</b>
<b>Desvio Padrão</b>	6.5995	6.1080	9.4969	<b>0.0000</b>
<b>FAIPA</b>				
	<b>0,5% Ruído</b>	<b>1% Ruído</b>	<b>5% Ruído</b>	<b>Sem Ruído</b>
Media	4.0173	4.2816	11.6729	3.9138
Desvio Padrão	0.2073	0.5327	6.5964	0.0000
Soluções Viáveis	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000
Soluções Viáveis (%)	100%	100%	100%	100%
Media das Soluções Viáveis	4.0173	4.2816	11.6729	-
Pior Valor Viável	5.1067	7.4098	22.5807	-
Melhor Valor Viável	3.9139	3.9183	3.9403	-
<b>Número Médio de Iterações</b>	25.1900	26.6500	26.6500	<b>15.0000</b>
<b>Desvio Padrão</b>	6.9873	8.3308	8.3308	<b>0.0000</b>

Tabela 92 - Ruído na função objetivo para o domo de 52 barras com gradiente aproximado por interpolação linear

Para níveis moderados de ruído, os resultados encontrados quando usamos aproximação por diferenças finitas ou interpolação linear são similares, com leve vantagem para o método das diferenças finitas. Para o caso em que há 5% de ruído a aproximação por diferenças finitas apresentou um melhor resultado em média. Tomando os melhores resultados viáveis encontrados a vantagem fica com o método de interpolação linear.

## Apêndice E – Funções em Matlab

### E.1. Função Objetivo e Restrições

```
function [f,g]=truss_analysis(x,indf,indg,DOF,ELM,bc)

ex=ELM(:,1:2); %%Retrieves information about the position of the nodes
on x
ey=ELM(:,3:4); % Retrives information about the position of the nodes
on y
ez=ELM(:,5:6); %Retrives information about the position of the nodes
on z
Edof=ELM(:,7:14); %Retrives the incidence matrix
E=ELM(:,15); %Retrieves the Young modulus
SIGMAmax=ELM(:,16); %Retrives information about the maximum allowed
tension

ruído_f=ELM(1,17); %Retrives the noise level on f
ruído_g=ELM(3,17); %Retrieves the noise level on constraints.

    for i=1:length(E)
        Xexpand(i)=x(Edof(i,8));%Expands the design variables into the
elements cross sectional area
    end

F=DOF(:,1); %Loads the forces
umax=DOF(:,2); %Loads the maximum displacement
umin=-umax; %Defines the minimum displacement as the opposite of the
maximum.
[S,l]=Smatrix(ex,ey,ez,Edof,E); %Calculates the S matrix

K=MatrixK(ex,ey,ez,Edof,Xexpand,E); %Calculates the stiffness matrix

    [~,nd]=size(K); %Measures the size of K, so it can be used to
calculate the degrees of freedom of the matrix
    fdof=(1:nd)'; %Defines a vector with the size of the degree of
freedom
    pdof=bc(:,1); %Defines a vector with the position of the
prescribed displacement nodes
    fdof(pdof)=[]; %Eliminates the nodes where the displacements are
known

f=(0.1*1*Xexpand')+(0.1*1*Xexpand'*((2*rand(1)-1)/100)*ruído_f);
%Calculates f

[a,r]=solveq(K,F,bc); %Determines the displacements

for i=1:length(a)
    a(i)=a(i)+a(i)*((2*rand(1)-1)/100)*ruído_g; %Adds noise to the
displacements
end

sigma=S*a; %Determines the tension on the bars

max_disp=a(fdof)-umax(fdof); %Loads the constraints displacement upper
bound constraints
```

```
min_disp=umin(fdof)-a(fdof); %Loads the displacement lower bound
constraints

max_tens=sigma-SIGMAmax; %Loads the tension upper bound constraints
min_tens=-SIGMAmax-sigma; %Lower the displacements lower bound
constraints

g=[max_disp; min_disp; max_tens;min_tens]; %Inserts all the
constraints in one vector variable.

[f,g]=red_fun(f,g,indf,indg);
```

## E.2. Gradientes

```
function [df,dg]=gtruss_analysis(fun,x,indgradf,indgradg,DOF,ELM,bc)

ex=ELM(:,1:2);%Retrieves information about the position of the nodes
on x
ey=ELM(:,3:4);%Retrieves information about the position of the nodes
on y
ez=ELM(:,5:6);%Retrieves information about the position of the nodes
on z
Edof=ELM(:,7:14);%Retrives the incidence matrix
E=ELM(:,15);%Retrives the Young Module

ruido_gradf=ELM(2,17); %Retrieves the noise level on the objective
function gradient
ruido_gradg=ELM(4,17); %Retrives the noise level on the caonstraints
gradients
for i=1:length(E)
    Xexpand(i)=x(Edof(i,8)); %Expands the design variables into the
elements cross sectional area.
end

F=DOF(:,1); %Loads the forces

[S,l]=Smatrix(ex,ey,ez,Edof,E); %Calculates the S matrix
K=MatrixK(ex,ey,ez,Edof,Xexpand,E); % Calculates the stiffness matrix
[nel nno]=size(S);

[u,~]=solveq(K,F,bc);
dof=length(F)-length(bc);

[~,nd]=size(K);%Measures the siza of K, so it can be used to
calculate the degrees of freedom of the matrix
fdof=(1:nd)';%Defines a vector with the size of the degress of
freedom
pdof=bc(:,1);%Defines a vector with the position of the
prescribed displament nodes
fdof(pdof)=[]; %Eliminates the nodez where the displacements are
known

for k=1:length(x)
    for j=1:nel

        if Edof(j,8)==k
            dbar(j,k)=1; %Creates the matrix that relates design
variables to elements
        end
    end
end
for i=1:nel
    dftot(i)=(1(i)+1(i)*((2*rand(1)-1)/100)*ruido_gradf)*0.1; %Adds
noise to the objective function gradient
end

for i=1:length(x)
```

```

        df(i)=dftot(:)'*dbar(:,i); %Uses the chain rule to show the
objective function's gradient as a function of the design variables

    end

    for i=1:10
        u(i)=u(i)+u(i)*((2*rand(1)-1)/100)*ruido_gradg; %Calculates the
displacements
    end
    sigma=S*u; %Calculates the tension on each element

    dA=zeros(nel,1);
    for i=1:nel
        dA(i)=1;
        dKA=MatrixK(ex,ey,ez,Edof,dA,E); %calculates the derivative of
the stiffness matrix with respect to the transversal areas
        dKu(i,:)=dKA(fdof,fdof)*u(fdof); %Calculates the product between
the stiffness matrix derivative and the displacements
        dA=zeros(nel,1);
    end

    for i=1:nel
        dutot(i,:)=(K(fdof,fdof))\(-dKu(i,:)); %Calculates the
derivative of the displacement with respect to the elements cross
sectional area
    end

    for i=1:length(x)
        for j=1:dof
            du(i,j)=dutot(:,j)'*dbar(:,i); %Uses the Chain Rule to
reduce elements to design variables.
        end
    end

    max_grad_disp=du; %Gradient for the maximum displacements
    min_grad_disp=-du; %Gradient for the minimum displacement constraints

    for i=1:nel
        dsigmatot(i,:)=S(:,fdof)*dutot(i,:);
    end
    for i=1:length(x)
        for j=1:length(E)
            dsigma(i,j)=dsigmatot(:,j)'*dbar(:,i); %Loads the tension of
the elements on the design variables.
        end
    end

    [lin,col]=size(dsigma);
    for i=1:lin
        for j=1:col
            max_grad_sigma(i,j)=dsigma(i,j); %Gradient of the upper
bound tension restrictios.
        end
    end

    for i=1:lin

```

```

        for j=1:col
            min_grad_sigma(i,j)=-dsigma(i,j); %gradient of the lower
bound tension restrictions
        end
    end

    dg=[max_grad_disp min_grad_disp max_grad_sigma min_grad_sigma];
    %Concatenates all the gradients in one array

    [df,dg]=red_gfun(df,dg,indgradf,indgradg);

```