



MODELOS COMPUTACIONAIS PARA ANÁLISE DA VIBRAÇÃO
ACOPLADA ROTOR-PÁS COM APLICAÇÃO EM TURBINAS EÓLICAS E
RESSONÂNCIA DE SOLO DE HELICÓPTEROS

Felipe Gonzalez Gonzaga

Projeto de Graduação apresentado ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Engenheiro Mecânico.

Orientador: Thiago Gamboa Ritto

Rio de Janeiro
Março de 2013

MODELOS COMPUTACIONAIS PARA ANÁLISE DA VIBRAÇÃO
ACOPLADA ROTOR-PÁS COM APLICAÇÃO EM TURBINAS EÓLICAS E
RESSONÂNCIA DE SOLO DE HELICÓPTEROS

Felipe Gonzalez Gonzaga

PROJETO DE GRADUAÇÃO SUBMETIDO AO CORPO DOCENTE
DO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA DA ESCOLA
POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO
GRAU DE ENGENHEIRO MECÂNICO.

Examinada por:

Prof. Thiago Gamboa Ritto, D.Sc.

Prof. Fernando Augusto Noronha Castro Pinto, Dr.Ing.

Prof. Daniel Alves Castello, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

MARÇO DE 2013

Gonzaga, Felipe Gonzalez

Modelos computacionais para análise da vibração acoplada rotor-pás com aplicação em turbinas eólicas e ressonância de solo de helicópteros/Felipe Gonzalez Gonzaga. – Rio de Janeiro: UFRJ/Escola Politécnica, 2013.

XII, 63 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Thiago Gamboa Ritto

Projeto de Graduação – UFRJ/Escola Politécnica/Departamento de Engenharia Mecânica, 2013.

Referências Bibliográficas: p. 61 – 63.

1. Modelagem dinâmica. 2. Vibração acoplada rotor-pás. 3. Ressonância de solo de helicópteros. 4. Vibração de turbinas eólicas. I. Ritto, Thiago Gamboa. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, UFRJ, Departamento de Engenharia Mecânica. III. Modelos computacionais para análise da vibração acoplada rotor-pás com aplicação em turbinas eólicas e ressonância de solo de helicópteros.

*Aos meus pais, Angela e
Vinícius, pelo exemplo e apoio.*

*À minha filha, Letícia, e à
minha esposa, Isabelle, a quem
todos meus esforços dedico.*

Agradecimentos

Agradeço ao Professor Thiago Ritto, pela orientação disponível e competente. Agradeço aos Professores Hécio Orlande e José Stockler, que muito gentilmente me permitiram provas de segunda chamada quando do nascimento de minha filha. Agradeço aos Professores Flávio de Marco Filho e Sylvio José de Oliveira, coordenadores de curso, pelo atendimento gentil e eficiente. Agradeço aos Senhores Hilton Notini e Robson Silva, meus superiores imediatos, pela compreensão e apoio. Agradeço, ainda, aos desenvolvedores da classe COPPET_EXe da plataforma L^AT_EX, utilizadas neste trabalho. Agradeço, por fim, à sociedade brasileira, pela oportunidade de estudar em uma universidade pública, certamente uma das melhores do mundo, e a todos os funcionários e professores da UFRJ, que são os responsáveis diretos por sua excelência.

Resumo do Projeto de Graduação apresentado à Escola Politécnica/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Engenheiro Mecânico.

MODELOS COMPUTACIONAIS PARA ANÁLISE DA VIBRAÇÃO
ACOPLADA ROTOR-PÁS COM APLICAÇÃO EM TURBINAS EÓLICAS E
RESSONÂNCIA DE SOLO DE HELICÓPTEROS

Felipe Gonzalez Gonzaga

Março/2013

Orientador: Thiago Gamboa Ritto

Departamento: Engenharia Mecânica

Apresenta-se neste trabalho duas aplicações diferentes de modelagem do acoplamento rotor-pás: o fenômeno da ressonância de solo de helicópteros e a vibração de turbinas eólicas. Inicia-se com um modelo considerando as pás como massas concentradas. Em uma segunda etapa, expande-se este modelo para considerar pás unidimensionais e rígidas com massa continuamente distribuída. Em uma terceira e última etapa a modelagem é novamente adaptada para considerar pás bidimensionais e rígidas, com massa continuamente distribuída, assim como a ação da gravidade e excentricidade no rotor. Em cada uma dessas etapas é utilizada computação simbólica para o desenvolvimento das equações de movimento e o sistema de equações é resolvido numericamente, com os resultados comparados com trabalhos encontrados na literatura, visando verificar os modelos desenvolvidos.

Abstract of Undergraduate Project presented to POLI/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Mechanical Engineer.

COMPUTATIONAL MODELS FOR COUPLED ROTOR-BLADE VIBRATION
ANALYSIS APPLICATED TO WIND TURBINES AND HELICOPTER
GROUND RESONANCE

Felipe Gonzalez Gonzaga

March/2013

Advisor: Thiago Gamboa Ritto

Department: Mechanical Engineering

In this work, we present two different applications of rotor-blade coupling models: the phenomenon of helicopter ground resonance and wind turbines vibration. It begins with a model that considers the blades as concentrated masses. In a second step, we expand this model to consider one-dimensional blades as rigid bodies with continuously distributed mass. In a third and final step this model is again adapted to consider two-dimensional and rigid blades, with continuously distributed mass, as well as gravity action and rotor eccentricity. In each of these steps symbolic computation is used to develop the equations of motion, and the system of equations is solved numerically. The results are compared with results found in the literature to verify and validate the models here developed.

Sumário

Lista de Figuras	x
1 Introdução	1
1.1 Motivação	1
1.2 Histórico de ocorrências de acidentes com helicópteros envolvendo ressonância de solo	2
1.3 Requisitos regulamentares de projeto de helicópteros	4
1.4 Estrutura do trabalho	6
1.5 Objetivos	7
2 Modelagem considerando as pás como massas pontuais	8
2.1 Definição de hipóteses para a modelagem	8
2.2 Conservação da quantidade de movimento linear do sistema	9
2.3 Conservação da quantidade de movimento angular das pás	12
2.4 Verificação e resultados	14
2.4.1 Verificação das equações	14
2.4.2 Verificação quantitativa	17
3 Modelagem considerando as pás como unidimensionais e rígidas	26
3.1 Definição de hipóteses para a modelagem	26
3.2 Conservação da quantidade de movimento linear do sistema	26
3.3 Conservação da quantidade de movimento angular das pás	28
3.4 Verificação e resultados	30
3.4.1 Verificação das equações	30
3.4.2 Verificação quantitativa	31
4 Modelagem considerando excentricidade, gravidade e pás bidimen- sionais - visando turbinas eólicas	35
4.1 Definição de hipóteses para a modelagem	36
4.2 Conservação da quantidade de movimento linear do sistema	37
4.2.1 Considerando a inclusão da gravidade	38
4.3 Conservação da quantidade de movimento angular das pás	40

4.3.1	Considerando a inclusão da gravidade	44
4.4	Verificação, validação e resultados	45
4.4.1	Em relação às equações dos modelos anteriores	45
4.4.2	Em relação às equações dos trabalhos de referência	46
5	Conclusão e sugestão para trabalhos futuros	59
	Referências Bibliográficas	61

Lista de Figuras

1.1	Acidente em 11 de janeiro de 2011 - foto de Paulo Polônio/Prefeitura de Maricá	2
1.2	Westland Cierva C-29	3
1.3	Kellet XR-2	3
2.1	Representação gráfica da modelagem do sistema, considerando as pás como massas puntuais	9
2.2	Graus de liberdade do sistema e posição angular das pás	10
2.3	Modelagem do vínculo	12
2.4	Tabela de dados	17
2.5	Posição angular das pás, para comparação, para o ponto central da região de instabilidade (170 rad/s)	18
2.6	Posição do centro da cabeça do rotor, para comparação, para o ponto central da região de instabilidade (170 rad/s)	19
2.7	Posição angular das pás para o ponto central da região de instabilidade (170 rad/s) considerando o modelo aqui desenvolvido	19
2.8	Posição do centro da cabeça do rotor para o ponto central da região de instabilidade (170 rad/s) considerando o modelo aqui desenvolvido	20
2.9	Gráfico de estabilidade	21
2.10	Posição angular das pás, para comparação, para o ponto acima da região de instabilidade (230 rad/s)	21
2.11	Posição do centro da cabeça do rotor, para comparação, para o ponto acima da região de instabilidade (230 rad/s)	22
2.12	Posição angular das pás para o ponto acima da região de instabilidade (230 rad/s) considerando o modelo aqui desenvolvido	22
2.13	Posição do centro da cabeça do rotor para o ponto acima da região de instabilidade (230 rad/s) considerando o modelo aqui desenvolvido	23
2.14	Posição angular das pás, para comparação, para o ponto abaixo da região de instabilidade (119.2 rad/s)	23
2.15	Posição do centro da cabeça do rotor, para comparação, para o ponto abaixo da região de instabilidade (119.2 rad/s)	24

2.16	Posição angular das pás para o ponto abaixo da região de instabilidade (119.2 rad/s) considerando o modelo aqui desenvolvido	24
2.17	Posição do centro da cabeça do rotor para o ponto abaixo da região de instabilidade (119.2 rad/s) considerando o modelo aqui desenvolvido	25
3.1	Representação gráfica da modelagem do sistema, considerando as pás como unidimensionais e rígidas	27
3.2	Modelagem do vínculo para a pá unidimensional rígida	29
3.3	Posição angular das pás para o ponto central da região de instabilidade (170 rad/s) considerando o modelo de pás unidimensionais e rígidas	31
3.4	Posição do centro da cabeça do rotor para o ponto central da região de instabilidade (170 rad/s) considerando o modelo de pás unidimensionais e rígidas	32
3.5	Posição angular das pás para o ponto acima da região de instabilidade (230 rad/s) considerando o modelo de pás unidimensionais e rígidas .	32
3.6	Posição do centro da cabeça do rotor para o ponto acima da região de instabilidade (230 rad/s) considerando o modelo de pás unidimensionais e rígidas	33
3.7	Posição angular das pás para o ponto abaixo da região de instabilidade (119.2 rad/s) considerando o modelo de pás unidimensionais e rígidas	33
3.8	Posição do centro da cabeça do rotor para o ponto abaixo da região de instabilidade (119.2 rad/s) considerando o modelo de pás unidimensionais e rígidas	34
4.1	Representação gráfica da modelagem do sistema, considerando pás bidimensionais	36
4.2	Representação gráfica da modelagem das forças externas	39
4.3	Representação gráfica da modelagem das forças de reação no <i>link</i> . .	44
4.4	Gráfico em cascata demonstrando a variação das frequências críticas do conjunto em função da velocidade de rotação do rotor, mediante excitação da base	56
4.5	Gráfico de densidade demonstrando a variação das frequências críticas do conjunto em função da velocidade de rotação do rotor, mediante excitação da base	56
4.6	Gráfico teórico em cascata, para comparação, demonstrando a variação das frequências críticas do conjunto em função da velocidade de rotação do rotor, mediante excitação da base	57

4.7	Gráfico experimental em cascata, para comparação, demonstrando a variação das frequências críticas do conjunto em função da velocidade de rotação do rotor, mediante excitação da base	57
-----	--	----

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

No dia 11 de janeiro de 2011, na cidade de Maricá, Rio de Janeiro, um acidente com um helicóptero particular deixou duas pessoas feridas [1]. As informações iniciais fornecidas pelos investigadores do Terceiro Serviço Regional de Investigação e Prevenção de Acidentes Aeronáuticos (SERIPA-III), órgão do Comando da Aeronáutica, que foram divulgadas pelos órgãos de imprensa, diziam se tratar de um acidente possivelmente causado por um fenômeno conhecido como ressonância de solo.

A ressonância de solo é um fenômeno conhecido no âmbito da aviação de asas rotativas. No entanto, talvez pela inexistência de uma indústria nacional atuante na área de projeto de helicópteros, a literatura nacional existente é escassa e contém linguagem demasiadamente simplificada.

Esta simplificação se dá pois a abordagem do assunto é voltada essencialmente para o aspecto operacional. O tema "ressonância de solo" faz parte inclusive do currículo mínimo exigido pela Agência Nacional de Aviação Civil (ANAC) para os cursos teóricos de Piloto Privado de Helicóptero (PP-H) [2], Piloto Comercial de Helicóptero (PC-H) [3] e Piloto de Linha Aérea de Helicóptero (PLA-H) [4]

Na ânsia pela simplificação do fenômeno de forma a torná-lo mais facilmente compreensível fica-se sujeito à possibilidade de tornar a exposição do assunto tecnicamente incorreta. O tratamento demasiadamente simplista deste fenômeno pode gerar dificuldades inclusive quando da atuação na investigação e prevenção de acidentes aeronáuticos deste tipo, pois a análise simplista pode levar à conclusões incorretas.

Visando preencher esta lacuna, o presente trabalho pretende realizar uma análise de engenharia sobre o fenômeno da ressonância de solo em helicópteros, procurando desenvolver um modelo físico e de uma metodologia de análise simbólica e numérica



Figura 1.1: Acidente em 11 de janeiro de 2011 - foto de Paulo Polônio/Prefeitura de Maricá

que permita a análise de vibrações em sistemas acoplados rotor-pás.

Conforme o desenvolvimento do tema, ficou evidente a semelhança entre o fenômeno da ressonância de solo e o problema de vibrações de turbinas eólicas, levando ao desenvolvimento de um trabalho que pudesse abranger ambos os fenômenos.

1.2 Histórico de ocorrências de acidentes com helicópteros envolvendo ressonância de solo

O *The Cambridge Aerospace Dictionary* [5] define ressonância de solo (ground resonance) como "uma perigosa vibração natural de um helicóptero em solo causada pela rigidez e frequência das pernas do trem de pouso, amplificando a frequência primária do rotor principal, sendo potencialmente catastrófica salvo se o projeto a excluir; pode ocorrer mesmo em helicópteros certificados, como resultado de um choque severo durante o pouso", em tradução livre. Apesar da tradução livre, o termo frequência primária aparece na versão original (*primary frequency*).

Historicamente, este fenômeno foi identificado logo no início do desenvolvimento das aeronaves de asas rotativas, mais especificamente durante o desenvolvimento daquela aeronave chamada autogiro, ou giroplano, que é considerada a ancestral dos helicópteros atuais.



Figura 1.2: Westland Cierva C-29



Figura 1.3: Kellet XR-2

Segundo LEISHMAN [6], que por sua vez cita MONDEY [7], na década de 1930, um projeto da então companhia Britânica Westland (atualmente a companhia Anglo-Italiana AgustaWestland) foi cancelado sem nunca ter saído do chão, pois a aeronave apresentava sérios problemas de ressonância de solo, aos quais não se conseguiu solucionar. Tratava-se da aeronave C-29, um autogiro para cinco lugares, construído em 1934 e cujo projeto foi encerrado em 1936 sem sequer um vôo executado.

Segundo JOHNSON [8], em 1941, outro projeto de autogiro foi abandonado devido à ressonância de solo. Tratava-se do Kellet XR-2, da companhia americana Kellet Autogiro Corporation. O projeto do XR-2 acabou representando um importante marco para o futuro desenvolvimento do helicóptero, pois, tratando-se de um projeto financiado pelo governo dos Estados Unidos, após este incidente a Força Aérea Americana, o National Advisory Committee for Aeronautics - NACA (a atual National Aeronautics and Space Administration - NASA) e a companhia Kellet resolveram atacar diretamente o problema da ressonância de solo.

Com o alto investimento que foi realizado, a teoria da ressonância de solo foi então desenvolvida por COLEMAN [9], da NACA, em seu trabalho *Theory of Self-Excited Mechanical Oscillations of Hinged Rotorblades*, de 1943. Foi este trabalho

que fundamentou as bases sobre as quais foram desenvolvidos os futuros tratamentos de engenharia para a ressonância de solo. Por este motivo, este fenômeno é às vezes chamado também de "instabilidade de Coleman" [5].

O primeiro trabalho de COLEMAN [9] trata da ressonância de solo em helicópteros com três ou mais pás. Outros dois trabalhos, de FEINGOLD [10] e COLEMAN e FEINGOLD [11], foram publicados visando analisar o fenômeno em aeronaves com apenas duas pás. Os três trabalhos foram mais tarde reunidos em um único artigo de COLEMAN e FEINGOLD [12].

COLEMAN e FEINGOLD [12] escrevem na introdução de seu trabalho um parágrafo que resume bem o processo que levou ao conhecimento do fenômeno da ressonância de solo, aqui reproduzido em tradução livre: "Durante a primeira parte da Segunda Guerra Mundial, alguns dos helicópteros concebidos para uso militar foram observados durante os testes no solo e apresentavam violenta oscilação do rotor, colocando em perigo a segurança da aeronave. Esta instabilidade foi inicialmente atribuída ao *flutter* das pás do rotor, mas uma análise cuidadosa indicou que esta era causada por um até então desconhecido fenômeno, no qual a energia de rotação do rotor foi convertida em energia oscilatória das pás. Este fenômeno era geralmente crítico quando o helicóptero estava operando no ou perto do solo e, por conseguinte, foi chamado ressonância do solo."

Ainda que tenha a teoria de COLEMAN [9] tenha sido publicada pela primeira vez em 1943, em setembro de 1966 o projeto da aeronave BO-105 da companhia alemã Bölkow sofreu atraso considerável e perdas financeiras significativas ao ter seu primeiro protótipo inteiramente destruído ao experimentar ressonância de solo [13].

O *handbook* do *Federal Aviation Administration* dos Estados Unidos da América [14] cita que a ressonância de solo é um fenômeno associado aos rotores articulados, o que justificará a escolha futura de um modelo com pás rígidas articuladas por um *link* ao rotor.

Os regulamentos aeronáuticos de projeto de helicópteros, até hoje, trazem requisitos relacionados ao fenômeno da ressonância de solo, enfatizando a importância deste estudo.

1.3 Requisitos regulamentares de projeto de helicópteros

A partir da experiência obtida pela indústria durante o desenvolvimento tecnológico do helicóptero, a importância da prevenção deste fenômeno ficou evidente. Esta importância pode ser encontrada na regulamentação aeronáutica. Além do que

foi citado anteriormente sobre o ensino operacional para pilotos, a regulamentação técnica voltada para projetos também traz a ressonância de solo como preocupação.

O Código Brasileiro de Aeronáutica [15], em seu Art. 66, estabelece que compete à autoridade aeronáutica estabelecer os padrões mínimos de segurança relativos a projetos, e que estes padrões mínimos devem ser estabelecidos em Regulamentos Brasileiros de Homologação Aeronáutica (RBHA).

A lei de criação da Agência Nacional de Aviação Civil (ANAC) [16] estabelece em seu Art. 47 que os regulamentos, normas e demais regras em vigor devem ser gradativamente substituídos por regulamentação a ser editada pela ANAC. Os regulamentos editados a partir da lei de criação da ANAC passaram a ser denominados Regulamentos Brasileiros de Aviação Civil (RBAC), apesar de não haver prescrição em lei para a alteração da denominação dos regulamentos.

Os Regulamentos Brasileiros de Aviação Civil 27 [17] e 29 [18] estabelecem os critérios para concessão de certificados de tipo de aeronaves de asas rotativas (helicópteros) nas categorias normal (peso máximo de decolagem igual ou menor a 7.000 libras e nove ou menos passageiros) e transporte (demais aeronaves de asas rotativas), respectivamente.

Os RBAC 27 e 29 adotam integralmente, na língua inglesa, os regulamentos do Title 14 Code of Federal Regulations, Part 27 Emenda 27-44 e Part 29 Emenda 29-51, efetivas em 31 de março de 2008, da autoridade de aviação civil, Federal Aviation Administration - FAA.

Ambos os regulamentos trazem em seu item 241 o mesmo texto, aqui reproduzido, que explicita que a aeronave não pode apresentar tendência de apresentar ressonância de solo:

The rotorcraft may have no dangerous tendency to oscillate on the ground with the rotor turning.

Também em ambos os regulamentos, o item 663 estabelece os meios de prevenção:

(a) The reliability of the means for preventing ground resonance must be shown either by analysis and tests, or reliable service experience, or by showing through analysis or tests that malfunction or failure of a single means will not cause ground resonance.

(b) The probable range of variations, during service, of the damping action of the ground resonance prevention means must be established and must be investigated during the test required by §241.

A partir desses regulamentos, pode-se perceber a importância de testes e análises na comprovação para a autoridade aeronáutica de que os meios de prevenção são confiáveis. Não há nos regulamentos a previsão da realização de testes e análises específicos, deixando margem ao desenvolvimento de técnicas para comprovar a efetividade dos meios de prevenção.

1.4 Estrutura do trabalho

Este trabalho pretende desenvolver uma metodologia para análise computacional do fenômeno conhecido como "ressonância de solo", que atinge as aeronaves de asa rotativa. O trabalho será desenvolvido em três etapas principais, sob o ponto de vista de modelagem. Cada uma dessas etapas representa uma evolução do modelo.

Em uma primeira etapa pretende-se desenvolver o modelo a partir da definição utilizada por COLEMAN [9]. Considerar-se-á, portanto, assim como em COLEMAN [9], uma aeronave de asas rotativas com três pás em seu rotor principal, representadas por massas puntuais.

A partir dessa modelagem física, pretende-se obter as equações de movimento do sistema utilizando-se computação simbólica. As equações de movimento serão obtidas com base no sistema cartesiano de coordenadas, ao invés da representação por números complexos utilizada por COLEMAN [9].

Realizar-se-á então a comparação das equações com aquelas obtidas por FLOWERS e TONGUE [19] visando verificar se a modelagem realizada foi desenvolvida de acordo com o planejado inicialmente. Além disso, os resultados numéricos serão comparados com aqueles obtidos por ROBINSON *et al.* [20] a partir das equações desenvolvidas em ROBINSON *et al.* [21], semelhantes àquelas de FLOWERS e TONGUE [19], visando verificar os resultados obtidos e se os objetivos pretendidos são atingidos.

Em uma segunda etapa, adaptaremos o modelo para considerar pás unidimensionais e rígidas, com massa continuamente distribuída pelo seu comprimento. Esta adaptação visa aproximar o modelo utilizado a um helicóptero real e verificar se a consideração de massa concentrada no centro geométrico da pá apresenta diferenças em relação ao modelo unidimensional e rígido. As equações também serão verificadas em relação àquelas desenvolvidas por FLOWERS e TONGUE [19] e os resultados numéricos serão validados com aqueles desenvolvidos no modelo de massas concentradas.

Em uma terceira e última etapa, refaremos a modelagem visando desenvolver um modelo considerando pás também rígidas e com massa continuamente distribuída, mas agora considerando pás bidimensionais, e admitiremos a possibilidade de excentricidade no rotor. Além disso, consideraremos o posicionamento vertical do rotor e a atuação da gravidade, visando adaptar a modelagem para representar turbinas eólicas. Este modelo será desenvolvido utilizando uma estratégia diferente de modelagem visando verificar as equações obtidas anteriormente. Por último, as equações serão verificadas em relação àquelas obtidas por SARACHO [22] e SANTOS *et al.* [23] e os resultados numéricos também serão validados em relação àquelas obtidas por SARACHO [22] e SANTOS *et al.* [23].

Finalmente, os resultados serão analisados e serão definidas novas etapas para o desenvolvimento futuro do trabalho. Em todas as etapas, o livro de TENENBAUM [24] é utilizado como referência principal para o desenvolvimento das equações dinâmicas.

1.5 Objetivos

Os principais objetivos deste trabalho são: (i) desenvolver um modelo computacional para analisar o fenômeno da ressonância de solo de helicópteros utilizando relações dinâmicas e computação simbólica, (ii) desenvolver um modelo computacional para analisar a vibração acoplada de turbinas eólicas utilizando computação simbólica, (iii) comparar os modelos desenvolvidos com modelos encontrados em trabalhos acadêmicos para verificá-los e validá-los, (iv) realizar simulações numéricas visando analisar os resultados obtidos.

O desenvolvimento do modelo desde a definição de hipóteses, passando por desenvolvimento das equações de movimento, indo até a simulação numérica, é importante pois permite o domínio do modelo, permitindo futuras alterações e aperfeiçoamentos. Esta é uma característica que permeia os objetivos deste trabalho.

Capítulo 2

Modelagem considerando as pás como massas puntuais

O primeiro modelo a ser desenvolvido será baseado naquele desenvolvido por COLEMAN e FEINGOLD [12]. Isto se deve principalmente pelo contexto histórico deste trabalho. Este relatório publicado pelo *National Advisory Committee for Aeronautics* unifica e contextualiza três artigos produzidos por COLEMAN [9], FEINGOLD [10] e COLEMAN e FEINGOLD [11].

O primeiro deles [9] é considerado o primeiro artigo a tratar de ressonância de solo de helicópteros. Neste trabalho, COLEMAN [9] utiliza algumas hipóteses que também utilizaremos como ponto de partida para o desenvolvimento de nosso modelo.

2.1 Definição de hipóteses para a modelagem

Primeiramente, algumas considerações devem ser feitas de forma a modelar o sistema real. Considera-se, neste momento, que o helicóptero pode ser representado por uma massa puntual localizada no ponto central da cabeça do rotor, assim como as massas das pás, que são consideradas massas puntuais localizadas a uma distância R dos pontos em que se ligam à cabeça do rotor. Este ponto onde a pá se conecta à cabeça do rotor é aqui chamada de *link*. Cada *link* dista do centro geométrico da cabeça do rotor o equivalente ao raio da cabeça do rotor, d .

Conforme definido na introdução do trabalho de COLEMAN e FEINGOLD [12], o fenômeno da ressonância de solo ocorre, como o próprio nome sugere, quando a aeronave está em contato com o solo. Desta forma, visando modelar a resistência gerada pelo trem de pouso e estrutura da aeronave quando em contato com o solo, considera-se que o helicóptero pode se movimentar ao longo de seus eixos longitudinal e lateral, cuja resistência ao movimento em cada eixo é modelada como

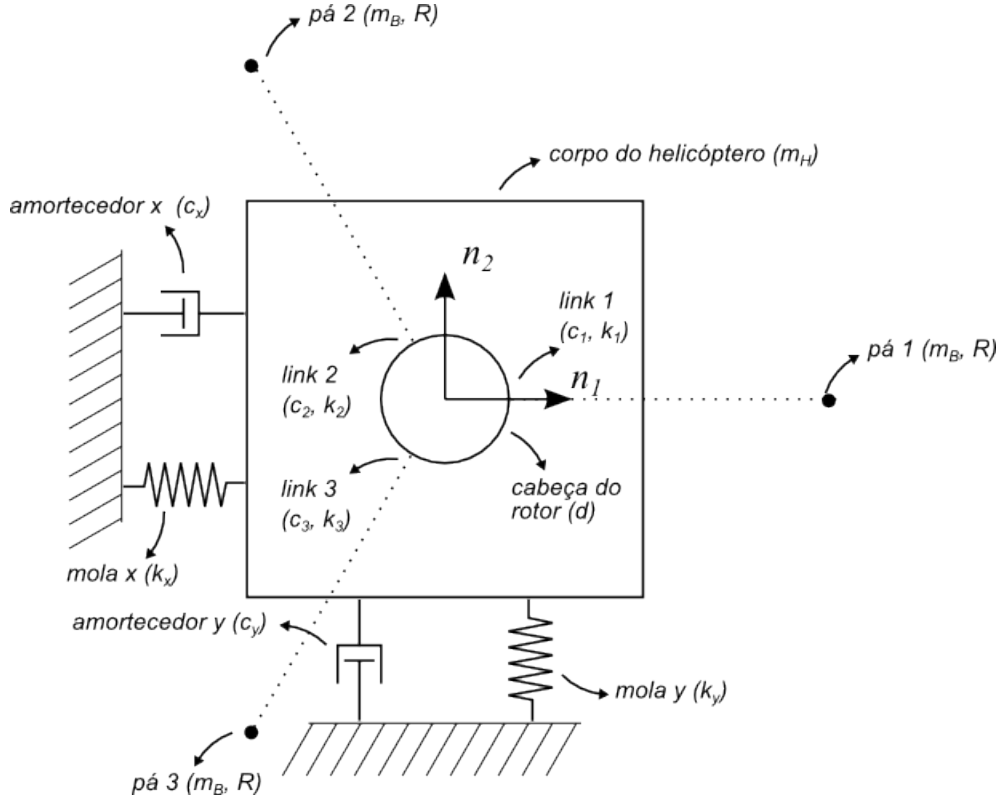


Figura 2.1: Representação gráfica da modelagem do sistema, considerando as pás como massas puntuais

equivalente a uma mola e um amortecedor com coeficientes específicos para cada eixo, ou seja, de forma não necessariamente isotrópica. Ou seja, os coeficientes k_x , k_y , c_x e c_y visam representar no modelo o contato da aeronave com o solo.

Além disso, no momento da simulação numérica, visando tirar o sistema do equilíbrio inicial, modelamos um impacto lateral na aeronave através de uma velocidade inicial lateral. Este impacto inicial excitará o sistema e permitirá a identificação das frequências de ressonância.

2.2 Conservação da quantidade de movimento linear do sistema

Considerando uma base $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2\}$ fixa no referencial inercial \mathfrak{R} e um sistema de coordenadas cartesiano com origem no centro geométrico da cabeça do rotor, conforme a figura anterior, quando na posição neutra, ou seja, quando as molas não estão tensionadas, podemos escrever a posição do centro de massa da cabeça do rotor (H^*) em relação à origem (O) do sistema de coordenadas como:

$$\mathbf{p}^{H^*/O}(t) = x(t) \mathbf{n}_1 + y(t) \mathbf{n}_2 \quad (2.1)$$

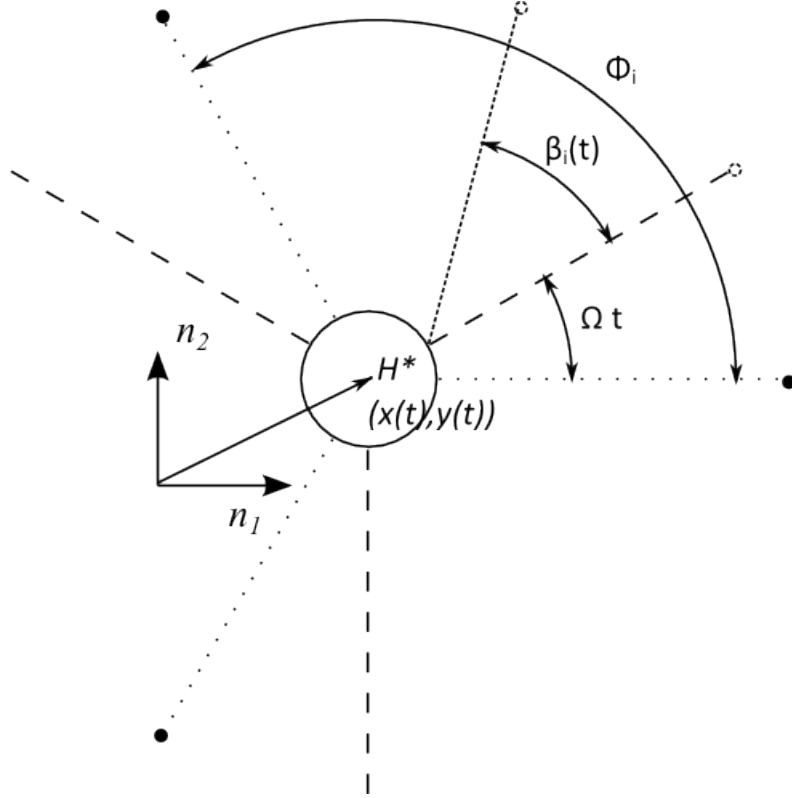


Figura 2.2: Graus de liberdade do sistema e posição angular das pás

Considerando que o conjunto rotor gira com velocidade angular constante igual a Ω , que cada uma das pás possui uma fase, ou azimute, igual a $\phi_i = (i - 1) \times \frac{2\pi}{N}$ (onde N é o número de pás do rotor e $i = 1, 2, 3, \dots, N - 2, N - 1, N$) e que cada um dos N *links* dista d da origem, podemos então escrever a posição do ponto L_i (posição do *link* da pá B_i em \mathfrak{R}) como:

$$\mathbf{p}^{L_i/O}(t) = (x(t) + d \cos(\phi_i + \Omega t)) \mathbf{n}_1 + (y(t) + d \sin(\phi_i + \Omega t)) \mathbf{n}_2 \quad (2.2)$$

Considerando a posição do ponto P_i da massa puntual de uma das N pás, distando R do respectivo *link*, e definindo um ângulo $\beta_i(t)$, formado entre o eixo longitudinal da pá B_i quando em repouso e este mesmo eixo quando a pá é rotacionada em torno de seu *link*, podemos escrever a posição do ponto P_i pertencente à pá B_i , em \mathfrak{R} , como:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^{P_i/O}(t) = & (x(t) + d \cos(\phi_i + \Omega t) + R \cos(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t))) \mathbf{n}_1 \\ & + (y(t) + d \sin(\phi_i + \Omega t) + R \sin(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t))) \mathbf{n}_2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

A partir das definições feitas acima, podemos encontrar a quantidade de movimento linear de uma pá B_i , que possui massa m_B a partir de:

$$\begin{aligned} {}^{\mathfrak{R}}\mathbf{G}^{B_i} &= m_B {}^{\mathfrak{R}}\mathbf{v}^{P_i} \\ \text{onde } {}^{\mathfrak{R}}\mathbf{v}^{P_i} &= \frac{{}^{\mathfrak{R}}d}{dt} \mathbf{p}^{P_i/O} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Podemos também encontrar a quantidade de movimento linear da cabeça do rotor H , que possui massa m_H , conforme a seguir:

$$\begin{aligned} {}^{\mathfrak{R}}\mathbf{G}^H &= m_H {}^{\mathfrak{R}}\mathbf{v}^{H^*} \\ \text{onde } {}^{\mathfrak{R}}\mathbf{v}^{H^*} &= \frac{{}^{\mathfrak{R}}d}{dt} \mathbf{p}^{H^*/O} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Desta forma, a quantidade de movimento linear total do sistema será:

$${}^{\mathfrak{R}}\mathbf{G}^T = {}^{\mathfrak{R}}\mathbf{G}^H + \sum_{i=1}^N {}^{\mathfrak{R}}\mathbf{G}^{B_i} = m_H {}^{\mathfrak{R}}\mathbf{v}^{H^*} + \sum_{i=1}^N (m_B {}^{\mathfrak{R}}\mathbf{v}^{P_i}) \quad (2.6)$$

Podemos então utilizar a 2ª lei de Newton, conforme a seguir:

$$\sum \mathbf{F}^{ext} = {}^{\mathfrak{R}}\dot{\mathbf{G}}^T \rightarrow (-c_x \dot{x}(t) - k_x x(t)) \mathbf{n}_1 + (-c_y \dot{y}(t) - k_y y(t)) \mathbf{n}_2 = \frac{{}^{\mathfrak{R}}d}{dt} \mathbf{G}^T \quad (2.7)$$

E finalmente, efetuando as manipulações necessárias, obtemos as duas primeiras equações de movimento:

$$\begin{aligned} (N m_B + m_H) \ddot{x}(t) + c_x \dot{x}(t) + k_x x(t) = \\ m_B R \sum_{i=1}^N \left[\ddot{\beta}_i(t) \sin(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t)) + \left(\Omega + \dot{\beta}_i(t) \right)^2 \cos(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t)) \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} (N m_B + m_H) \ddot{y}(t) + c_y \dot{y}(t) + k_y y(t) = \\ - m_B R \sum_{i=1}^N \left[\ddot{\beta}_i(t) \cos(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t)) - \left(\Omega + \dot{\beta}_i(t) \right)^2 \sin(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t)) \right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

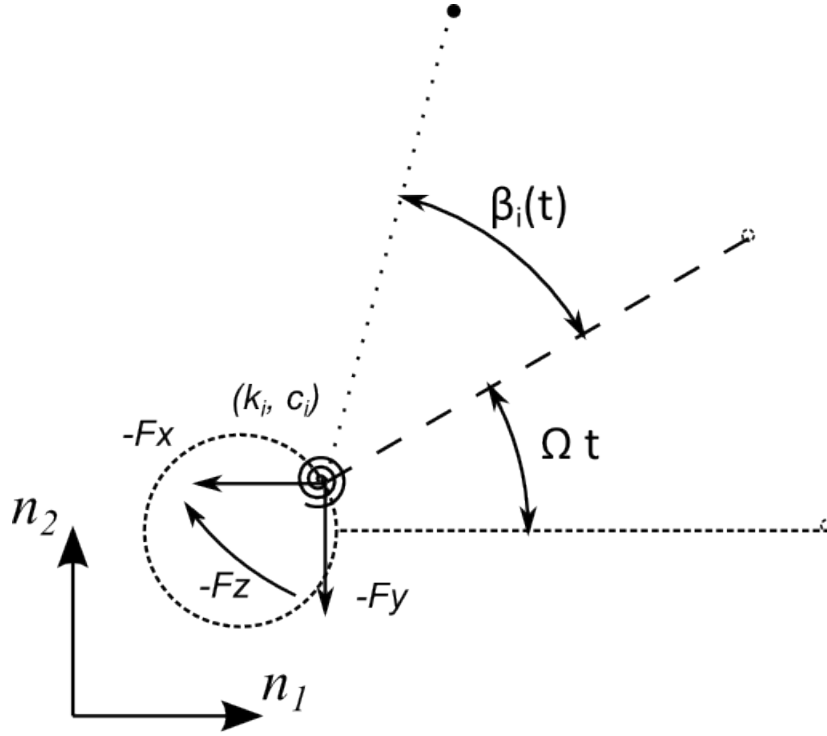


Figura 2.3: Modelagem do vínculo

2.3 Conservação da quantidade de movimento angular das pás

Como o sistema possui $N + 2$ graus de liberdade $(x(t), y(t), \beta_i(t))$ e até agora desenvolvemos somente duas equações de movimento, precisamos obter outras N equações. A estratégia adotada é substituir o vínculo que conecta a pá à cabeça do rotor, ou seja, o *link* de cada uma das i pás, por forças e torques de reação. Desta forma, podemos calcular a conservação da quantidade de movimento angular de cada pá em relação ao *link* sem precisar conhecer as forças de reação, sendo somente necessário conhecer o torque atuante no *link*.

Para isto, precisamos primeiro definir a posição do ponto P_i da pá B_i em relação ao respectivo *link* L_i como:

$$\mathbf{p}^{P_i/L_i} = \mathbf{p}^{P_i/O} - \mathbf{p}^{L_i/O} = (R \cos(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t))) \mathbf{n}_1 + (R \sin(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t))) \mathbf{n}_2 \quad (2.10)$$

E podemos calcular a quantidade de movimento angular da pá B_i com relação ao ponto L_i a partir de:

$${}^{\mathfrak{R}}\mathbf{H}^{B_i/L_i} = m_B \mathbf{p}^{P_i/L_i} \times {}^{\mathfrak{R}}\mathbf{v}^{P_i} \quad (2.11)$$

No entanto, como o cálculo não se dá em referência a um ponto fixo no sistema

inercial ou ao centro de massa, não basta derivar a expressão da quantidade de movimento angular da pá B_i em relação ao *link* L_i para obter sua taxa de variação em \mathfrak{R} .

Obteremos então as N equações necessárias, cada uma relativa à i -ésima pá, conforme segue.

Sabemos que a taxa de variação da quantidade de movimento de um ponto P_i em relação a um ponto L_i é igual à resultante do sistema de forças que age sobre P_i , ou seja:

$$\mathfrak{R}\dot{\mathbf{G}}^{P_i} = \mathbf{R} \quad (2.12)$$

Para obtermos o momento das forças externas em relação a L_i , multiplicamos ambos os lados da equação pela posição do ponto P_i em relação a L_i :

$$\mathbf{p}^{P_i/L_i} \times \mathfrak{R}\dot{\mathbf{G}}^{P_i} = \mathbf{p}^{P_i/L_i} \times \mathbf{R} \quad (2.13)$$

O segundo membro da equação acima é o momento com relação a L_i , $\mathbf{M}^{\mathcal{F}_{ext}/L_i}$, enquanto o primeiro membro podemos obter a partir da derivada da quantidade de movimento angular do ponto P_i em relação ao ponto L_i .

Sabemos que a quantidade de movimento angular tem a forma:

$$\mathfrak{R}\mathbf{H}^{P_i/L_i} = \mathbf{p}^{P_i/L_i} \times \mathfrak{R}\mathbf{G}^{P_i} \quad (2.14)$$

Podemos, assim, calcular sua derivada:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}\dot{\mathbf{H}}^{P_i/L_i} &= \mathfrak{R}\dot{\mathbf{p}}^{P_i/L_i} \times \mathfrak{R}\mathbf{G}^{P_i} + \mathbf{p}^{P_i/L_i} \times \mathfrak{R}\dot{\mathbf{G}}^{P_i} \\ &= (\mathfrak{R}\mathbf{v}^{P_i} - \mathfrak{R}\mathbf{v}^{L_i}) \times \mathfrak{R}\mathbf{G}^{P_i} + \mathbf{p}^{P_i/L_i} \times \mathfrak{R}\dot{\mathbf{G}}^{P_i} \\ &= \mathbf{p}^{P_i/L_i} \times \mathfrak{R}\dot{\mathbf{G}}^{P_i} - \mathfrak{R}\mathbf{v}^{L_i} \times \mathfrak{R}\mathbf{G}^{P_i} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Podemos reescrever esta equação como:

$$\mathbf{p}^{P_i/L_i} \times \mathfrak{R}\dot{\mathbf{G}}^{P_i} = \mathfrak{R}\dot{\mathbf{H}}^{P_i/L_i} + \mathfrak{R}\mathbf{v}^{L_i} \times \mathfrak{R}\mathbf{G}^{P_i} \quad (2.16)$$

Substituindo (2.16) em (2.13) e considerando que $\mathbf{p}^{P_i/L_i} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}^{\mathcal{F}_{ext}/L_i}$, encontramos:

$$\mathfrak{R}\dot{\mathbf{H}}^{P_i/L_i} + \mathfrak{R}\mathbf{v}^{L_i} \times \mathfrak{R}\mathbf{G}^{P_i} = \mathbf{M}^{\mathcal{F}_{ext}/L_i} \quad (2.17)$$

Ou, de forma mais específica para o problema sob estudo:

$$\begin{aligned}
\sum \mathbf{M}^{\mathcal{F}_{ext}/L_i} &= \mathfrak{R} \dot{\mathbf{H}}^{B_i/L_i} + \mathfrak{R} \mathbf{v}^{L_i} \times \mathfrak{R} \mathbf{G}^{P_i} \rightarrow \\
&- c_i \dot{\beta}_i(t) - k_i \beta_i(t) \mathbf{n}_3 = \frac{d}{dt} \mathbf{H}^{B_i/L_i} + m_B (\mathfrak{R} \mathbf{v}^{L_i} \times \mathfrak{R} \mathbf{v}^{P_i} dr)
\end{aligned}$$

onde $\mathbf{v}^{L_i} = \frac{d\mathbf{p}^{L_i/O}}{dt}$

(2.18)

Finalmente, utilizando as equações anteriormente desenvolvidas e efetuando as manipulações necessárias, obtemos as N equações de movimento que eram procuradas:

$$\begin{aligned}
m_B R^2 \ddot{\beta}_i(t) + c_i \dot{\beta}_i(t) + k_i \beta_i(t) + m_B \Omega^2 d R \sin(\beta_i(t)) = \\
m_B R [\ddot{x}(t) \sin(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t)) - \ddot{y}(t) \cos(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t))] \quad (2.19)
\end{aligned}$$

2.4 Verificação e resultados

O processo de verificação e validação é etapa fundamental no desenvolvimento de um modelo físico. Esta pode ser realizada mediante comparação com dados experimentais ou mediante comparação com outros modelos desenvolvidos.

Para a modelagem considerando as pás como massas pontuais, apesar de considerar-se que seria preferível a comparação com dados experimentais, optou-se pela comparação com outros modelos pela não obtenção de dados experimentais prévios e por não ser possível a realização de experimentos.

Desta forma, buscou-se referências de outros modelos já desenvolvidos para verificar não só as equações como os resultados numéricos das mesmas.

2.4.1 Verificação das equações

Com o objetivo de verificar a modelagem aqui desenvolvida, buscou-se um texto de referência para comparação. A referência que apresentou desenvolvimento e resultado de modelagem mais próximos ao trabalho aqui desenvolvido foi o artigo de FLOWERS e TONGUE [19]. Neste trabalho, computação simbólica é utilizada para derivar equações de movimento que modelem a ressonância de solo de helicópteros, sendo este o mesmo objetivo do presente trabalho.

Neste trabalho, são apresentadas as seguintes equações de movimento:

$$M_x \ddot{x} + C_x \dot{x} + V_x \dot{x}|\dot{x}| + K_x x = m_b R \sum_{k=1}^N \left[\ddot{\zeta}_k \sin(\psi_k + \zeta_k) + \left(\Omega + \dot{\zeta}_k \right)^2 \cos(\psi_k + \zeta_k) \right] \quad (2.20)$$

$$M_y \ddot{y} + C_y \dot{y} + V_y \dot{y}|\dot{y}| + K_y y = - m_b R \sum_{k=1}^N \left[\ddot{\zeta}_k \sin(\psi_k + \zeta_k) - \left(\Omega + \dot{\zeta}_k \right)^2 \sin(\psi_k + \zeta_k) \right] \quad (2.21)$$

$$m_b R^2 \ddot{\zeta}_k + C_k \dot{\zeta}_k + K_k \zeta_k + m_b \Omega^2 e R \sin(\zeta_k) = m_b R [\ddot{x} \sin(\psi_k + \zeta_k) - \ddot{y} \cos(\psi_k + \zeta_k)] \quad (2.22)$$

Considerando que a notação utilizada por FLOWERS e TONGUE [19] é diferente daquela aqui utilizada, iremos fazer as seguintes adaptações para facilitar a comparação (importante ressaltar que a notação é diferente mas as grandezas envolvidas são equivalentes):

$$\begin{aligned} M_x &= m_H + Nm_B \\ C_x &= c_x \\ V_x &= 0 \\ K_x &= k_x \\ M_y &= m_H + Nm_B \\ C_y &= c_y \\ V_y &= 0 \\ K_y &= k_y \\ C_k &= c_i \\ K_k &= k_i \\ e &= d \\ \zeta_k &= \beta_i \\ \psi_k &= \Omega t + \phi_i \\ k &= i \end{aligned} \quad (2.23)$$

O coeficiente de amortecimento não linear (V_x e V_y), utilizado naquele trabalho, é aqui desprezado por não fazer parte de nossas hipóteses, assim como é importante

esclarecer que o termo ψ_k é utilizado por FLOWERS e TONGUE [19] para resumir a soma $\Omega t + \phi_i$, onde k e i são equivalentes, e M_x e M_y são utilizados para representar a soma $m_H + Nm_B$.

Fazendo as substituições descritas em (2.23) obtemos:

$$m_H \ddot{x} + c_x \dot{x} + k_x x = m_B R \sum_{i=1}^N \left[\ddot{\beta}_i \sin(\Omega t + \phi_i + \beta_i) + \left(\Omega + \dot{\beta}_i \right)^2 \cos(\Omega t + \phi_i + \beta_i) \right] \quad (2.24)$$

$$m_H \ddot{y} + c_y \dot{y} + k_y y = - m_B R \sum_{i=1}^N \left[\ddot{\beta}_i \sin(\Omega t + \phi_i + \beta_i) - \left(\Omega + \dot{\beta}_i \right)^2 \sin(\Omega t + \phi_i + \beta_i) \right] \quad (2.25)$$

$$m_B R^2 \ddot{\beta}_i + c_i \dot{\beta}_i + k_i \beta_i + m_B \Omega^2 d R \sin(\beta_i) = m_B R [\ddot{x} \sin(\Omega t + \phi_i + \beta_i) - \ddot{y} \cos(\Omega t + \phi_i + \beta_i)] \quad (2.26)$$

Comparando as equações (2.24) e (2.25) com as equações (2.8) e (2.9) percebemos que são idênticas.

Importante lembrar que adaptamos as notações utilizadas e desconsideramos o termo advindo da consideração de amortecimento não linear. Assim como anulamos a diferença relativa às massas, dado que o modelo desenvolvido por FLOWERS e TONGUE [19] considera que a massa do sistema pode ser diferente para os eixos x e y , pois este modelo lida com o conceito de massa efetiva. O modelo aqui desenvolvido não faz essa consideração mas poderia ser facilmente adaptado para isto. Se trata de uma diferença conceitual que, se considerada adequadamente no momento da determinação das grandezas físicas de entrada, não resultará em diferença na saída.

Portanto, considera-se que ambas as modelagens também são equivalentes.

Analisando a equação (2.26) em relação a equação (2.19), podemos ver que as duas são equivalentes.

Ou seja, podemos concluir que as equações são equivalentes, consideradas as diferenças de hipóteses em relação às massas equivalentes e ao amortecimento não linear.

Table 6.2 Parameter Settings for Basic Simulation Case

mb(1)	mb(2)	mb(3)	M(1)	M(2)
0.1 slugs	0.1 slugs	0.1 slugs	6.5 slugs	6.5 slugs
R	Omega	e1	z	
10 ft	170 radians/sec	0.5 ft	$\pi/12$ radians	
Phi(1)	Phi(2)	Phi(3)		
0 radians	$2\pi/3$ radians	$4\pi/3$ radians		
c(1)	c(2)	v(1)	v(2)	
0 lbs/fps	0 lbs/fps	0 lbs/fps ²	0 lbs/fps ²	
Czeta(1)	Czeta(2)	Czeta(3)		
0 ft-lbs/(radians/sec)	0 ft-lbs/(radians/sec)	0 ft-lbs/(radians/sec)		
Vzeta(1)	Vzeta(2)	Vzeta(3)		
0 ft-lbs/(radians/sec) ²	0 ft-lbs/(radians/sec) ²	0 ft-lbs/(radians/sec) ²		
Ke(1)	Ke(2)	Ke(3)		
0 ft-lbs/radian	0 ft-lbs/radian	0 ft-lbs/radian		
Kd(1)	Kd(2)	Kd(3)		
0 ft-lbs/radian ³	0 ft-lbs/radian ³	0 ft-lbs/radian ³		
Ks(1)	Ks(2)	Ks(3)		
0 ft-lbs/radian	0 ft-lbs/radian	0 ft-lbs/radian		
K(1)		K(2)		
113,000 lbs/ft		113,000 lbs/ft		
xXi	xYi	xli	x2i	x3i
0 ft	0 ft	0 radians	0 radians	0 radians
xrXi	xrYi	xrli	xr2i	xr3i
0.5 ft/sec	0 ft/sec	0 radians/sec	0 radians/sec	0 radians/sec

Figura 2.4: Tabela de dados extraída de ROBINSON [25]

2.4.2 Verificação quantitativa

Em busca de resultados numéricos que pudessem ser utilizados para comparação com o modelo aqui desenvolvido, foi possível encontrar outro trabalho com as mesmas equações desenvolvidas por FLOWERS e TONGUE [19]. Trata-se do trabalho de ROBINSON *et al.* [21]. Mas o que de fato se mostra interessante é o fato de que há uma continuação deste artigo, também de ROBINSON *et al.* [20] com o objetivo de apresentar resultados numéricos.

A dificuldade apresentada em utilizar este trabalho como comparação é que ROBINSON *et al.* [21] e ROBINSON *et al.* [20] não explicitam os dados que foram utilizados para as grandezas físicas de entrada, como massa, comprimento da pá, rigidez, coeficientes de amortecimento, etc. No entanto, foi possível verificar que os trabalhos de ROBINSON *et al.* [21] e ROBINSON *et al.* [20] resultaram da dissertação de mestrado de ROBINSON [25] e nesta sim é apresentada uma tabela com as grandezas utilizadas, conforme a figura 2.4.

Assim como em ROBINSON [25], para tirar o sistema do equilíbrio inicial, modelamos um impacto lateral na aeronave através de uma velocidade inicial lateral. Este impacto inicial excitará o sistema e permitirá a identificação das frequências de ressonância.

As equações aqui desenvolvidas ((2.8), (2.9) e (2.19)) são iguais aquelas desen-

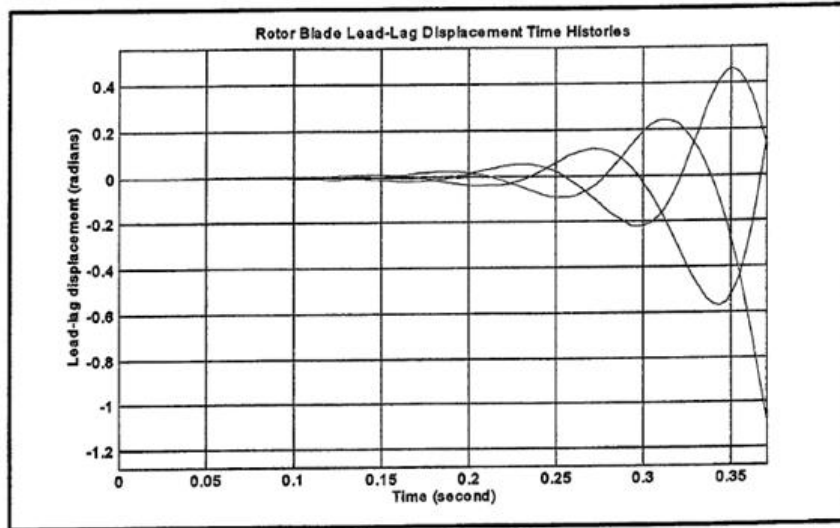


Figure 6.1 Rotor Lead-lag Displacements for Basic Parameter Case Settings, Center of Self Excited Region.

Figura 2.5: Posição angular das pás em ROBINSON *et al.* [20] para o ponto central da região de instabilidade (170 rad/s)

volvidas por FLOWERS e TONGUE [19] ((2.24), (2.25) e (2.26)). Utilizaremos, portanto, as equações (2.8), (2.9) e (2.19) para desenvolver a programação e obter resultados numéricos, utilizando os dados disponibilizados por ROBINSON [25], e compará-los com aqueles obtidos por ROBINSON *et al.* [20].

Para estes dados ROBINSON *et al.* [20] traz os gráficos aqui representados nas figuras 2.5 e 2.6 para a posição angular das pás e para a posição do centro da cabeça do rotor, respectivamente.

Podemos comparar estes gráficos com aqueles obtidos a partir do resultado da simulação das equações (2.8), (2.9) e (2.19) aqui desenvolvidas, representados nas figuras 2.7 e 2.8.

Percebemos que a simulação apresenta os mesmos resultados nas figuras 2.6 e 2.8, mas nas figuras 2.5 e 2.7, apesar de apresentar o mesmo comportamento, os valores se apresentam diferentes. Foram revisadas as unidades inglesas utilizadas em ROBINSON [25], a programação utilizada e, por último, foi refeita a simulação tal qual descrita em ROBINSON *et al.* [20] e não se pode determinar a causa desta diferença. Como as curvas apresentam o mesmo comportamento, supõe-se que houve algum equívoco quando da determinação dos rótulos dos gráficos em ROBINSON *et al.* [20].

Em ROBINSON *et al.* [20] são apresentadas também duas outras situações de cálculo (figura 2.9). Apesar de não explicitar qual a velocidade angular utilizada nesses dois outros casos, o trabalho apresenta um gráfico em que são plotados os estados dos dois casos de teste. Os eixos são grandezas desenvolvidas no trabalho de COLEMAN [9], o que nos permite utilizar essas relações para fazer o cálculo

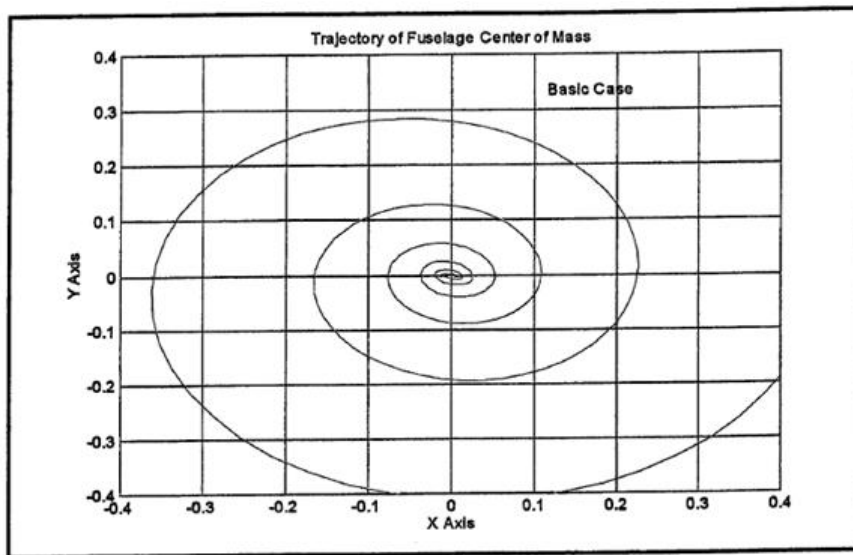


Figure 6.2 Fuselage Trajectory for Basic Parameter Settings, Center of Self Excited Region.

Figura 2.6: Posição do centro da cabeça do rotor em ROBINSON *et al.* [20] para o ponto central da região de instabilidade (170 rad/s)

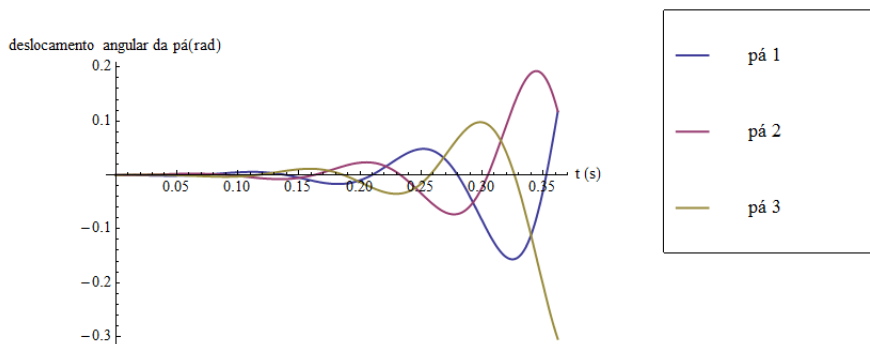


Figura 2.7: Posição angular das pás para o ponto central da região de instabilidade (170 rad/s) considerando o modelo aqui desenvolvido

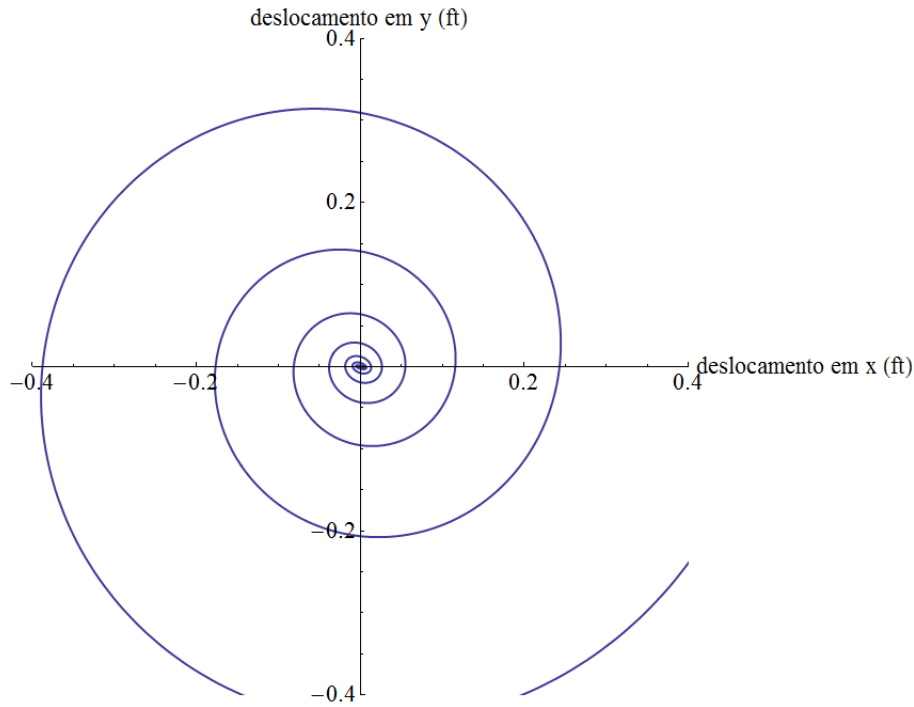


Figura 2.8: Posição do centro da cabeça do rotor para o ponto central da região de instabilidade (170 rad/s) considerando o modelo aqui desenvolvido

inverso e descobrir as velocidades angulares utilizadas. Executando o cálculo inverso, chegamos às velocidades angulares de 119.2 rad/s e 230 rad/s para os casos acima e abaixo da região de instabilidade, respectivamente.

É importante notar que este cálculo inverso é realizado em condições de instabilidade, nas quais uma pequena diferença nas condições iniciais pode resultar em grandes diferenças nos resultados. Desta forma, corremos o risco de obter, a partir do cálculo inverso, velocidades angulares do rotor principal aproximadas, mas não exatamente iguais, às utilizadas por ROBINSON *et al.* [20]. Por conta disso, podem ocorrer diferenças nos resultados que não sejam consequência de diferenças nos modelos ou programações, mas de pequenas diferenças nas condições iniciais de velocidade angular.

Para o ponto acima da região de instabilidade ROBINSON *et al.* [20] traz os gráficos 2.10 e 2.11 para a posição angular das pás e para a posição do centro da cabeça do rotor, respectivamente.

Podemos comparar estes gráficos com os gráficos 2.12 e 2.13 obtidos a partir do resultado da simulação das equações (2.8), (2.9) e (2.19) aqui desenvolvidas para a velocidade angular de 230 rad/s.

Para o ponto abaixo da região de instabilidade, ROBINSON *et al.* [20] traz os gráficos 2.14 e 2.15 para a posição angular das pás e para a posição do centro da cabeça do rotor, respectivamente.

Finalmente, podemos comparar estes gráficos com os gráficos 2.16 e 2.17, obtidos

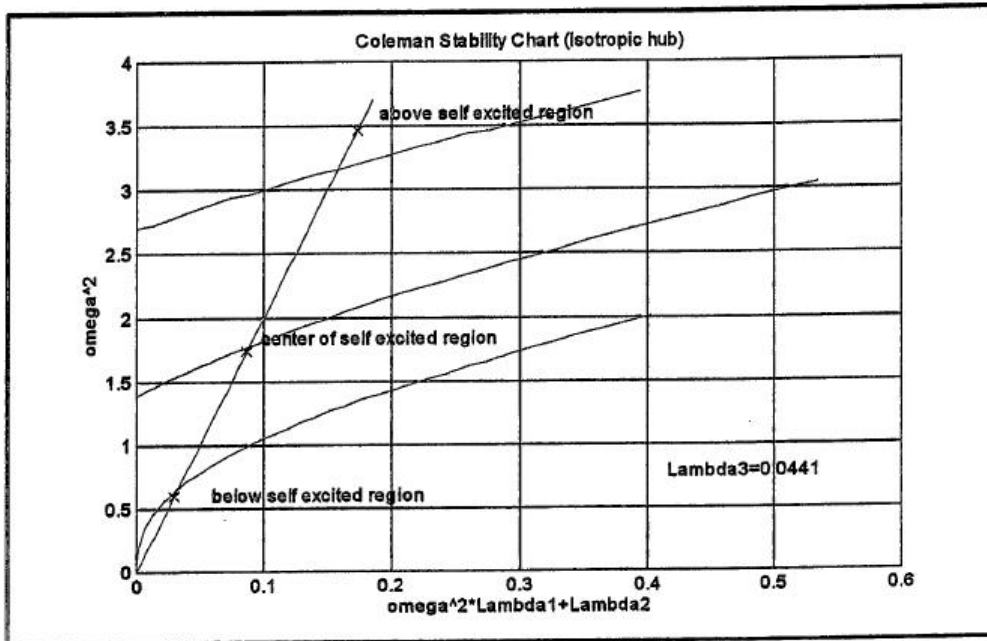


Figure 6.7 Coleman Stability Plot for Basic Case

Figura 2.9: Gráfico de estabilidade apresentado por ROBINSON *et al.* [20]

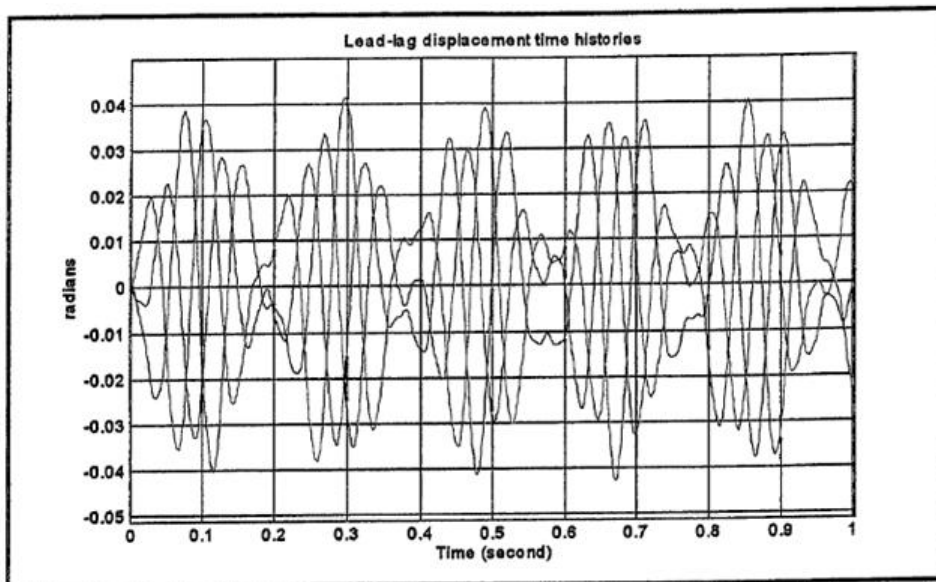


Figure 6.5 Rotor Lead-lag Time Histories, Rotor Speed Above Self Excited Region

Figura 2.10: Posição angular das pás em ROBINSON *et al.* [20] para o ponto acima da região de instabilidade (230 rad/s)

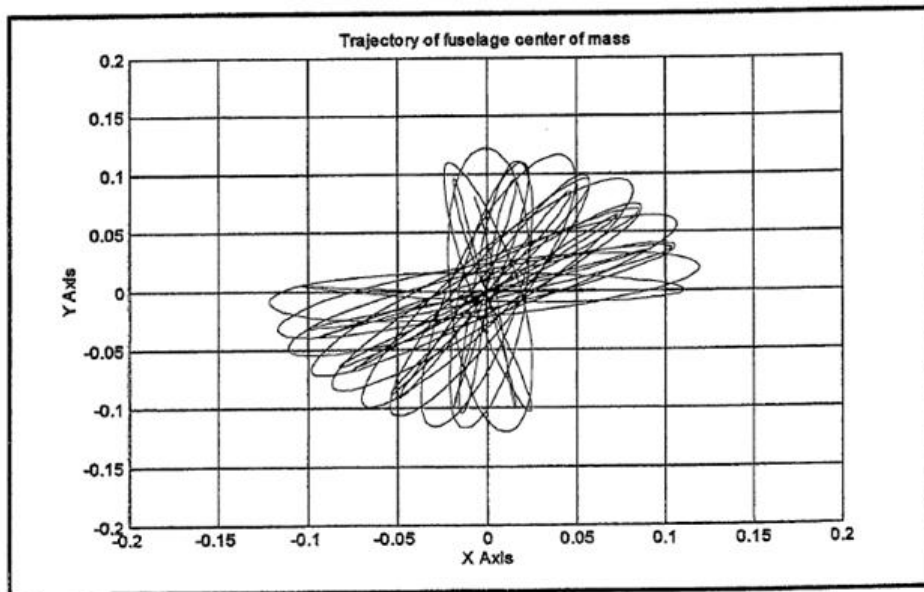


Figure 6.6 Fuselage Center of Mass Trajectory, Rotor Speed Above Self Excited Region

Figura 2.11: Posição do centro da cabeça do rotor em ROBINSON *et al.* [20] para o ponto acima da região de instabilidade (230 rad/s)

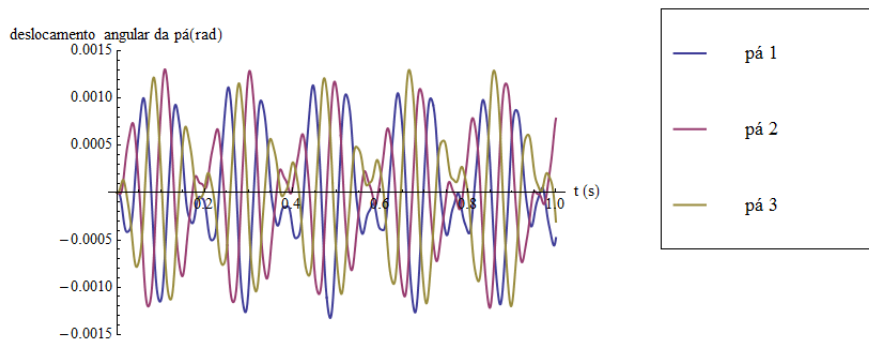


Figura 2.12: Posição angular das pás para o ponto acima da região de instabilidade (230 rad/s) considerando o modelo aqui desenvolvido

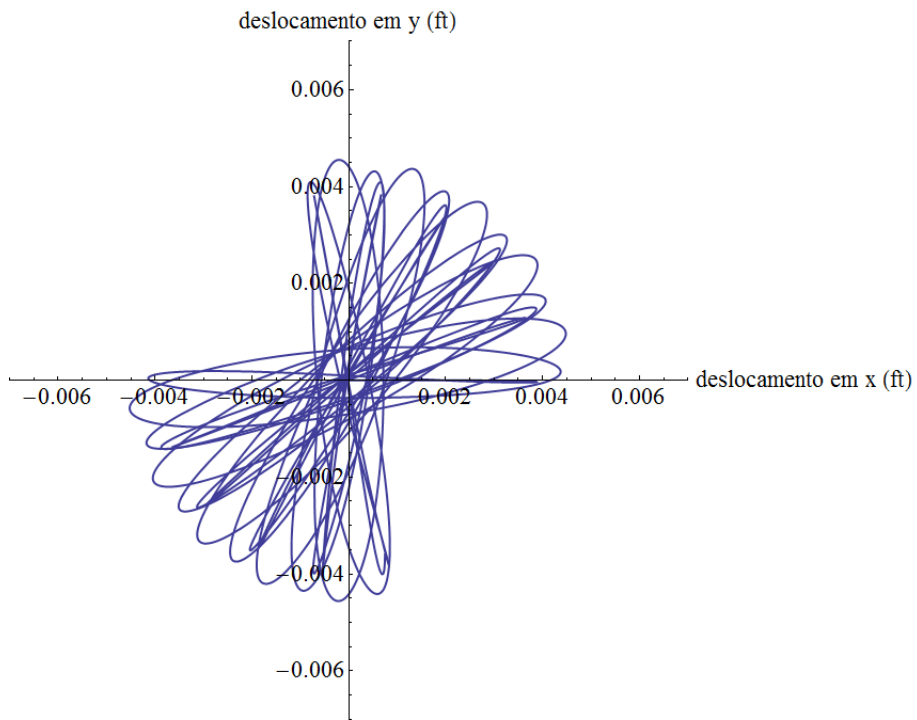


Figura 2.13: Posição do centro da cabeça do rotor para o ponto acima da região de instabilidade (230 rad/s) considerando o modelo aqui desenvolvido

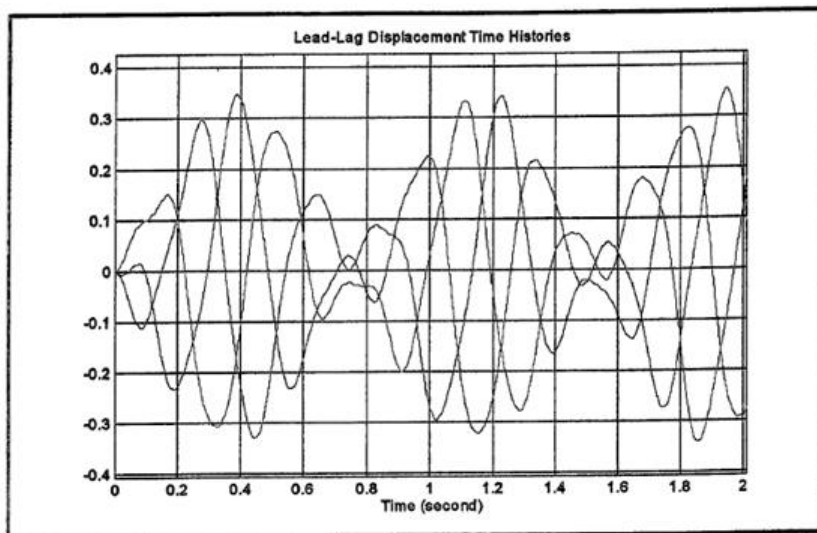


Figure 6.3 Rotor Lead-lag Time Histories, Rotor Speed Below Self Excited Region

Figura 2.14: Posição angular das pás em ROBINSON *et al.* [20] para o ponto abaixo da região de instabilidade (119.2 rad/s)

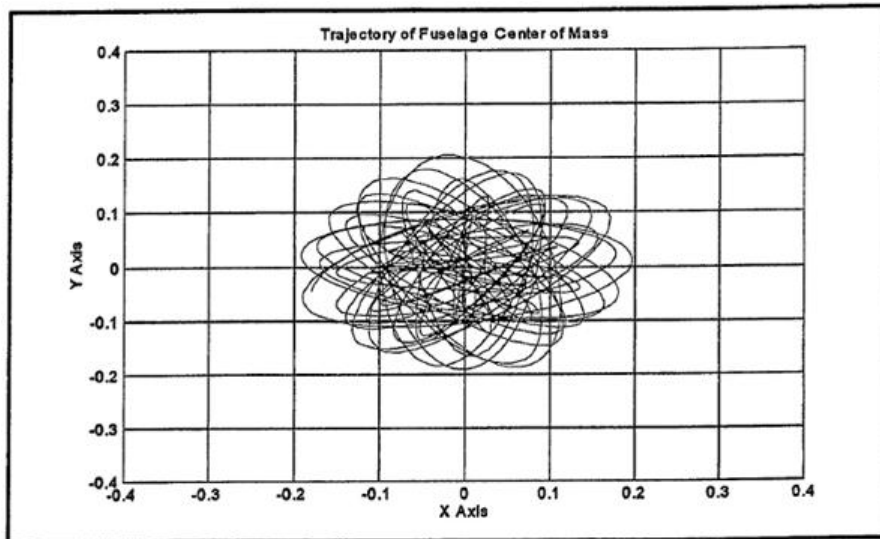


Figure 6.4 Fuselage Trajectory for Basic Parameter Settings, Rotor Speed Below Self Excited Region

Figura 2.15: Posição do centro da cabeça do rotor em ROBINSON *et al.* [20] para o ponto abaixo da região de instabilidade (119.2 rad/s)

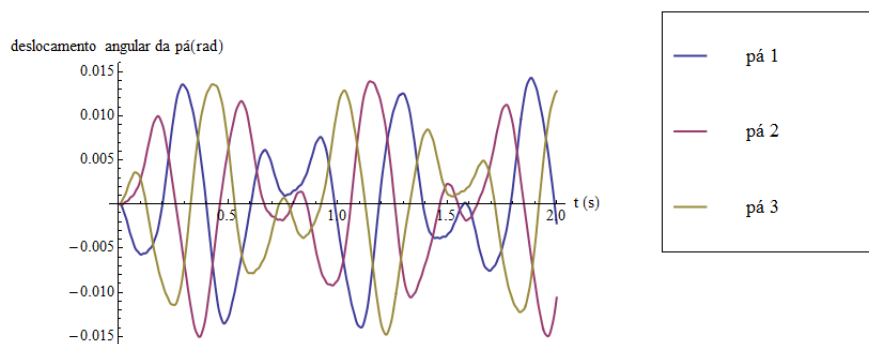


Figura 2.16: Posição angular das pás para o ponto abaixo da região de instabilidade (119.2 rad/s) considerando o modelo aqui desenvolvido

a partir do resultado da simulação das equações (2.8), (2.9) e (2.19) aqui desenvolvidas para a velocidade angular de 119.2 rad/s.

Percebemos que, apesar de os gráficos apresentarem o mesmo comportamento, mas valores diferentes. As figuras 2.11 e 2.15 não apresentam as unidades, o que pode indicar que alguma conversão foi realizada, sem ser explicitada. Já em relação aos gráficos de posição angular 2.5, 2.10 e 2.14 a unidade é indicada. No entanto, também considera-se que pode haver erro nos eixos dos gráficos, pois toda a programação foi revisada e não foi possível encontrar um motivo para a diferença.

Considera-se que, apesar da diferença numérica, as equações desenvolvidas são idênticas e os gráficos apresentam o mesmo comportamento, levando a conclusão que isto poderia indicar que ambas as formulações são equivalentes, podendo ter havido

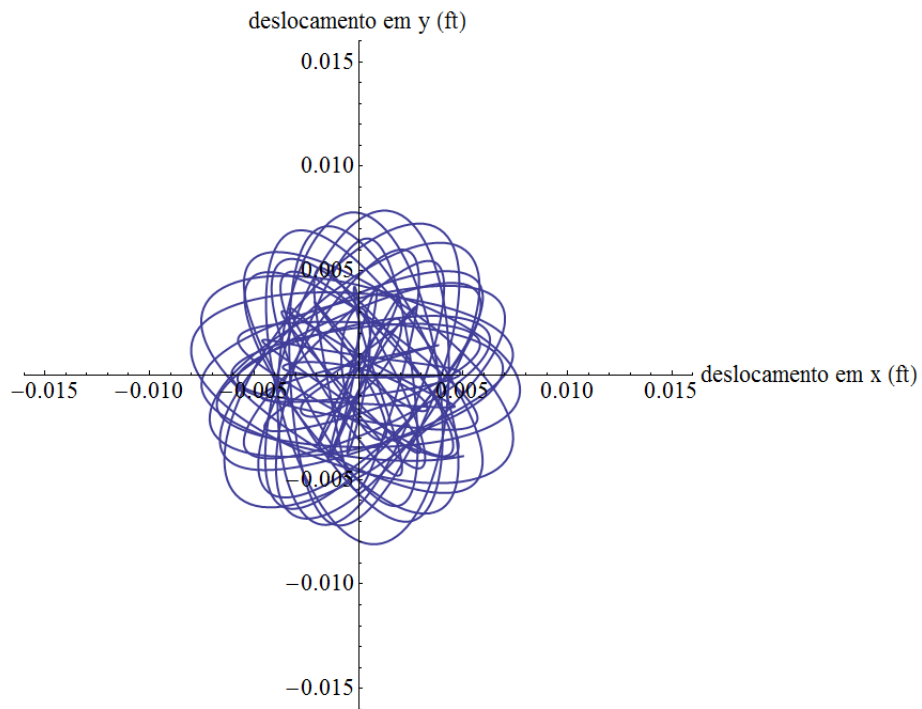


Figura 2.17: Posição do centro da cabeça do rotor para o ponto abaixo da região de instabilidade (119.2 rad/s) considerando o modelo aqui desenvolvido

algum equívoco quando da determinação dos rótulos dos gráficos no trabalho de ROBINSON *et al.* [20].

Capítulo 3

Modelagem considerando as pás como unidimensionais e rígidas

A modelagem da seção anterior foi baseada nas hipóteses adotadas por COLEMAN [9]. Esta se baseia na consideração de que as pás são massas puntuais. No entanto, sabemos que em um helicóptero real a massa é continuamente distribuída por suas pás. Podemos então adaptar o modelo desenvolvido para considerar a pá unidimensional e rígida, com a massa distribuída ao longo de seu comprimento.

3.1 Definição de hipóteses para a modelagem

Vamos adaptar a modelagem da seção anterior para considerar a massa da pá continuamente distribuída pelo seu comprimento, analisando as diferenças.

As demais considerações permanecem as mesmas.

3.2 Conservação da quantidade de movimento linear do sistema

A posição do centro de massa da cabeça do rotor permanece como na equação (2.1) da seção 2.2, assim como a posição do *link* da pá B_i permanece como na equação (2.2) da mesma seção. No entanto, a relação obtida para as pás devem ser alteradas.

Considerando a posição de um ponto P_i pertencente a uma das N pás, distando r do respectivo *link*, e definindo um ângulo $\beta_i(t)$, formado entre a posição da pá em repouso (rotacionada, mas com a mola sem tensão) e a posição real da mesma pá B_i , podemos escrever a posição do ponto P_i pertencente à pá B_i , em \mathfrak{R} , como:

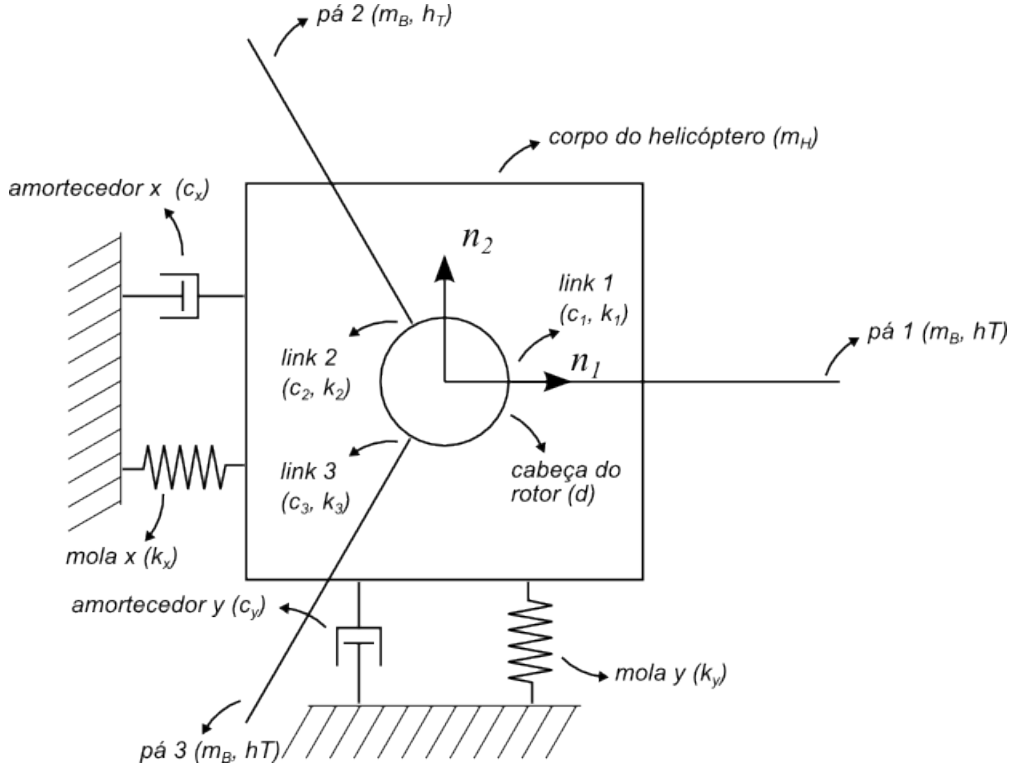


Figura 3.1: Representação gráfica da modelagem do sistema, considerando as pás como unidimensionais e rígidas

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^{P_i/O}(t) = & (x(t) + d \cos(\phi_i + \Omega t) + r \cos(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t))) \mathbf{n}_1 \\ & + (y(t) + d \sin(\phi_i + \Omega t) + r \sin(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t))) \mathbf{n}_2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

A partir das definições feitas acima, podemos encontrar a quantidade de movimento linear de uma pá B_i , que possui massa m_B e comprimento total h_T , a partir de:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} \mathbf{G}^{B_i} &= \int_{B_i} \mathfrak{R} \mathbf{v}^{P_i} dm = \frac{m_B}{h_T} \int_0^{h_T} \mathfrak{R} \mathbf{v}^{P_i} dr \\ \text{onde } \mathfrak{R} \mathbf{v}^{P_i} &= \frac{d}{dt} \mathbf{p}^{P_i/O} \end{aligned} \quad (3.2)$$

A quantidade de movimento linear da cabeça do rotor H também permanece como descrito na equação (2.5) da seção 2.2.

Desta forma, a quantidade de movimento linear total do sistema será:

$$\mathfrak{R} \mathbf{G}^T = \mathfrak{R} \mathbf{G}^H + \sum_{i=1}^N \mathfrak{R} \mathbf{G}^{B_i} = m_H \mathfrak{R} \mathbf{v}^{H*} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{m_B}{h_T} \int_0^{h_T} \mathfrak{R} \mathbf{v}^{P_i} dr \right) \quad (3.3)$$

Utilizamos então a 2ª lei de Newton, conforme a seguir:

$$\sum \mathbf{F}^{ext} = {}^{\Re} \dot{\mathbf{G}}^T \rightarrow (-c_x \dot{x}(t) - k_x x(t)) \mathbf{n}_1 + (-c_y \dot{y}(t) - k_y y(t)) \mathbf{n}_2 = \frac{{}^{\Re} d}{dt} \mathbf{G}^T \quad (3.4)$$

E finalmente, efetuando as manipulações necessárias, obtemos as duas primeiras equações de movimento:

$$(N m_B + m_H) \ddot{x}(t) + c_x \dot{x}(t) + k_x x(t) = m_B \frac{h_T}{2} \sum_{i=1}^N \left[\ddot{\beta}_i(t) \sin(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t)) + \left(\Omega + \dot{\beta}_i(t) \right)^2 \cos(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t)) \right] \quad (3.5)$$

$$(N m_B + m_H) \ddot{y}(t) + c_y \dot{y}(t) + k_y y(t) = - m_B \frac{h_T}{2} \sum_{i=1}^N \left[\ddot{\beta}_i(t) \cos(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t)) - \left(\Omega + \dot{\beta}_i(t) \right)^2 \sin(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t)) \right] \quad (3.6)$$

3.3 Conservação da quantidade de movimento angular das pás

Assim como na seção anterior, dado que obtivemos duas equações de um total de $N + 2$ graus de liberdade, precisamos obter outras N equações. Utilizaremos então a mesma estratégia: substituir o vínculo que conecta a pá à cabeça do rotor, ou seja, o *link* de cada uma das i pás, por forças e torques de reação. Desta forma, podemos calcular a conservação da quantidade de movimento angular de cada pá em relação ao *link* sem precisar conhecer as forças de reação. No entanto, antes calculamos a conservação da quantidade de movimento angular de um ponto fixo, enquanto agora calcularemos a quantidade de movimento angular de um corpo unidimensional.

Para isto, precisamos primeiro definir a posição do ponto P_i da pá B_i em relação ao respectivo *link* L_i como:

$$\mathbf{p}^{P_i/L_i} = \mathbf{p}^{P_i/O} - \mathbf{p}^{L_i/O} = (r \cos(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t))) \mathbf{n}_1 + (r \sin(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t))) \mathbf{n}_2 \quad (3.7)$$

E podemos calcular a quantidade de movimento angular da pá B_i com relação ao ponto L_i como:

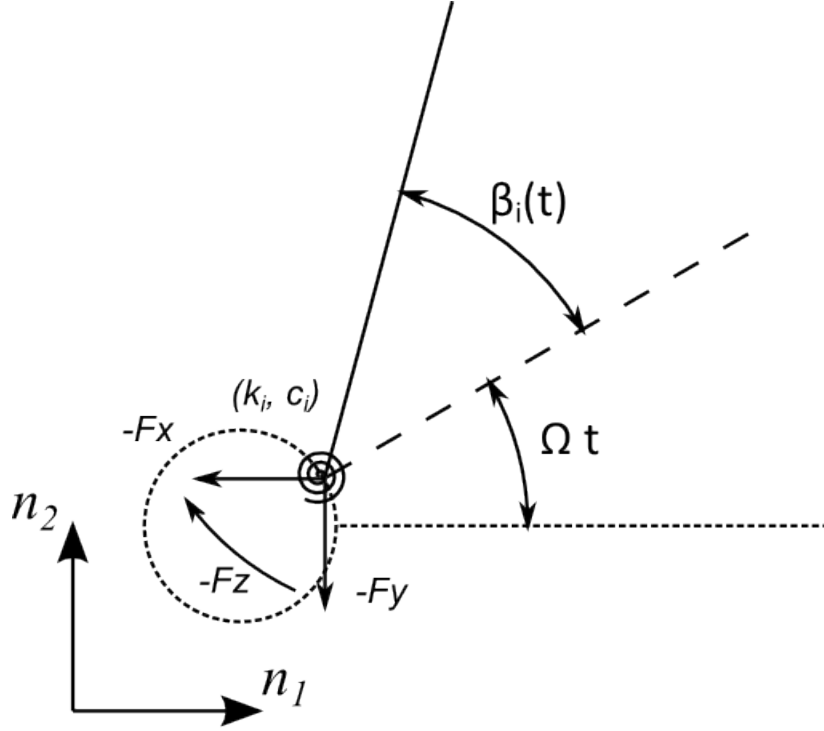


Figura 3.2: Modelagem do vínculo para a pá unidimensional rígida

$${}^{\mathfrak{R}}\mathbf{H}^{B_i/L_i} = \int_{B_i} \mathbf{p}^{P_i/L_i} \times {}^{\mathfrak{R}}\mathbf{v}^{P_i} dm = \frac{m_B}{h_T} \int_0^{h_T} \mathbf{p}^{P_i/L_i} \times {}^{\mathfrak{R}}\mathbf{v}^{P_i} dr \quad (3.8)$$

É importante repetir esta observação: o cálculo não se dá em referência a um ponto fixo no sistema inercial ou ao centro de massa, portanto é incorreto simplesmente derivar a expressão da quantidade de movimento angular da pá B_i em relação ao *link* L_i para obter sua taxa de variação em \mathfrak{R} .

Refeita esta observação, utilizaremos a relação obtida na equação (2.17) da seção 2.3:

$${}^{\mathfrak{R}}\dot{\mathbf{H}}^{P_i/L_i} + {}^{\mathfrak{R}}\mathbf{v}^{L_i} \times {}^{\mathfrak{R}}\mathbf{G}^{P_i} = \mathbf{M}^{\mathcal{F}_{ext}/L_i} \quad (3.9)$$

No entanto, na seção 2.3 o desenvolvimento foi realizado tendo em vista um ponto. Podemos integrar esta formulação para todos os pontos de uma pá B_i

$$\int_{B_i} {}^{\mathfrak{R}}\dot{\mathbf{H}}^{P_i/L_i} + {}^{\mathfrak{R}}\mathbf{v}^{L_i} \times \int_{B_i} {}^{\mathfrak{R}}\mathbf{G}^{P_i} = \int_{B_i} \mathbf{M}^{\mathcal{F}_{ext}/L_i} \quad (3.10)$$

e, desta forma, obtemos:

$${}^{\mathfrak{R}}\dot{\mathbf{H}}^{B_i/L_i} + {}^{\mathfrak{R}}\mathbf{v}^{L_i} \times {}^{\mathfrak{R}}\mathbf{G}^{B_i} = \sum \mathbf{M}^{\mathcal{F}_{ext}/L_i} \quad (3.11)$$

Ou, de forma mais específica para o problema sob estudo:

$$\begin{aligned}
\sum \mathbf{M}^{\mathcal{F}_{ext}/L_i} &= \mathfrak{R} \dot{\mathbf{H}}^{B_i/L_i} + \mathfrak{R} \mathbf{v}^{L_i} \times \int_{B_i} \mathfrak{R} \mathbf{v}^{P_i} dm \rightarrow \\
&- c_i \dot{\beta}_i(t) - k_i \beta_i(t) \mathbf{n}_3 = \frac{\mathfrak{R} d}{dt} \mathbf{H}^{B_i/L_i} + \frac{m_B}{h_T} \left(\mathfrak{R} \mathbf{v}^{L_i} \times \int_0^{h_T} \mathfrak{R} \mathbf{v}^{P_i} dr \right) \\
\text{onde } \mathbf{v}^{L_i} &= \frac{d \mathbf{p}^{L_i/O}}{dt}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Finalmente, efetuando as manipulações necessárias, obtemos as N equações de movimento que eram procuradas:

$$\begin{aligned}
m_B \frac{h_T^2}{3} \ddot{\beta}_i(t) + c_i \dot{\beta}_i(t) + k_i \beta_i(t) + m_B \Omega^2 d \frac{h_T}{2} \sin(\beta_i(t)) = \\
m_B \frac{h_T}{2} [\ddot{x}(t) \sin(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t)) - \ddot{y}(t) \cos(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t))] \tag{3.13}
\end{aligned}$$

3.4 Verificação e resultados

3.4.1 Verificação das equações

Utilizaremos novamente o modelo desenvolvido no artigo de FLOWERS e TONGUE [19], conforme contido no seção 2, para comparação. As equações (3.5), (3.6) e (3.13) serão comparadas com as equações (2.24), (2.25) e (2.26).

Comparando as equações (3.5) e (3.6) com as equações (2.24) e (2.25) podemos verificar que, além daquelas observações já feitas anteriormente, os termos relacionados ao comprimento da pá apresentam-se diferentes.

O comprimento da pá aparece no modelo desenvolvido por FLOWERS e TONGUE [19] (equações (2.24) e (2.25)) sem a divisão por dois que está presente no modelo aqui desenvolvido (equações (3.5) e (3.6)). Isto se deve a hipóteses diferentes adotadas no desenvolvimento de cada. O modelo de FLOWERS e TONGUE [19] considera que a pá pode ser representada como uma massa puntual localizada no seu centro de massa, enquanto aqui a massa da pá foi considerada continuamente distribuída ao longo de seu comprimento.

Desta forma, o que a princípio seria uma diferença no modelo não é de fato uma diferença, pois h_T em nosso modelo considera o comprimento da pá e R no modelo de FLOWERS e TONGUE [19] representa a metade do comprimento da pá. Se substituirmos h_T nas equações (3.5) e (3.6) aqui desenvolvidas pelo $2R$, estas se tornam equivalentes às equações (2.24) e (2.25) de FLOWERS e TONGUE [19].

Até o presente momento, os modelos poderiam ser considerados equivalentes,

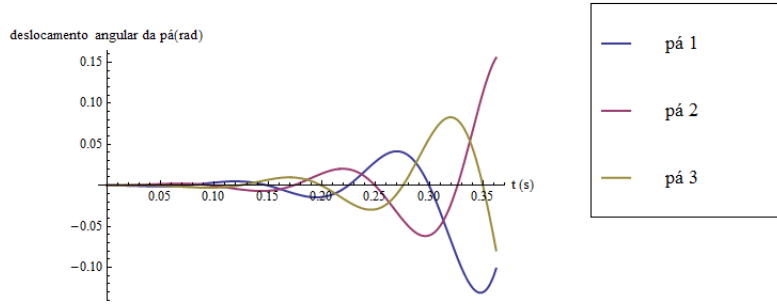


Figura 3.3: Posição angular das pás para o ponto central da região de instabilidade (170 rad/s) considerando o modelo de pás unidimensionais e rígidas

mas resta analisar a equação (3.13). Comparando a equação (3.13) com a equação (2.26) e desprezando as observações que já foram feitas anteriormente, resta somente uma diferença. Esta novamente se deve à diferença de hipóteses adotadas em relação a distribuição da massa da pá.

No entanto, diferentemente do que ocorreu nas primeiras duas equações comparadas, as duas considerações não se mostram equivalentes na equação. Se substituirmos h_T na equação aqui desenvolvida (3.13) pelo $2R$ das equações de FLOWERS e TONGUE [19] (2.26), esperaríamos obter R^2 no primeiro termo, como no modelo de FLOWERS e TONGUE [19], mas podemos verificar que feita a substituição em (3.13) obteremos no primeiro termo $\frac{4R^2}{3}$.

Tal fato nos permite diagnosticar que a consideração aqui adotada de massa continuamente distribuída ao longo da pá resulta em diferença nas equações do sistema de nosso modelo em relação às do modelo desenvolvido por FLOWERS e TONGUE [19]. É razoável supor que esta diferença se deve à inércia de rotação da pá.

Resta avaliar o quanto esta diferença literal representa nos resultados numéricos de cada modelagem.

3.4.2 Verificação quantitativa

Agora buscamos de fato simular a modelagem obtida, ou seja, simular as equações (3.5), (3.6) e (3.13) para os três casos anteriormente estudados: velocidade angular do rotor igual a 170 rad/s, 230 rad/s e 119.2 rad/s, e comparar os resultados com aqueles obtidos para as equações (2.8), (2.9) e (2.19).

Assim como na simulação numérica do modelo de pás pontuais, visando excitar o sistema, modelamos um impacto lateral na aeronave através de uma velocidade inicial lateral. Este impacto inicial excitará o sistema e permitirá a identificação das frequências de ressonância.

Comparando as figuras 3.3 e 3.4 com as figuras 2.7 e 2.8, percebemos que ambas

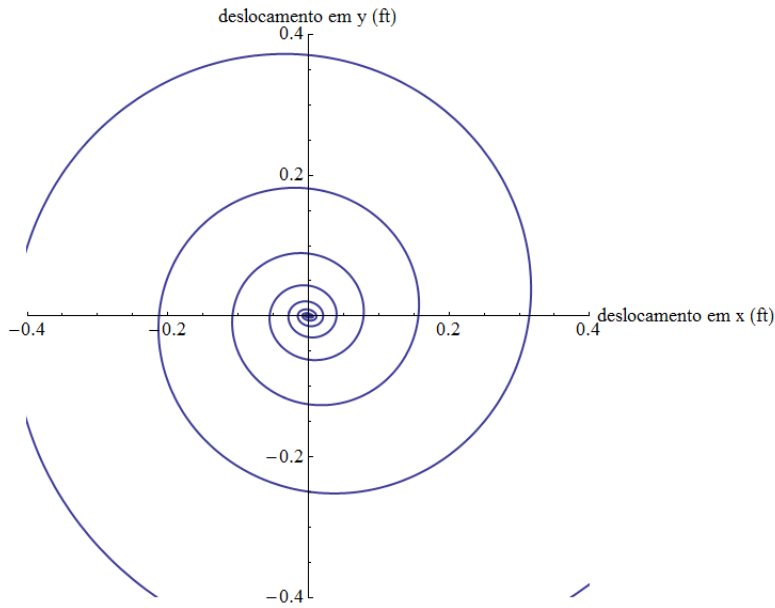


Figura 3.4: Posição do centro da cabeça do rotor para o ponto central da região de instabilidade (170 rad/s) considerando o modelo de pás unidimensionais e rígidas

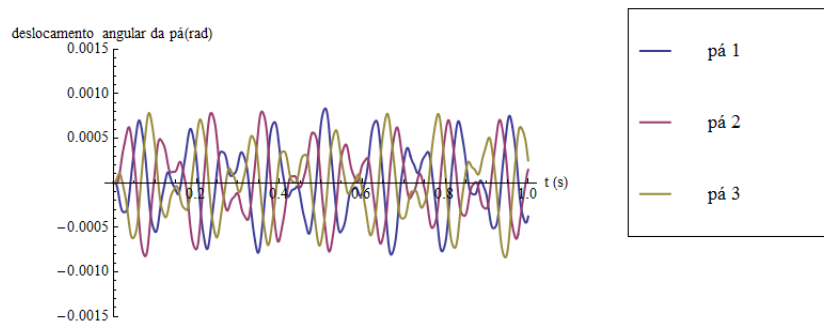


Figura 3.5: Posição angular das pás para o ponto acima da região de instabilidade (230 rad/s) considerando o modelo de pás unidimensionais e rígidas

as modelagens, com pás pontuais e pás unidimensionais, apresentam instabilidade neste ponto. Contudo, tanto a posição angular das pás quanto o deslocamento do centro da cabeça do rotor apresentam valores de amplitude aproximadamente 20% superiores na modelagem de pás unidimensionais quando em comparação com a modelagem de pás pontuais, além de apresentar uma ligeira modificação na frequência de oscilação.

Em seguida, comparando as figuras 3.5 e 3.6 com as figuras 2.12 e 2.13, percebemos que ambas as modelagens, com pás pontuais e pás unidimensionais, apresentam estabilidade neste ponto. Tanto a posição angular das pás quanto o deslocamento do centro da cabeça do rotor apresentam valores de amplitude muito pequenos. No entanto, as curvas apresentam características ligeiramente diferentes.

Por último, comparando as figuras 3.7 e 3.8 com as figuras 2.16 e 2.17, percebe-

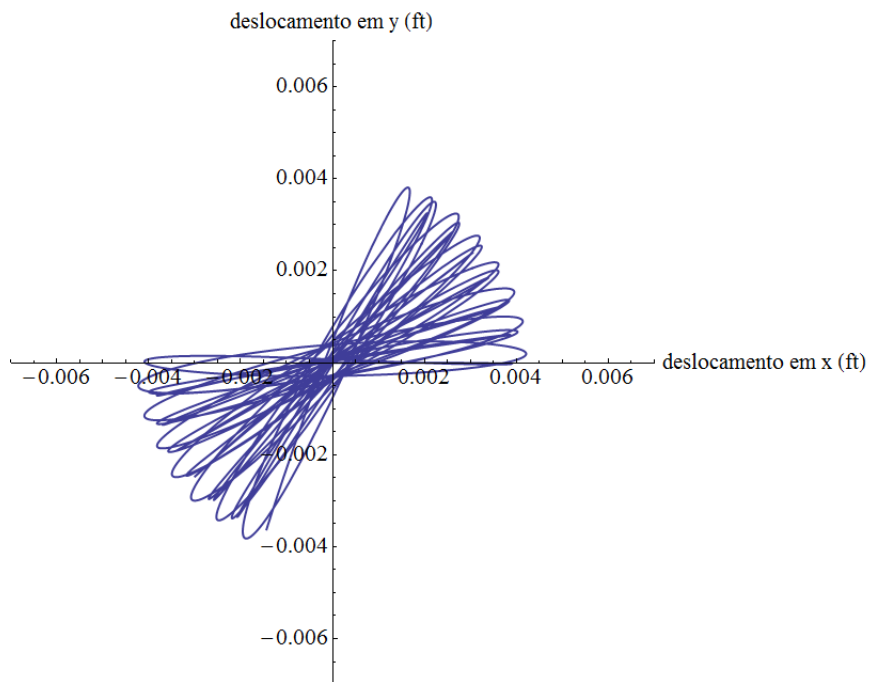


Figura 3.6: Posição do centro da cabeça do rotor para o ponto acima da região de instabilidade (230 rad/s) considerando o modelo de pás unidimensionais e rígidas

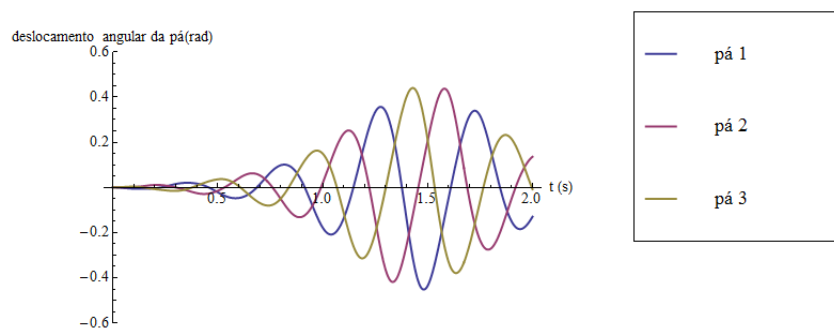


Figura 3.7: Posição angular das pás para o ponto abaixo da região de instabilidade (119.2 rad/s) considerando o modelo de pás unidimensionais e rígidas

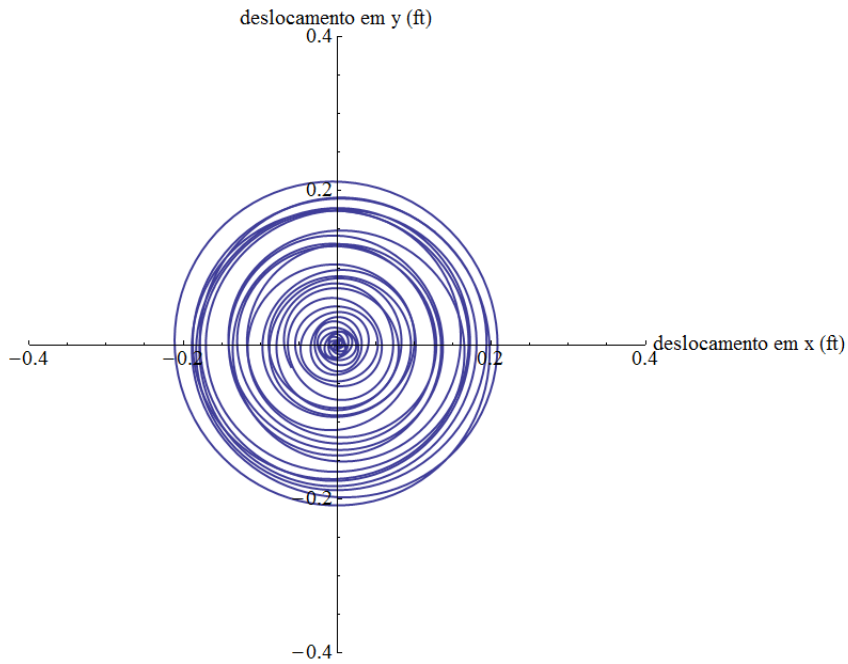


Figura 3.8: Posição do centro da cabeça do rotor para o ponto abaixo da região de instabilidade (119.2 rad/s) considerando o modelo de pás unidimensionais e rígidas

mos que ambas as modelagens, com pás pontuais e pás unidimensionais, apresentam se no limiar da instabilidade neste ponto, apresentando batimento. Contudo, tanto a posição angular das pás quanto o deslocamento do centro da cabeça do rotor apresentam valores de amplitude aproximadamente 2.000% superiores na modelagem de pás unidimensionais quando em comparação com a modelagem de pás pontuais.

Capítulo 4

Modelagem considerando excentricidade, gravidade e pás bidimensionais - visando turbinas eólicas

Em vista da dificuldade encontrada para obter artigos relacionados a ressonância de solo de helicópteros, em parte devido à não assinatura e disponibilização pela CAPES de jornais dedicados à indústria aeronáutica, e por outro lado reforçada pela greve que atingiu a biblioteca da UFRJ e prejudicou a procura por artigos em bibliotecas filiadas ao COMUT, adotou-se outra estratégia.

Pode-se considerar que a questão da ressonância de solo contém aspectos semelhantes ao problema da vibração de turbinas eólicas. Desta forma, buscou-se artigos com esta motivação e que contivessem resultados experimentais para comparação.

A tese de doutorado desenvolvida por SARACHO [22] e o artigo de SANTOS *et al.* [23], desenvolvido a partir dos resultados daquela tese, foram considerados ideais para este estudo.

No entanto, os trabalhos de SARACHO [22] e SANTOS *et al.* [23] apresentam algumas diferenças nas hipóteses adotadas para a elaboração do modelo. As pás são modeladas como vigas de Euler-Bernoulli com massas posicionadas em suas extremidades livres. Não se considera, em relação à viga, forças de cisalhamento, inércia de rotação ou massa distribuída. No entanto, o modelo considera a massa distribuída das massas localizadas nas pontas das vigas e, portanto, a inércia de rotação não pode ser negligenciada. Aquele trabalho considera somente o primeiro modo de vibração da viga.

Portanto, a modelagem desenvolvida na seção anterior para ressonância de solo em helicópteros precisa ser adaptada, por ter sido elaborada sobre hipóteses dife-

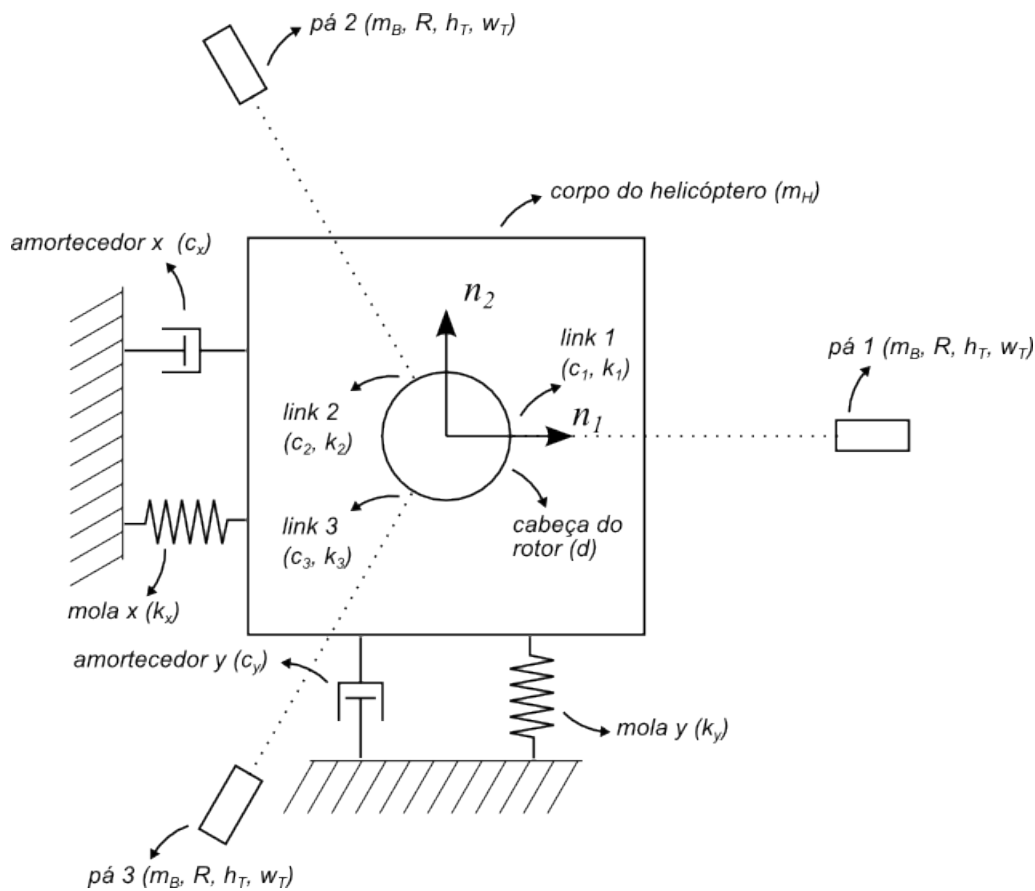


Figura 4.1: Representação gráfica da modelagem do sistema, considerando pás bi-dimensionais

rentes.

Além disso, considerou-se que esta era uma boa oportunidade para, a partir de uma estratégia diferente, verificar se obteríamos as mesmas equações.

4.1 Definição de hipóteses para a modelagem

Iremos neste terceiro e último modelo alterar as considerações feitas anteriormente para adaptar a modelagem à turbinas eólicas. Antes, considerou-se que as massas das pás podem ser consideradas massas puntuais ou unidimensionais e rígidas. No entanto, podemos expandir o modelo para abranger pás bidimensionais rígidas e considerar ainda a existência de excentricidade. Precisamos também adaptar o modelo desenvolvido para considerar a ação da gravidade, ou seja, o peso das pás. A consideração do peso das pás se faz necessária pelo posicionamento vertical das turbinas eólicas.

As demais considerações permanecem as mesmas.

4.2 Conservação da quantidade de movimento linear do sistema

Considerando uma base $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2\}$ fixa no referencial inercial \mathfrak{R} e um sistema de coordenadas cartesiano com origem no centro geométrico da cabeça do rotor, conforme a figura anterior, quando na posição neutra, ou seja, quando as molas não estão tensionadas, podemos escrever a posição do centro de massa da cabeça do rotor (H^*) em relação à origem (O) do sistema de coordenadas como:

$$\mathbf{p}^{H^*/O}(t) = x(t) + e \cos(\epsilon + \Omega t) \mathbf{n}_1 + y(t) + e \sin(\epsilon + \Omega t) \mathbf{n}_2 \quad (4.1)$$

Considerando que o conjunto rotor gira com velocidade angular constante igual a Ω , que cada uma das pás possui uma fase, ou azimute, igual a $\phi_i = (i - 1) \times \frac{2\pi}{N}$ (onde N é o número de pás do rotor) e que cada um dos N *links* dista d da origem, podemos então escrever a posição do ponto L_i (posição do *link* da pá B_i em \mathfrak{R}) como:

$$\mathbf{p}^{L_i/O}(t) = (x(t) + d \cos(\phi_i + \Omega t)) \mathbf{n}_1 + (y(t) + d \sin(\phi_i + \Omega t)) \mathbf{n}_2 \quad (4.2)$$

Conforme vimos anteriormente, a quantidade de movimento linear total do sistema pode ser escrita como:

$${}^{\mathfrak{R}}\mathbf{G}^T = {}^{\mathfrak{R}}\mathbf{G}^H + \sum_{i=1}^N {}^{\mathfrak{R}}\mathbf{G}^{B_i} = m_H {}^{\mathfrak{R}}\mathbf{v}^{H^*} + \sum_{i=1}^N \left(\int_{B_i} {}^{\mathfrak{R}}\mathbf{v}^{P_i} dm \right) \quad (4.3)$$

A partir da definição de centro de massa para uma pá B_i

$$\mathbf{p}^{B_i^*/O} = \frac{1}{m_B} \int_{B_i} \mathbf{p}^{P_i/O} dm \rightarrow \int_{B_i} \mathbf{p}^{P_i/O} dm = m_B \mathbf{p}^{B_i^*/O}, \quad (4.4)$$

podemos aplicar a derivada temporal para obter

$$\frac{{}^{\mathfrak{R}}d}{dt} \int_{B_i} \mathbf{p}^{P_i/O} dm = m_B \frac{{}^{\mathfrak{R}}d}{dt} \mathbf{p}^{B_i^*/O} \rightarrow \int_{B_i} {}^{\mathfrak{R}}\mathbf{v}^{P_i} dm = m_B {}^{\mathfrak{R}}\mathbf{v}^{B_i^*}, \quad (4.5)$$

Desta forma, a quantidade de movimento linear total do sistema será:

$$\begin{aligned} {}^{\mathfrak{R}}\mathbf{G}^T &= {}^{\mathfrak{R}}\mathbf{G}^H + \sum_{i=1}^N {}^{\mathfrak{R}}\mathbf{G}^{B_i} = m_H {}^{\mathfrak{R}}\mathbf{v}^{H^*} + \sum_{i=1}^N (m_B {}^{\mathfrak{R}}\mathbf{v}^{B_i^*}) \\ &= m_H {}^{\mathfrak{R}}\mathbf{v}^{H^*} + N m_B \sum_{i=1}^N ({}^{\mathfrak{R}}\mathbf{v}^{B_i^*}) \end{aligned} \quad (4.6)$$

A posição do centro de massa de uma pá B_i pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^{B_i^*/O}(t) = & (x(t) + d \cos(\phi_i + \Omega t) + (L + \frac{h_T}{2}) \cos(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t))) \mathbf{n}_1 \\ & + (y(t) + d \sin(\phi_i + \Omega t) + (L + \frac{h_T}{2}) \sin(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t))) \mathbf{n}_2 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Podemos então utilizar a 2ª lei de Newton, conforme a seguir:

$$\sum \mathbf{F}^{ext} = {}^{\Re} \dot{\mathbf{G}}^T \rightarrow (-c_x \dot{x}(t) - k_x x(t)) \mathbf{n}_1 + (-c_y \dot{y}(t) - k_y y(t)) \mathbf{n}_2 = \frac{{}^{\Re} d}{dt} \mathbf{G}^T \quad (4.8)$$

E finalmente, efetuando as manipulações necessárias, obtemos as duas primeiras equações de movimento:

$$\begin{aligned} (N m_B + m_H) \ddot{x}(t) + c_x \dot{x}(t) + k_x x(t) = e m_H \Omega^2 \cos(\epsilon + \Omega t) + \\ + m_B (L + \frac{h_T}{2}) \sum_{i=1}^N \left[\ddot{\beta}_i(t) \sin(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t)) + \left(\Omega + \dot{\beta}_i(t) \right)^2 \cos(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t)) \right] \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} (N m_B + m_H) \ddot{y}(t) + c_y \dot{y}(t) + k_y y(t) = e m_H \Omega^2 \sin(\epsilon + \Omega t) + \\ - m_B (L + \frac{h_T}{2}) \sum_{i=1}^N \left[\ddot{\beta}_i(t) \cos(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t)) - \left(\Omega + \dot{\beta}_i(t) \right)^2 \sin(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t)) \right] \end{aligned} \quad (4.10)$$

4.2.1 Considerando a inclusão da gravidade

Conforme citado anteriormente, uma diferença importante entre a modelagem para helicópteros e turbinas eólicas resulta do fato de que naquele o rotor encontra-se na horizontal e neste o rotor encontra-se na vertical.

Isto faz com que a gravidade tenha de ser incluída no modelo aqui desenvolvido para possibilitar a comparação com o estudo de SANTOS *et al.* [23].

A gravidade é inserida na equação (4.8), no termo das forças externas $\sum \mathbf{F}^{ext}$.

A força externa gerada pela ação do peso da pá pode ser calculada a partir de seu centro geométrico. Desta forma, o somatório dos momentos externos em relação a L_i pode ser escrito como:

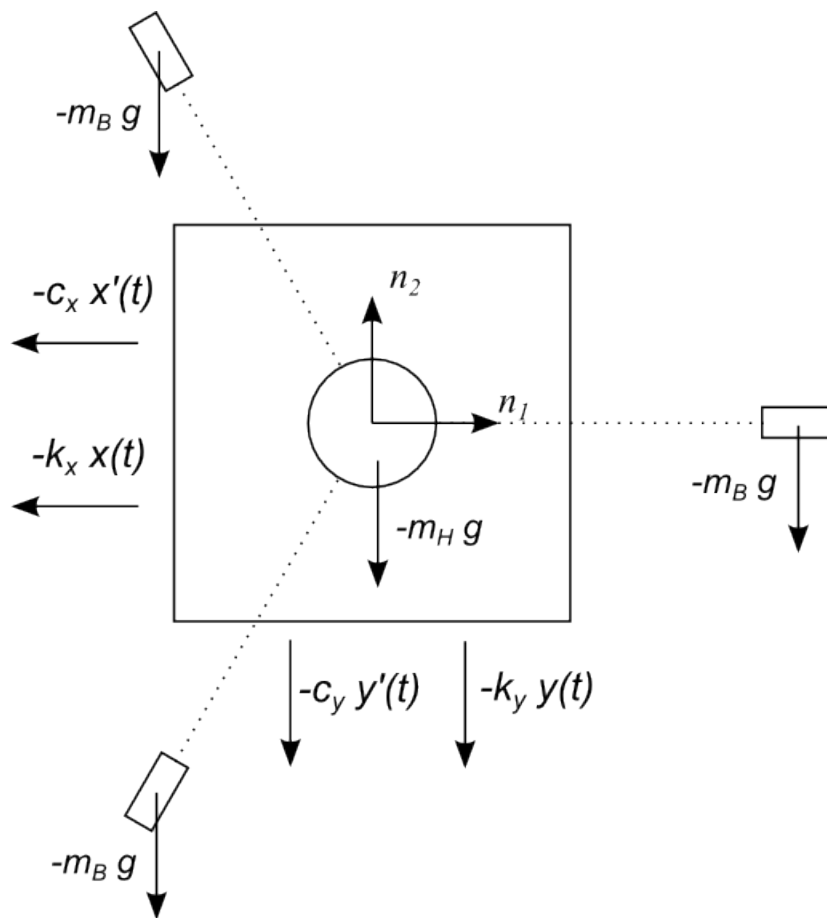


Figura 4.2: Representação gráfica da modelagem das forças externas

$$\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = (-c_x \dot{x}(t) - k_x x(t)) \mathbf{n}_1 + (-c_y \dot{y}(t) - k_y y(t) - (N m_B + m_H) g) \mathbf{n}_2 \quad (4.11)$$

E desta forma as equações tornam-se:

$$\begin{aligned} (N m_B + m_H) \ddot{x}(t) + c_x \dot{x}(t) + k_x x(t) &= e m_H \Omega^2 \cos(\epsilon + \Omega t) + \\ + m_B (L + \frac{h_T}{2}) \sum_{i=1}^N &\left[\ddot{\beta}_i(t) \sin(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t)) + \left(\Omega + \dot{\beta}_i(t) \right)^2 \cos(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t)) \right] \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} (N m_B + m_H) \ddot{y}(t) + c_y \dot{y}(t) + k_y y(t) + (N m_B + m_H) g &= e m_H \Omega^2 \sin(\epsilon + \Omega t) + \\ - m_B (L + \frac{h_T}{2}) \sum_{i=1}^N &\left[\ddot{\beta}_i(t) \cos(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t)) - \left(\Omega + \dot{\beta}_i(t) \right)^2 \sin(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t)) \right] \end{aligned} \quad (4.13)$$

4.3 Conservação da quantidade de movimento angular das pás

Conforme visto anteriormente, a quantidade de movimento angular de uma pá B_i com respeito a um ponto L_i pode ser escrita como:

$${}^{\mathfrak{R}}\mathbf{H}^{B_i/L_i} = \int_{B_i} \mathbf{p}^{P_i/L_i} \times {}^{\mathfrak{R}}\mathbf{v}^{P_i} dm, \quad (4.14)$$

onde \mathbf{p}^{P_i/L_i} é o vetor posição de um ponto p de uma pá B_i com respeito ao ponto L_i . Sendo B_i um corpo rígido, a velocidade de um ponto p de B_i pode ser escrito como:

$${}^{\mathfrak{R}}\mathbf{v}^{P_i} = {}^{\mathfrak{R}}\mathbf{v}^{L_i} + {}^{\mathfrak{R}}\boldsymbol{\omega}^{B_i} \times \mathbf{p}^{P_i/L_i} \quad (4.15)$$

onde ${}^{\mathfrak{R}}\boldsymbol{\omega}^{B_i}$ é a velocidade angular da pá B_i em R , ou $(\Omega + \dot{\beta}_i) \mathbf{n}_3$ conforme definimos anteriormente.

Sendo assim, a quantidade de movimento angular pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
{}^{\mathfrak{R}}\mathbf{H}^{B_i/L_i} &= \int_{B_i} \mathbf{p}^{P_i/L_i} \times ({}^{\mathfrak{R}}\mathbf{v}^{L_i} + {}^{\mathfrak{R}}\boldsymbol{\omega}^{B_i} \times \mathbf{p}^{P_i/L_i}) dm \\
&= \int_{B_i} \mathbf{p}^{P_i/L_i} \times {}^{\mathfrak{R}}\mathbf{v}^{L_i} dm + \int_{B_i} \mathbf{p}^{P_i/L_i} \times ({}^{\mathfrak{R}}\boldsymbol{\omega}^{B_i} \times \mathbf{p}^{P_i/L_i}) dm.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Utilizando a definição de centro de massa, em relação a um ponto L_i ,

$$\mathbf{p}^{B_i^*/L_i} = \frac{1}{m} \int_{B_i} \mathbf{p}^{P_i/L_i} dm \rightarrow \int_{B_i} \mathbf{p}^{P_i/L_i} dm = m \mathbf{p}^{B_i^*/L_i}, \tag{4.17}$$

temos que

$$\int_{B_i} \mathbf{p}^{P_i/L_i} \times {}^{\mathfrak{R}}\mathbf{v}^{L_i} dm = \int_{B_i} \mathbf{p}^{P_i/L_i} dm \times {}^{\mathfrak{R}}\mathbf{v}^{L_i} = m \mathbf{p}^{B_i^*/L_i} \times {}^{\mathfrak{R}}\mathbf{v}^{L_i} = \mathbf{p}^{B_i^*/L_i} \times m {}^{\mathfrak{R}}\mathbf{v}^{L_i}. \tag{4.18}$$

Ainda, sabendo que o vetor de inércia de uma pá B_i com relação a um ponto L_i em uma direção n é definido como o produto do tensor de inércia de B_i com relação a L_i pelo unitário n , ou seja, que $\mathbf{I}_n^{B_i/L_i} = \mathbf{I}^{B_i/L_i} \cdot \mathbf{n}$, e sendo \mathbf{n} um vetor unitário com a mesma direção de $\boldsymbol{\omega}$ (no caso, \mathbf{n}_3), podemos utilizar a seguinte relação:

$$\begin{aligned}
\int_{B_i} \mathbf{p}^{P_i/L_i} \times ({}^{\mathfrak{R}}\boldsymbol{\omega}^{B_i} \times \mathbf{p}^{P_i/L_i}) dm &= \int_{B_i} \mathbf{p}^{P_i/L_i} \times ((\boldsymbol{\omega} \mathbf{n}^{B_i}) \times \mathbf{p}^{P_i/L_i}) dm \\
&= \boldsymbol{\omega} \int_{B_i} \mathbf{p}^{P_i/L_i} \times (\mathbf{n}^{B_i} \times \mathbf{p}^{P_i/L_i}) dm \\
&= \boldsymbol{\omega} \mathbf{I}_n^{B_i/L_i} \\
&= \boldsymbol{\omega} \mathbf{I}^{B_i/L_i} \cdot \mathbf{n} \\
&= \mathbf{I}^{B_i/L_i} \cdot \boldsymbol{\omega} \mathbf{n} \\
&= \mathbf{I}^{B_i/L_i} \cdot {}^{\mathfrak{R}}\boldsymbol{\omega}^{B_i}.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Reunindo-se então os termos desenvolvidos acima, podemos reescrever o vetor quantidade de movimento angular segundo a seguinte expressão:

$${}^{\mathfrak{R}}\mathbf{H}^{B_i/L_i} = \mathbb{I}^{B_i/L_i} \cdot {}^{\mathfrak{R}}\boldsymbol{\omega}^{B_i} + \mathbf{p}^{B_i^*/L_i} \times m {}^{\mathfrak{R}}\mathbf{v}^{L_i}. \tag{4.20}$$

Conforme visto na seção 2.3, se tomarmos momentos com relação a um ponto móvel no referencial inercial, desde que não se trate do centro de inércia do corpo, como o ponto L_i , a equação de movimento para um corpo, no caso para uma pá B_i que se move em um referencial inercial assume a forma:

$$\sum \mathbf{M}^{\mathcal{F}_{ext}/L_i} = {}^{\mathfrak{R}}\dot{\mathbf{H}}^{B_i/L_i} + {}^{\mathfrak{R}}\mathbf{v}^{L_i} \times {}^{\mathfrak{R}}\mathbf{G}^{L_i} \tag{4.21}$$

Para obtermos a derivada temporal da quantidade de movimento angular em \mathfrak{R} devemos transpor a derivada temporal em \mathfrak{R} para a derivada temporal em B_i , de tal forma que o tensor de inércia seja invariante. Isto se dá pois o tensor de inércia do corpo considera a posição de pontos genéricos do corpo em relação a um ponto de referência para o tensor de inércia, fixo no corpo. Desta forma, a taxa de variação do tensor de inércia de um corpo em relação a um referencial fixo no próprio corpo é igual a zero. Podemos então obter a taxa de variação da quantidade de movimento angular do corpo da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}\dot{\mathbf{H}}^{B_i/L_i} &= \frac{\mathfrak{R}}{dt} \mathfrak{R}\mathbf{H}^{B_i/L_i} \\ &= \frac{B_i}{dt} \mathfrak{R}\mathbf{H}^{B_i/L_i} + \mathfrak{R}\boldsymbol{\omega}^{B_i} \times \mathfrak{R}\mathbf{H}^{B_i/L_i} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Substituindo uma equação na outra, chegamos a:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}\dot{\mathbf{H}}^{B_i/L_i} &= \frac{B_i}{dt} \left(\mathbb{I}^{B_i/L_i} \cdot \mathfrak{R}\boldsymbol{\omega}^{B_i} + \mathbf{p}^{B_i^*/L_i} \times m \mathfrak{R}\mathbf{v}^{L_i} \right) + \\ &+ \mathfrak{R}\boldsymbol{\omega}^{B_i} \times \left(\mathbb{I}^{B_i/L_i} \cdot \mathfrak{R}\boldsymbol{\omega}^{B_i} + \mathbf{p}^{B_i^*/L_i} \times m \mathfrak{R}\mathbf{v}^{L_i} \right). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Cabe observar que a derivada do vetor posição $\mathbf{p}^{B_i^*/L_i}$ em relação ao referencial fixo em B_i também é igual a zero. Obtemos então uma expressão para a taxa de variação da quantidade de movimento angular de uma pá B_i em torno de um ponto L_i :

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}\dot{\mathbf{H}}^{B_i/L_i} &= \mathbb{I}^{B_i/L_i} \cdot \mathfrak{R}\boldsymbol{\alpha}^{B_i} + \mathbf{p}^{B_i^*/L_i} \times m \mathfrak{R}\mathbf{a}^{L_i} + \\ &+ \mathfrak{R}\boldsymbol{\omega}^{B_i} \times \mathbb{I}^{B_i/L_i} \cdot \mathfrak{R}\boldsymbol{\omega}^{B_i} + \mathfrak{R}\boldsymbol{\omega}^{B_i} \times \mathbf{p}^{B_i^*/L_i} \times m \mathfrak{R}\mathbf{v}^{L_i}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Finalmente, obtemos a equação de movimento para uma pá B_i se movendo num referencial inercial da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{M}^{\mathcal{F}_{ext}/L_i} &= \mathbb{I}^{B_i/L_i} \cdot \mathfrak{R}\boldsymbol{\alpha}^{B_i} + \mathbf{p}^{B_i^*/L_i} \times m \mathfrak{R}\mathbf{a}^{L_i} + \\ &\mathfrak{R}\boldsymbol{\omega}^{B_i} \times \mathbb{I}^{B_i/L_i} \cdot \mathfrak{R}\boldsymbol{\omega}^{B_i} + \mathfrak{R}\boldsymbol{\omega}^{B_i} \times \mathbf{p}^{B_i^*/L_i} \times m \mathfrak{R}\mathbf{v}^{L_i} + \mathfrak{R}\mathbf{v}^{L_i} \times \mathfrak{R}\mathbf{G}^{L_i} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Devemos então desenvolver o tensor de inércia de uma pá B_i em relação a L_i , expresso no referencial fixo em B_i . Conhecemos os momentos de inércia de um sólido paralelepípedo retangular em relação ao seu centro de massa. Definindo que o paralelepípedo considerado possui altura h_t , largura w_t e profundidade desprezível.

Dessa forma, sabemos que seus momentos de inércia com relação ao centro de massa são:

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_{11}^* &= \frac{m_B h_t^2}{12} \\
\mathbf{I}_{22}^* &= \frac{m_B w_t^2}{12} \\
\mathbf{I}_{33}^* &= \frac{m_B (h_t^2 + w_t^2)}{12} \\
\mathbf{I}_{12}^* &= \mathbf{I}_{23}^* = \mathbf{I}_{31}^* = 0
\end{aligned} \tag{4.26}$$

A partir daí, basta utilizar as relações de transposição de momentos de inércia de um corpo com respeito a dois eixos paralelos, passando um deles pelo centro de massa do corpo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_{11}^{L_i} &= \mathbf{I}_{11}^* + m_B (p_2^{*2} + p_3^{*2}) \\
\mathbf{I}_{22}^{L_i} &= \mathbf{I}_{22}^* + m_B (p_3^{*2} + p_1^{*2}) \\
\mathbf{I}_{33}^{L_i} &= \mathbf{I}_{33}^* + m_B (p_1^{*2} + p_2^{*2}) \\
\mathbf{I}_{12}^{L_i} &= \mathbf{I}_{12}^* - m_B p_1^* p_2^* \\
\mathbf{I}_{23}^{L_i} &= \mathbf{I}_{23}^* - m_B p_2^* p_3^* \\
\mathbf{I}_{31}^{L_i} &= \mathbf{I}_{31}^* - m_B p_3^* p_1^*
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Sabendo que $p_1^* = p_3^* = 0$ e $p_2^* = R + \frac{h_t}{2}$, temos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_{11}^{L_i} &= m_B \left(\frac{h_t^2}{12} + \left(R + \frac{h_t}{2} \right)^2 \right) \\
\mathbf{I}_{22}^{L_i} &= m_B \frac{w_t^2}{12} \\
\mathbf{I}_{33}^{L_i} &= m_B \left(\frac{(h_t^2 + w_t^2)}{12} + \left(R + \frac{h_t}{2} \right)^2 \right) \\
\mathbf{I}_{12}^{L_i} &= \mathbf{I}_{23}^{L_i} = \mathbf{I}_{31}^{L_i} = 0
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Dessa forma, o tensor de inércia para uma pá B_i em relação ao seu respectivo *link* L_i é escrito como:

$$m_B \begin{pmatrix} \frac{h_t^2}{12} + \left(R + \frac{h_t}{2} \right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{w_t^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(h_t^2 + w_t^2)}{12} + \left(R + \frac{h_t}{2} \right)^2 \end{pmatrix} \tag{4.29}$$

Com o tensor de inércia desenvolvido acima e utilizando a equação de movimento

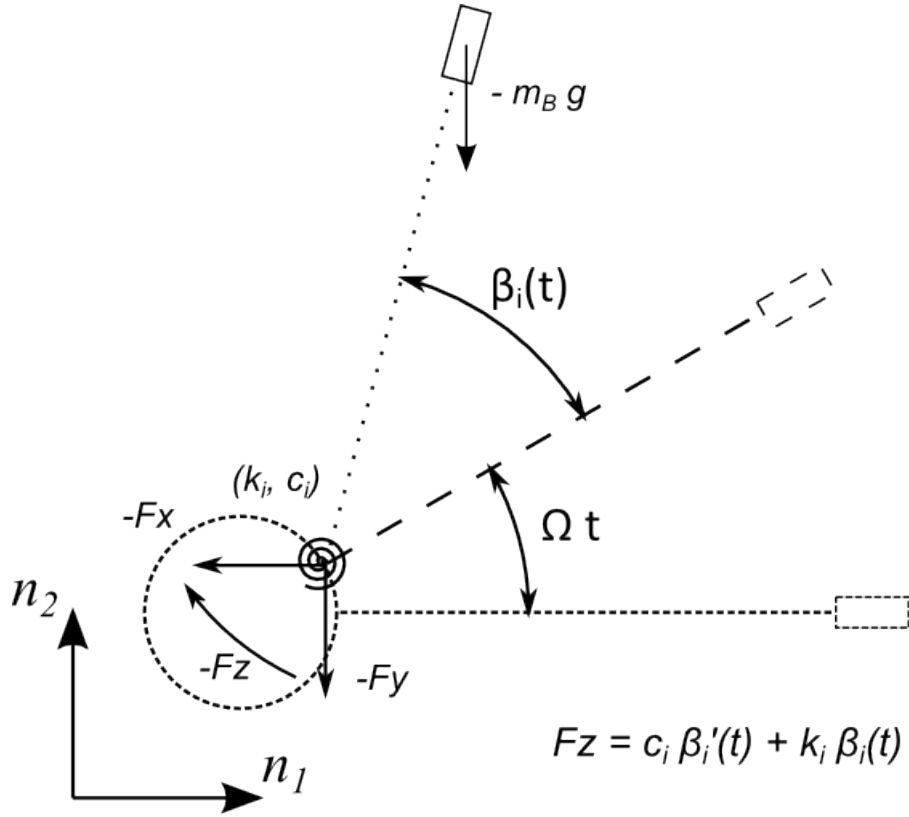


Figura 4.3: Representação gráfica da modelagem das forças de reação no *link*

para uma pá B_i se movendo num referencial inercial, obtemos as N equações de movimento que eram procuradas:

$$\left(\frac{w_T^2}{12} + \frac{h_T^2}{3} + h_T R + R^2\right) m_B \ddot{\beta}_i(t) + c_i \dot{\beta}_i(t) + k_i \beta_i(t) + m_B \Omega^2 d \left(R + \frac{h_T}{2}\right) \sin(\beta_i(t)) = m_B \left(R + \frac{h_T}{2}\right) [\ddot{x}(t) \sin(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t)) - \ddot{y}(t) \cos(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t))] \quad (4.30)$$

4.3.1 Considerando a inclusão da gravidade

A gravidade é inserida na equação (4.25), no termo dos momentos externos $\sum \mathbf{M}^{\mathcal{F}_{ext}/L_i}$.

O momento externo gerado pela ação do peso da pá, em relação ao *link* L_i , pode ser calculado a partir de seu centro geométrico. Desta forma, o somatório dos momentos externos em relação a L_i pode ser escrito como:

$$\sum \mathbf{M}^{\mathcal{F}_{ext}/L_i} = -c_i \dot{\beta}_i(t) - k_i \beta_i(t) - m_B g \left(R + \frac{h_T}{2}\right) \cos(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t)) \quad (4.31)$$

E desta forma a equação resultante é:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{w_T^2}{12} + \frac{h_T^2}{3} + h_T R + R^2 \right) m_B \ddot{\beta}_i(t) + c_i \dot{\beta}_i(t) + k_i \beta_i(t) + m_B \Omega^2 d \left(R + \frac{h_T}{2} \right) \sin(\beta_i(t)) + \\
& \quad + m_B g \left(R + \frac{h_T}{2} \right) \cos(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t)) = \\
& \quad m_B \left(R + \frac{h_T}{2} \right) [\ddot{x}(t) \sin(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t)) - \ddot{y}(t) \cos(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t))] \quad (4.32)
\end{aligned}$$

4.4 Verificação, validação e resultados

4.4.1 Em relação às equações dos modelos anteriores

Iremos comparar este terceiro modelo com os dois modelos desenvolvidos anteriormente.

Se considerarmos a excentricidade, o comprimento, a gravidade e a largura da massa igual a zero (hipóteses do modelo de pás puntuais), obteremos:

$$\begin{aligned}
& (N m_B + m_H) \ddot{x}(t) + c_x \dot{x}(t) + k_x x(t) = \\
& m_B R \sum_{i=1}^N \left[\ddot{\beta}_i(t) \sin(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t)) + \left(\Omega + \dot{\beta}_i(t) \right)^2 \cos(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t)) \right] \quad (4.33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (N m_B + m_H) \ddot{y}(t) + c_y \dot{y}(t) + k_y y(t) = \\
& \quad - m_B R \sum_{i=1}^N \left[\ddot{\beta}_i(t) \cos(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t)) - \left(\Omega + \dot{\beta}_i(t) \right)^2 \sin(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t)) \right] \quad (4.34)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& R^2 m_B \ddot{\beta}_i(t) + c_i \dot{\beta}_i(t) + k_i \beta_i(t) + m_B \Omega^2 d R \sin(\beta_i(t)) = \\
& \quad m_B R [\ddot{x}(t) \sin(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t)) - \ddot{y}(t) \cos(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t))] \quad (4.35)
\end{aligned}$$

que são equações iguais às do primeiro modelo.

Por outro lado, se considerarmos a excentricidade, a gravidade, a distância e a largura da massa igual a zero, mas o comprimento da massa igual ao comprimento da pá (hipóteses do modelo de pás unidimensionais rígidas), h_T , obtemos:

$$(N m_B + m_H) \ddot{x}(t) + c_x \dot{x}(t) + k_x x(t) = m_B \frac{h_T}{2} \sum_{i=1}^N \left[\ddot{\beta}_i(t) \sin(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t)) + \left(\Omega + \dot{\beta}_i(t) \right)^2 \cos(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t)) \right] \quad (4.36)$$

$$(N m_B + m_H) \ddot{y}(t) + c_y \dot{y}(t) + k_y y(t) = e m_H \Omega^2 \sin(\epsilon + \Omega t) + m_B \frac{h_T}{2} \sum_{i=1}^N \left[\ddot{\beta}_i(t) \cos(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t)) - \left(\Omega + \dot{\beta}_i(t) \right)^2 \sin(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t)) \right] \quad (4.37)$$

$$\frac{h_T^2}{3} m_B \ddot{\beta}_i(t) + c_i \dot{\beta}_i(t) + k_i \beta_i(t) + m_B \Omega^2 d \frac{h_T}{2} \sin(\beta_i(t)) = m_B \frac{h_T}{2} [\ddot{x}(t) \sin(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t)) - \ddot{y}(t) \cos(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t))] \quad (4.38)$$

que são equações de movimento iguais as do segundo modelo.

Obtivemos portanto, através de estratégias diferentes, as mesmas equações, o que aumenta a confiança no modelo desenvolvido. Além disso, isto leva a concluir que os primeiro e segundo modelos são casos específicos do terceiro modelo desenvolvido.

4.4.2 Em relação às equações dos trabalhos de referência

A comparação será realizada com o modelo linearizado de segunda ordem, conforme desenvolvido por SARACHO [22] e também utilizado por SANTOS *et al.* [23]. É importante ressaltar que o modelo aqui desenvolvido e o modelo desenvolvido por SARACHO [22] partem de hipóteses diferentes, principalmente no que diz respeito à modelagem das pás. Temos de ter consciência, portanto, de que esta comparação será realizada de forma aproximada, mediante adaptações nos modelos. Porém, as diferenças nas hipóteses não são muitas e não inviabilizam uma comparação aproximada. E, tendo em mente as limitações desta comparação, considera-se que esta é importante para realizar uma verificação da modelagem aqui realizada, sendo esperados equações e resultados aproximados ao de SARACHO [22].

Conforme dito acima, o modelo aqui desenvolvido e o de SARACHO [22] possuem concepções diferentes e precisam ser adaptados de forma a ser possível comparar suas equações. O modelo aqui desenvolvido terá de ser linearizado de forma a permitir a comparação. Serão desprezados também os termos de aceleração e relativos ao eixo \mathbf{n}_2 , pois o experimento daquele trabalho não os utiliza e o objetivo final é a com-

paração de nosso trabalho com o experimento. Por sua vez, o modelo utilizado por SARACHO [22] e SANTOS *et al.* [23] terá de ser alterado em maior profundidade.

Primeiramente, a notação utilizada em SARACHO [22] e SANTOS *et al.* [23] será alterada para facilitar a visualização. Ainda, aquele modelo considera viga de Euler-Bernoulli, que será adaptado para nossa hipótese de viga rígida. O grau de liberdade das pás será alterado para angular. Por último, aquele modelo será linearizado após a adoção de posição angular para as pás.

Adaptação de nossas equações

Visando comparar estas equações com as que foram desenvolvidas neste trabalho, assumiremos as mesmas hipóteses de SARACHO [22]: serão desconsiderados os amortecimentos (c_x e c_i iguais a zero), os termos em y (pois este não é um grau de liberdade admitido no experimento publicado em SARACHO [22] e SANTOS *et al.* [23]), o número de pás será definido como quatro ($N = 4$) e consideraremos uma massa puntual (ou seja, h_t e w_t iguais a zero). Desta forma as equações (4.12) e (4.32) serão:

$$(4 m_B + m_H) \ddot{x}(t) + k_x x(t) = e m_H \Omega^2 \cos(\Omega t + \epsilon) + m_B R \sum_{i=1}^4 \left[\ddot{\beta}_i(t) \sin(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t)) + \left(\Omega + \dot{\beta}_i(t) \right)^2 \cos(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t)) \right] \quad (4.39)$$

$$R^2 m_B \ddot{\beta}_i(t) + k_i \beta_i(t) + m_B \Omega^2 d R \sin(\beta_i(t)) + m_B g R \cos(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t)) = m_B R \ddot{x}(t) \sin(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t)) \quad (4.40)$$

A última etapa para permitir a comparação entre o modelo aqui desenvolvido e o de SARACHO [22] e SANTOS *et al.* [23] é linearizar as equações. Consideraremos β pequeno e desprezando-se os termos não lineares, as equações seriam equivalentes.

Precisamos primeiro expandir os senos e cossenos utilizando as seguintes relações:

$$\sin(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t)) = \sin(\phi_i + \Omega t) \cos(\beta_i(t)) + \cos(\phi_i + \Omega t) \sin(\beta_i(t)) \quad (4.41)$$

$$\cos(\phi_i + \Omega t + \beta_i(t)) = \cos(\phi_i + \Omega t) \cos(\beta_i(t)) - \sin(\phi_i + \Omega t) \sin(\beta_i(t)) \quad (4.42)$$

As equações tornam-se:

$$\begin{aligned}
(4 m_B + m_H) \ddot{x}(t) + k_x x(t) &= e m_H \Omega^2 \cos(\Omega t) + \\
+ m_B R \sum_{i=1}^4 &\left[\ddot{\beta}_i(t) (\sin(\phi_i + \Omega t) \cos(\beta_i(t)) + \cos(\phi_i + \Omega t) \sin(\beta_i(t))) + \right. \\
+ \left(\Omega + \dot{\beta}_i(t) \right)^2 &\left. (\cos(\phi_i + \Omega t) \cos(\beta_i(t)) - \sin(\phi_i + \Omega t) \sin(\beta_i(t))) \right] \quad (4.43)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^2 m_B \ddot{\beta}_i(t) + k_i \beta_i(t) + m_B \Omega^2 d R \sin(\beta_i(t)) + m_B g R (\cos(\phi_i + \Omega t) \cos(\beta_i(t)) + \\
- \sin(\phi_i + \Omega t) \sin(\beta_i(t))) = \\
m_B R \ddot{x}(t) (\sin(\phi_i + \Omega t) \cos(\beta_i(t)) + \cos(\phi_i + \Omega t) \sin(\beta_i(t))) \quad (4.44)
\end{aligned}$$

Depois, fazendo a adaptação para β pequeno, ou seja, fazendo $\sin(\beta) = \beta$ e $\cos(\beta) = 1$, temos:

$$\begin{aligned}
(4 m_B + m_H) \ddot{x}(t) + k_x x(t) &= e m_H \Omega^2 \cos(\Omega t) + \\
+ m_B R \sum_{i=1}^4 &\left[\ddot{\beta}_i(t) (\sin(\phi_i + \Omega t) + \cos(\phi_i + \Omega t) \beta_i(t)) + \right. \\
+ \left(\Omega + \dot{\beta}_i(t) \right)^2 &\left. (\cos(\phi_i + \Omega t) - \sin(\phi_i + \Omega t) \beta_i(t)) \right] \quad (4.45)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^2 m_B \ddot{\beta}_i(t) + k_i \beta_i(t) + m_B \Omega^2 d R \beta_i(t) + m_B g R (\cos(\phi_i + \Omega t) - \sin(\phi_i + \Omega t) \beta_i(t)) = \\
m_B R \ddot{x}(t) (\sin(\phi_i + \Omega t) + \cos(\phi_i + \Omega t) \beta_i(t)) \quad (4.46)
\end{aligned}$$

Expandindo os termos temos:

$$\begin{aligned}
(4m_B + m_H) \ddot{x}(t) + k_x x(t) &= e m_H \Omega^2 \cos(\Omega t) + \\
&+ m_B R \sum_{i=1}^4 \left[\ddot{\beta}_i(t) \sin(\phi_i + \Omega t) + \ddot{\beta}_i(t) \cos(\phi_i + \Omega t) \beta_i(t) + \right. \\
&+ \Omega^2 \cos(\phi_i + \Omega t) + 2\Omega \dot{\beta}_i(t) \cos(\phi_i + \Omega t) + \dot{\beta}_i(t)^2 \cos(\phi_i + \Omega t) - \\
&\left. - \Omega^2 \sin(\phi_i + \Omega t) \beta_i(t) - 2\Omega \dot{\beta}_i(t) \sin(\phi_i + \Omega t) \beta_i(t) - \dot{\beta}_i(t)^2 \sin(\phi_i + \Omega t) \beta_i(t) \right]
\end{aligned} \tag{4.47}$$

$$\begin{aligned}
R^2 m_B \ddot{\beta}_i(t) + k_i \beta_i(t) + m_B \Omega^2 d R \beta_i(t) + m_B g R \cos(\phi_i + \Omega t) + \\
- m_B g R \sin(\phi_i + \Omega t) \beta_i(t) = \\
m_B R \ddot{x}(t) \sin(\phi_i + \Omega t) + m_B R \ddot{x}(t) \cos(\phi_i + \Omega t) \beta_i(t)
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Desprezando os termos não-lineares ($\ddot{\beta}\beta$, $\dot{\beta}^2$, $\dot{\beta}\beta$, $\dot{\beta}^2\beta$ e $\ddot{x}\beta$), sabendo que $\sum_{i=1}^4 \Omega^2 \cos(\phi_i + \Omega t) = 0$, multiplicando a última equação por R e reorganizado as equações chegamos a:

$$\begin{aligned}
(4m_B + m_H) \ddot{x}(t) + k_x x(t) &= e m_H \Omega^2 \cos(\Omega t) + \\
&+ m_B R \sum_{i=1}^4 \left[\ddot{\beta}_i(t) \sin(\phi_i + \Omega t) + 2\Omega \dot{\beta}_i(t) \cos(\phi_i + \Omega t) - \Omega^2 \sin(\phi_i + \Omega t) \beta_i(t) \right]
\end{aligned} \tag{4.49}$$

$$\begin{aligned}
R^2 m_B \ddot{\beta}_i(t) + k_i \beta_i(t) + m_B \Omega^2 d R \beta_i(t) + m_B g R \cos(\phi_i + \Omega t) + \\
- m_B g R \sin(\phi_i + \Omega t) \beta_i(t) = \\
m_B R \ddot{x}(t) \sin(\phi_i + \Omega t)
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Adaptação das equações do trabalho de referência

SARACHO [22] apresenta as equações considerando a possibilidade de movimentação no eixo \mathbf{n}_2 e considerando a possibilidade de aceleração angular. No entanto, os experimentos são realizados com a restrição do conjunto em \mathbf{n}_2 , só se movimentando em \mathbf{n}_1 e com velocidade angular constante.

Desta forma, visando facilitar a comparação das equações, apresenta-se a seguir as equações de SARACHO [22] desconsiderando a equação para \mathbf{n}_2 e os termos de

aceleração angular.

$$\begin{aligned}
& \left(m_2 + \sum_{i=1}^4 m_{P_i} \right) \ddot{x} - \sum_{i=1}^4 (m_{P_i} \sin(\phi + \theta_i) \ddot{u}_i) - 2\dot{\phi} \sum_{i=1}^4 (m_{P_i} \cos(\phi + \theta_i) \dot{u}_i) + \\
& \quad + \dot{\phi}^2 \sum_{i=1}^4 (m_{P_i} \sin(\phi + \theta_i) u_i) + k_x x = \\
& \quad \dot{\phi}^2 \left[em_2 \cos(\phi + \varphi) + \sum_{i=1}^4 (m_{P_i} (L_i + r_i) \cos(\phi + \theta_i)) \right] \quad (4.51)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{P_i} \ddot{u}_i + k_i u_i - m_{P_i} \dot{\phi}^2 u_i + m_{P_i} \dot{\phi}^2 \frac{6(L_i + r_i)}{5L_i} u_i + m_{P_i} g \cos(\phi + \theta_i) = \\
m_{P_i} \ddot{x} \sin(\phi + \theta_i) \quad (4.52)
\end{aligned}$$

Analisando o desenvolvimento realizado por SARACHO [22], identificamos que o termo $m_{P_i} \dot{\phi}^2 \frac{6(L_i + r_i)}{5L_i} u_i$ utilizado resulta da consideração de viga de Euler-Bernouli, diferente da adotada neste trabalho. Este termo, segundo a autora, é associado a rigidez geométrica e é obtido a partir da equação:

$$\pi_{g_i} = \frac{1}{2} \int_0^{L_i} N_i(\xi_i) \left(\frac{\partial v_i}{\partial \xi} \right)^2 d\xi_i \quad (4.53)$$

De acordo com SARACHO [22], a força normal ao longo da viga pode ser desprezada, dado que a massa da viga foi considerada desprezível, de tal forma que somente a contribuição da massa concentrada é considerada. Desta forma, segundo ela, a força normal pode ser obtida conforme descrito por Kane et al 1987.

$$N_i(\xi_i) = m_{P_i} (L_i + r_i) \dot{\phi}^2 \quad (4.54)$$

Desta forma, a energia potencial associada à rigidez geométrica é dada por:

$$\pi_{g_i} = \frac{1}{2} \int_0^{L_i} m_{P_i} (L_i + r_i) \dot{\phi}^2 \left(\frac{\partial v_i}{\partial \xi} \right)^2 d\xi_i \quad (4.55)$$

SARACHO [22] compara em seu trabalho diferentes funções de interpolação e conclui que a seguinte equação é a que melhor descreve o deslocamento ao longo de cada uma das vigas:

$$v_i(\xi_i) = \frac{3}{L_i^3} \left(L_i \frac{\xi_i^2}{2} - \frac{\xi_i^3}{6} \right) u_i \quad (4.56)$$

A integração resulta em:

$$\pi_{g_i} = \frac{3}{5L_i} m_{P_i} \dot{\phi}^2 (L_i + r_i) u_i^2 \quad (4.57)$$

No entanto, o termo para a energia potencial associada à rigidez geométrica aparece na equação de equilíbrio dinâmico do conjunto em derivada simples. Portanto, a expressão torna-se:

$$\frac{6}{5L_i} m_{P_i} \dot{\phi}^2 (L_i + r_i) u_i \quad (4.58)$$

A partir do entendimento deste termo é possível adaptá-lo às hipóteses aqui adotadas. Neste caso, a barra é rígida, ao contrário da viga de Euler-Bernoulli do trabalho de SARACHO [22]. Sendo assim, a função de interpolação a ser utilizada seria:

$$v_i(\xi_i) = \frac{\xi_i}{L_i} u_i \quad (4.59)$$

Desta forma a equação resulta em:

$$\pi_{g_i} = \frac{1}{2L_i} m_{P_i} \dot{\phi}^2 (L_i + r_i) u_i^2 \quad (4.60)$$

E com a derivada simples a expressão torna-se:

$$\frac{1}{L_i} m_{P_i} \dot{\phi}^2 (L_i + r_i) u_i \quad (4.61)$$

Visando adaptar as equações de SARACHO [22] à hipótese de vigas rígidas, substituiremos portanto na equação o termo $\frac{6}{5L_i} m_{P_i} \dot{\phi}^2 (L_i + r_i) u_i$ por $\frac{1}{L_i} m_{P_i} \dot{\phi}^2 (L_i + r_i) u_i$.

Desta forma a equação se torna:

$$m_{P_i} \ddot{u}_i + k_i u_i - m_{P_i} \dot{\phi}^2 u_i + m_{P_i} \dot{\phi}^2 \frac{(L_i + r_i)}{L_i} u_i + m_{P_i} g \cos(\phi + \theta_i) = m_{P_i} \ddot{x} \sin(\phi + \theta_i) \quad (4.62)$$

Ou, simplificando:

$$m_{P_i} \ddot{u}_i + k_i u_i + m_{P_i} \dot{\phi}^2 \frac{r_i}{L_i} u_i + m_{P_i} g \cos(\phi + \theta_i) = m_{P_i} \ddot{x} \sin(\phi + \theta_i) \quad (4.63)$$

Considerando ainda que a notação utilizada por SARACHO [22] é diferente daquela aqui utilizada, iremos fazer as seguintes adaptações para facilitar a comparação (importante ressaltar que a notação é diferente mas as grandezas envolvidas são

equivalentes):

$$\begin{aligned}
m_2 &= m_H \\
m_{P_i} &= m_B \\
\phi &= \Omega t \\
\theta_i &= \phi_i \\
L_i &= R \\
r_i &= d \\
\varphi &= \epsilon
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Fazendo as substituições acima e reorganizado a primeira equação, ela pode ser assim escrita:

$$\begin{aligned}
(4m_B + m_H) \ddot{x} + k_x x &= \Omega^2 e m_H \cos(\Omega t + \epsilon) + \\
+ \sum_{i=1}^4 [m_B \sin(\Omega t + \phi_i) \ddot{u}_i &+ 2\Omega m_B \cos(\Omega t + \phi_i) \dot{u}_i - \Omega^2 m_B \sin(\Omega t + \phi_i) u_i] + \\
&+ \sum_{i=1}^4 \Omega^2 m_B (R + d) \cos(\Omega t + \phi_i) \tag{4.65}
\end{aligned}$$

O último termo, $\sum_{i=1}^4 \Omega^2 m_B (R + d) \cos(\Omega t + \phi_i)$, considerando-se que $\phi_i = (i - 1) \times \frac{2\pi}{N}$, onde $N = 4$, é igual a zero, dado que são dois pares de cossenos com π de fase entre si. Desta forma as equações passam a ser:

$$\begin{aligned}
(4m_B + m_H) \ddot{x} + k_x x &= \Omega^2 e m_H \cos(\Omega t + \epsilon) + \\
+ \sum_{i=1}^4 [m_B \sin(\Omega t + \phi_i) \ddot{u}_i &+ 2\Omega m_B \cos(\Omega t + \phi_i) \dot{u}_i - \Omega^2 m_B \sin(\Omega t + \phi_i) u_i] \tag{4.66}
\end{aligned}$$

$$m_B \ddot{u}_i + k_i u_i + m_B \Omega^2 \frac{d}{R} u_i + m_B g \cos(\Omega t + \phi_i) = m_B \ddot{x} \sin(\Omega t + \phi_i) \tag{4.67}$$

Por último, o modelo de SARACHO [22] considera a distância linear entre a posição da ponta da pá e sua posição em repouso u_i , enquanto neste trabalho foi considerada a posição angular β . A posição longitudinal u_i pode ser escrita como $R \sin(\beta)$ e, conseqüentemente, \dot{u}_i e \ddot{u}_i podem ser escritos, respectivamente, como $R \cos(\beta) \dot{\beta}$ e $R(\cos(\beta) \ddot{\beta} - \sin(\beta) \dot{\beta}^2)$.

Realizando essas substituições as equações tornam-se:

$$\begin{aligned}
(4m_B + m_H) \ddot{x} + k_x x &= \Omega^2 e m_H \cos(\Omega t + \epsilon) + \\
+ \sum_{i=1}^4 &\left[m_B \sin(\Omega t + \phi_i) R (\cos(\beta) \ddot{\beta} - \sin(\beta) \dot{\beta}) + 2\Omega m_B \cos(\Omega t + \phi_i) R \cos(\beta) \dot{\beta} - \right. \\
&\left. - \Omega^2 m_B \sin(\Omega t + \phi_i) R \sin(\beta) \right] \quad (4.68)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_B R (\cos(\beta) \ddot{\beta} - \sin(\beta) \dot{\beta}) + k_i R \sin(\beta) + m_B \Omega^2 \frac{d}{R} R \sin(\beta) + \\
+ m_B g \cos(\Omega t + \phi_i) = m_B \ddot{x} \sin(\Omega t + \phi_i) \quad (4.69)
\end{aligned}$$

Depois, fazendo a adaptação para β pequeno, ou seja, fazendo $\sin(\beta) = \beta$ e $\cos(\beta) = 1$, temos:

$$\begin{aligned}
(4m_B + m_H) \ddot{x} + k_x x &= \Omega^2 e m_H \cos(\Omega t + \epsilon) + \\
+ \sum_{i=1}^4 &\left[m_B \sin(\Omega t + \phi_i) R (\ddot{\beta} - \beta \dot{\beta}) + 2\Omega m_B \cos(\Omega t + \phi_i) R \dot{\beta} - \right. \\
&\left. - \Omega^2 m_B \sin(\Omega t + \phi_i) R \beta \right] \quad (4.70)
\end{aligned}$$

$$m_B R (\ddot{\beta} - \beta \dot{\beta}) + k_i R \beta + m_B \Omega^2 \frac{d}{R} R \beta + m_B g \cos(\Omega t + \phi_i) = m_B \ddot{x} \sin(\Omega t + \phi_i) \quad (4.71)$$

Expandindo os termos temos:

$$\begin{aligned}
(4m_B + m_H) \ddot{x} + k_x x &= \Omega^2 e m_H \cos(\Omega t + \epsilon) + \\
+ \sum_{i=1}^4 &\left[m_B \sin(\Omega t + \phi_i) R (\ddot{\beta} - \beta \dot{\beta}) + 2\Omega m_B \cos(\Omega t + \phi_i) R \dot{\beta} - \right. \\
&\left. \Omega^2 m_B \sin(\Omega t + \phi_i) R \beta \right] \quad (4.72)
\end{aligned}$$

$$m_B R (\ddot{\beta} - \beta \dot{\beta}) + k_i R \beta + m_B \Omega^2 \frac{d}{R} R \beta + m_B g \cos(\Omega t + \phi_i) = m_B \ddot{x} \sin(\Omega t + \phi_i) \quad (4.73)$$

Desprezando os termos não-lineares ($\ddot{\beta}\beta$, $\dot{\beta}^2$, $\dot{\beta}\beta$, $\beta^2\beta$ e $\ddot{x}\beta$), sabendo que

$\sum_{i=1}^4 \Omega^2 \cos(\phi_i + \Omega t) = 0$, multiplicando a última equação por R e reorganizado as equações chegamos a:

$$(4m_B + m_H) \ddot{x} + k_x x = em_H \Omega^2 \cos(\Omega t + \epsilon) + m_B R \sum_{i=1}^4 \left[\ddot{\beta} \sin(\Omega t + \phi_i) + 2\Omega \dot{\beta} \cos(\Omega t + \phi_i) - \Omega^2 \sin(\Omega t + \phi_i) \beta \right] \quad (4.74)$$

$$R^2 m_B \ddot{\beta} + k_i R^2 \beta + m_B \Omega^2 d R \beta + m_B g R \cos(\Omega t + \phi_i) = m_B R \ddot{x} \sin(\Omega t + \phi_i) \quad (4.75)$$

Comparação entre as equações adaptadas

Comparando-se as equações (4.49) e (4.50) com as equações (4.74) e (4.75) pode-se constatar que o modelo linearizado de SARACHO [22] é compatível com o modelo aqui desenvolvido, feitas as devidas adaptações e a linearização do modelo aqui desenvolvido.

No entanto, pode-se verificar que existem duas diferenças.

Primeiramente, k_i de SARACHO [22] é substituído por $k_i R^2$. Tal diferença é facilmente explicada pois SARACHO [22] e SANTOS *et al.* [23] consideram o deslocamento linear da ponta da pá e portanto k_i tem unidade $\frac{N}{m}$. Em nosso caso, consideramos o deslocamento angular e, portanto, k_i tem unidade $N.m$. Desta forma, considera-se que estes termos são equivalentes, quando considera na inserção das grandezas na simulação. Ou seja, na simulação de nosso modelo devemos multiplicar o valor de k_i utilizado em SARACHO [22] pelo valor de R^2 também utilizado naquele trabalho.

Em segundo lugar, o termo $-m_B g R \sin(\phi_i + \Omega t) \beta_i(t)$ de nossa formulação, mesmo após adaptações e linearização, não está presente na formulação de SARACHO [22] e SANTOS *et al.* [23]. Podemos supor que esta diferença se dá por uma linearização forçada do termo referente a atuação da gravidade. Este é o único termo de fato diferente entre as formulações, mesmo após consideradas as diferentes hipóteses.

Feita esta análise, e apesar diferença no termo da gravidade, considera-se que a comparação com o modelo de SARACHO [22] referenda o modelo aqui desenvolvido.

Resta realizar a simulação de nosso modelo e comparar os resultados com as simulações e resultados experimentais obtidos por SARACHO [22] e SANTOS *et al.* [23].

Comparação com os resultados experimentais

Iremos orientar a simulação para os parâmetros experimentais utilizados por SARACHO [22] e SANTOS *et al.* [23] visando possibilitar a comparação de resultados.

Os parâmetros da bancada de testes por eles utilizados são descritos na tabela 6.1 da tese de SARACHO [22].

No entanto, conforme descrito na seção 6.1.2 deste trabalho, ao conectar o *shaker* à bancada de testes, a frequência natural e o amortecimento são alterados. SARACHO [22] então realiza a medição de frequência amortecida e fator de amortecimento com o *shaker* montado, calculando por fim a rigidez equivalente do conjunto com o *shaker* montado. Utilizaremos este valor para k_x .

O *shaker* utilizado por SARACHO [22] serve para excitar o sistema. Neste trabalho, modelamos a excitação inicial do *shaker* utilizado por [22], através de uma velocidade inicial diferente de zero, excitando o sistema.

Vale lembrar também que na simulação de nosso modelo devemos multiplicar k_i por um comprimento ao quadrado para compatibilização de unidades. Considerando a distância u_i modelada por SARACHO [22] e SANTOS *et al.* [23] como referindo-se ao deslocamento da posição central da massa na ponta da viga, iremos utilizar o k_i de SARACHO [22] multiplicado por $(R + \frac{h_x}{2})^2$.

Dessa forma, utilizando a modelagem aqui desenvolvida, representada pelas equações (4.49) e (4.50), e utilizando os dados descritos na tabela 6.1 da tese de SARACHO [22], com as correções realizadas naquele trabalho para o *shaker* para k_x e k_i , chegamos ao resultado mostrado nas figuras 4.4 e 4.5.

Este resultado pode ser comparado tanto com o resultado da simulação de SARACHO [22] e SANTOS *et al.* [23] como com o valor experimental exibido nestes trabalhos, aqui representados nas figuras 4.6 e 4.7.

O resultado numérico aqui obtido (figuras 4.4 e 4.5) é compatível com a comparação realizada anteriormente sobre as equações de SARACHO [22] e SANTOS *et al.* [23] e as aqui desenvolvidas. Os resultados numéricos que obtivemos são bastante semelhantes àqueles obtidos por SARACHO [22] e SANTOS *et al.* [23], tanto numéricos (figuras 4.6 e 4.7) quanto experimentais.

Considera-se que as eventuais diferenças existentes resultam da diferença nas hipóteses adotadas.

Porém, considera-se que tais diferenças são pequenas e o modelo aqui desenvolvido conseguiu atingir um resultado muito satisfatório. Mesmo tratando-se de um modelo de considerável simplicidade, os resultados foram suficientemente próximos daqueles obtidos por um trabalho elevada complexidade.

Para verificar a representatividade de nosso modelo, seria necessário compará-lo com resultados experimentais obtidos de um experimento projetado a partir das

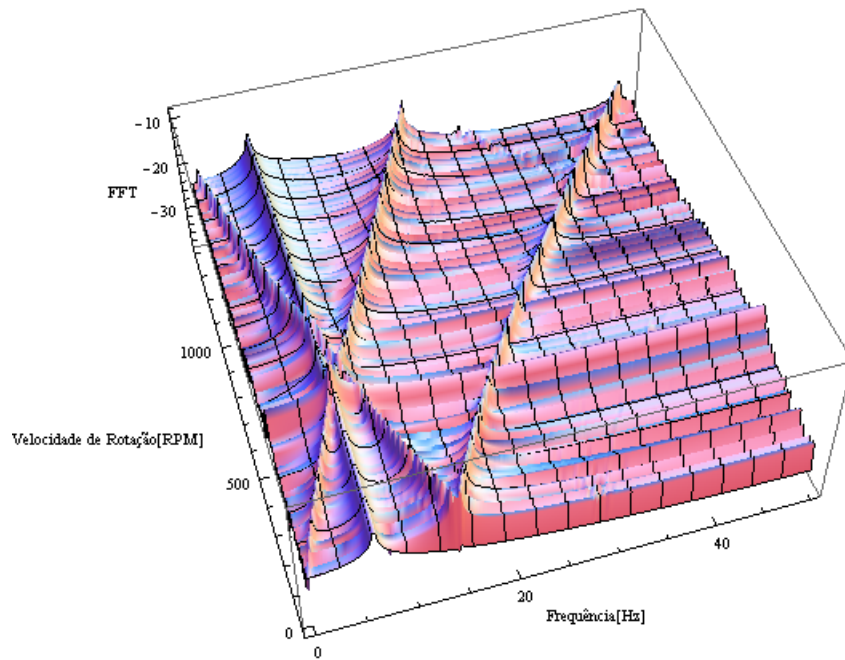


Figura 4.4: Gráfico em cascata demonstrando a variação das frequências críticas do conjunto em função da velocidade de rotação do rotor, mediante excitação da base

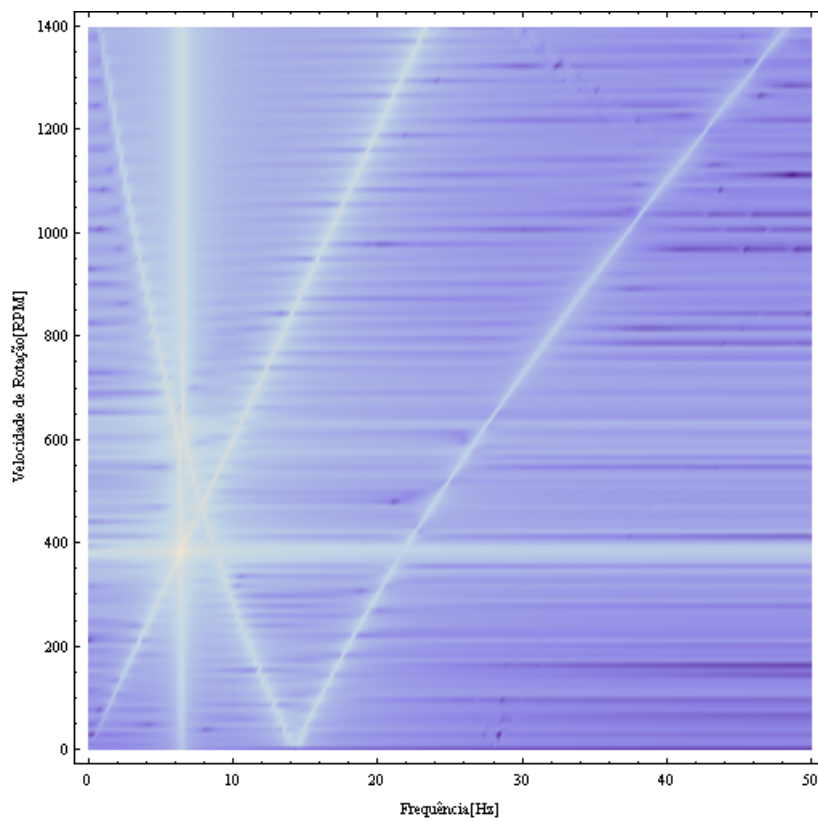


Figura 4.5: Gráfico de densidade demonstrando a variação das frequências críticas do conjunto em função da velocidade de rotação do rotor, mediante excitação da base

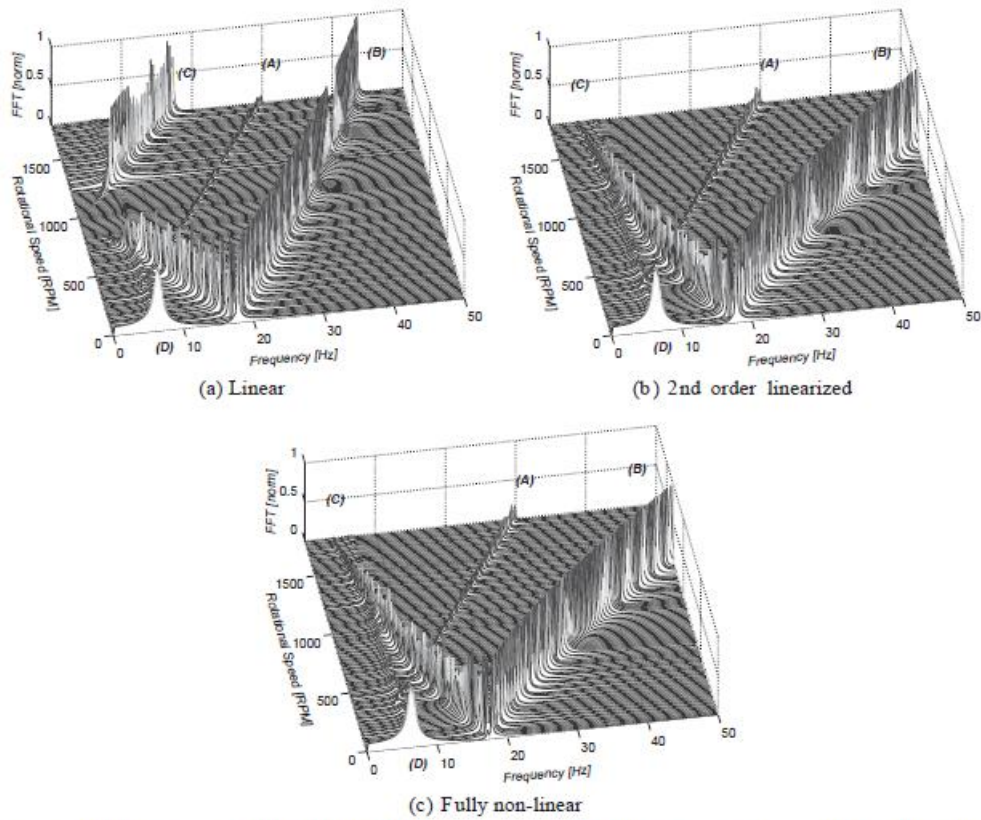


Fig. 5. Theoretical waterfall diagram showing the variation of the critical frequencies of the assembly as a function of the rotational speed. Excitation acting on the support mass and vibration response of the support mass on the base: (A) frequency related to the rotational speed ϕ ; (B) frequency related to the parametric vibration of the mode (BR), $\omega_5 + \phi$; (C) frequency related to the parametric vibration of the mode (BR), $\omega_5 - \phi$; (D) frequency ω_1 related to the mode shape (RB), where $\omega_1 = 6.39$ Hz.

Figura 4.6: Gráfico teórico em cascata dos trabalhos de SARACHO [22] e SANTOS *et al.* [23] demonstrando a variação das frequências críticas do conjunto em função da velocidade de rotação do rotor, mediante excitação da base

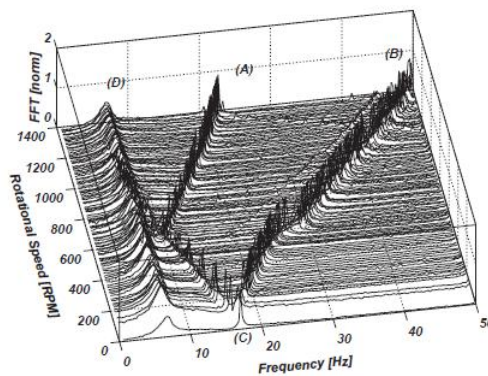


Fig. 9. Experimental waterfall diagram showing: (A) frequency related to the rotational speed ϕ ; (B) frequency $(\omega_5 + \phi)$ related to the parametric vibration of the mode (BR); (C) frequency $(\omega_5 - \phi)$ related to the parametric vibration of the mode (BR); (D) frequency ω_1 related to the mode shape (RB), where $\omega_1 = 6.6$ Hz.

Figura 4.7: Gráfico experimental em cascata dos trabalhos de SARACHO [22] e SANTOS *et al.* [23] demonstrando a variação das frequências críticas do conjunto em função da velocidade de rotação do rotor, mediante excitação da base

mesmas hipóteses do modelo.

Capítulo 5

Conclusão e sugestão para trabalhos futuros

Neste trabalho desenvolvemos modelos de sistemas acoplados rotor-pás visando a modelagem de dois sistemas distintos: helicópteros e turbinas eólicas. Partiu-se das hipóteses adotadas por COLEMAN [9], fazendo-se as adaptações necessárias até chegar ao modelo final, passando, durante o desenvolvimento, por três modelos distintos.

Pudemos concluir que os primeiro e segundo modelos desenvolvidos (pás como massas pontuais e unidimensionais e rígidas, respectivamente) são casos especiais do terceiro modelo desenvolvido (pás bidimensionais rígidas, considerando efeitos da gravidade). Desta forma, podemos considerar que as equações (4.12), (4.13) e (4.32) representam o modelo mais abrangente aqui desenvolvido. Todos os outros podem ser considerados casos especiais destas equações.

Obteve-se um resultado satisfatório quando da comparação entre as equações (2.8), (2.9) e (2.19), aqui desenvolvidas na primeira modelagem, e as equações (2.24), (2.25) e (2.26), do trabalho de FLOWERS e TONGUE [19]. Os resultados numéricos apresentaram algumas diferenças que se supõe advindas de equívocos na determinação dos eixos dos gráficos no trabalho de FLOWERS e TONGUE [19], dado que não foram encontrados erros no trabalho aqui desenvolvido, apesar de extensiva investigação, e pelo fato de os gráficos apresentarem sempre o mesmo comportamento.

A segunda modelagem permitiu visualizar, a partir da análise das equações desenvolvidas (equações (3.5), (3.6) e (3.13)) e de seus resultados numéricos, que a consideração de massa concentrada no centro geométrico da pá não é equivalente a um modelo com massa distribuída, sendo que se acredita que este último, de massa distribuída, é mais próximo aos sistemas reais de helicópteros e turbinas eólicas. Desta forma, motiva-se e justifica-se o desenvolvimento de um modelo mais complexo.

Desta forma partiu-se para um terceiro modelo, visando uma modelagem mais completa, que permitisse representar tanto helicópteros quanto turbinas eólicas. Este modelo considera pás dimensionais rígidas, com massa continuamente distribuída, além de considerar a ação da gravidade e a existência de excentricidade no rotor. As equações (4.49) e (4.50), da terceira modelagem, também obtiveram suficiente semelhança com as equações (4.74) e (4.75) dos trabalhos de SARACHO [22] e SANTOS *et al.* [23], quando consideradas as diferenças de hipóteses adotadas em cada trabalho (este trabalho considerou as pás rígidas e o modelo de SARACHO [22] as considerou como vigas de Euler-Bernoulli, ou seja, flexíveis). Ainda com as diferentes hipóteses adotadas, os resultados numéricos e experimental apresentaram razoável semelhança, permitindo verificar o modelo aqui desenvolvido.

Além disso, como o modelo foi todo desenvolvido neste trabalho, desde a definição de hipóteses, obtenção das equações de movimento e simulação numérica, foi possível obter conhecimento suficiente sobre o mesmo de forma a permitir, no futuro, novas adaptações do modelo e possíveis aprimoramentos.

Para futuros trabalhos, as seguintes atividades são sugeridas: (i) pesquisa de outros trabalhos acadêmicos, preferencialmente experimentais, que apresentem dados que permitam a simulação do modelo aqui desenvolvido em diferentes situações e comparação dos resultados, (ii) pesquisa de outros trabalhos de forma a identificar possíveis oportunidades para aprimoramento da modelagem, (iii) utilizar o modelo desenvolvido para desenvolver estratégias de controle de vibração em máquinas rotativas, (iv) utilizar o modelo desenvolvido para estudar a estabilidade de sistemas.

Referências Bibliográficas

- [1] G1 RJ. “Acidente com helicóptero deixa dois feridos no RJ”. 2011. Disponível em: <<http://g1.globo.com/rio-de-janeiro/noticia/2011/01/acidente-com-helicoptero-deixa-dois-feridos-no-rj.html>>. Acessado em 20 de dezembro de 2012.
- [2] INSTITUTO DE AVIAÇÃO CIVIL. *MMA 58-4 - Manual de Curso de Piloto Privado - Helicóptero*. Ministério da Aeronáutica, Departamento de Aviação Civil, 1995. Aprovado pela Portaria n 71/DGAC, de 14 de fevereiro de 1995.
- [3] INSTITUTO DE AVIAÇÃO CIVIL. *Manual de Curso de Piloto Comercial - Helicóptero*. Departamento de Aviação Civil. Disponível em: <<http://www2.anac.gov.br/habilitacao/manualCursos.asp>>. Acessado em 20 de dezembro de 2012.
- [4] INSTITUTO DE AVIAÇÃO CIVIL. *MMA 58-8 - Manual de Curso de Piloto de Linha Aérea - Helicóptero*. Ministério da Aeronáutica, Departamento de Aviação Civil, 1991. Aprovado pela Portaria n 208/DGAC, de 25 de junho de 1991.
- [5] GUNSTON, B. *The Cambridge Aerospace Dictionary*. Cambridge University Press, 2004.
- [6] LEISHMAN, J. G. “A history of helicopter flight”. Disponível em: <<http://terpconnect.umd.edu/~leishman/Aero/history.html>>. Acessado em 20 de dezembro de 2012.
- [7] MONDEY, D. *Planemakers 2: Westland*. London, Janes Publishing, 1982.
- [8] JOHNSON, W. *Milestones in Rotorcraft Aeromechanics*. Relatório técnico, National Aeronautics and Space Administration, 2011.
- [9] COLEMAN, R. P. *Theory of Self-Excited Mechanical Oscillations of Hinged Rotor Blades*. Relatório técnico, National Advisory Committee for Aeronautics, 1943.

- [10] FEINGOLD, A. M. *Theory of Mechanical Oscillations of Rotors With Two Hinged Blades*. Relatório técnico, National Advisory Committee for Aeronautics, 1943.
- [11] COLEMAN, R. P., FEINGOLD, A. M. *Theory of Ground Vibrations of a Two-Blade Helicopter Rotor on Anisotropic Flexible Supports*. Relatório técnico, National Advisory Committee for Aeronautics, 1947.
- [12] COLEMAN, R. P., FEINGOLD, A. M. *Theory of Self-Excited Mechanical Oscillations of Helicopter Rotors With Hinged Blades*. Relatório técnico, National Advisory Committee for Aeronautics, 1958.
- [13] MCGOWEN, S. S. *Helicopters: an illustrated history of their impact*. California, ABC-CLIO Inc., 2005.
- [14] FEDERAL AVIATION ADMINISTRATION. *Rotorcraft flying handbook*. 2000.
- [15] PRESIDÊNCIA DA REPÚBLICA. “Lei n. 7.565, de 19 de dezembro de 1986”. Publicada no Diário Oficial da União de 22 de dezembro, 1986. Dispõe sobre o Código Brasileiro de Aeronáutica.
- [16] PRESIDÊNCIA DA REPÚBLICA. “Lei n.11.182, de 27 de setembro de 2005”. Publicada no Diário Oficial da União de 28 de setembro, 2005. Cria a Agência Nacional de Aviação Civil - ANAC, e dá outras providências.
- [17] AGÊNCIA NACIONAL DE AVIAÇÃO CIVIL. “RBAC 27 - Requisitos de aeronavegabilidade: aeronaves de asas rotativas categoria normal”. Publicada no Diário Oficial da União de 23 de abril, 2009. Resolução n.79, de 22 de abril de 2009.
- [18] AGÊNCIA NACIONAL DE AVIAÇÃO CIVIL. “RBAC 29 - Requisitos de aeronavegabilidade: aeronaves de asas rotativas categoria transporte”. Publicada no Diário Oficial da União de 23 de abril, 2009. Resolução n.80, de 22 de abril de 2009.
- [19] FLOWERS, G. T., TONGUE, B. H. “Nonlinear Rotorcraft Analysis using Symbolic Manipulation”, *International Journal of Nonlinear Mechanics*, v. 23, n. 3, pp. 154–160, 1988.
- [20] ROBINSON, C. S., KING, R. L., WOOD, E. R. “Non-linear simulation of coupled rotor-fuselage response using symbolically derived equations of motion. Part2: Confirmation and illustrative cases”. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, v. 218, 1, pp. 11–22, 2004.

- [21] ROBINSON, C. S., KING, R. L., WOOD, E. R. “Non-linear simulation of coupled rotor-fuselage response using symbolically derived equations of motion. Part1: Derivation”. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, v. 218, 1, pp. 1–9, 2004.
- [22] SARACHO, C. M. *Modelos matemáticos lineares e não-lineares para representar o acoplamento entre rotor e palhetas flexíveis - exemplos numéricos e verificação experimental*. Tese de doutorado, UNICAMP, 2002.
- [23] SANTOS, I. F., SARACHO, C. M., SMITH, J. T., et al. “Contribution to experimental validation of linear and non-linear dynamic models for representing rotor-blade parametric coupled vibrations”, *Journal of sound and vibration*, 2004.
- [24] TENENBAUM, R. *Dinâmica aplicada*. Manole, 2006. ISBN: 9788520415184.
- [25] ROBINSON, C. S. *Modeling and analysis of helicopter ground resonance utilizing symbolic processing and dynamic simulation software*. Phd thesis, Naval Postgraduate School, 1997.