“Compressive Sensing”

Novos Paradigmas para Aquisição e Compressão de Imagens

Projeto Final , 17 de Dezembro de 2008

Autora: Adriana Schulz

Orientadores: Prof. Eduardo A. B. da Silva

Prof. Luiz Velho

Examinadores: Prof. Gelson Vieira Mendonça

Prof. Lisandro Lovisolo

Compressão de Imagens

Representação de Sinais

Introdução a Compressive Sensing

Teoria de Compressive Sensing

Resultados

Trabalhos Futuros

Objetivos

- estudo teórico
- exemplos de aplicações em processamento de imagens

Compressão de Imagens

Representação de Sinais

Introdução a Compressive Sensing

Teoria de Compressive Sensing

Resultados

Trabalhos Futuros

Motivação

Compressão de Imagens

Representação de Sinais

Introdução a Compressive Sensing

Teoria de Compressive Sensing

Resultados

Trabalhos Futuros

Motivação

$$\text{Amostragem} \implies \text{Nyquist}$$

Compressão de Imagens

Representação de Sinais

Introdução a Compressive Sensing

Teoria de Compressive Sensing

Resultados

Trabalhos Futuros

Motivação

Amostragem $\Longrightarrow$ Nyquist

Nyquit era *pessimista*!!!

Compressão de Imagens

Representação de Sinais

Introdução a Compressive Sensing

Teoria de Compressive Sensing

Resultados

Trabalhos Futuros

Motivação

Compressão de Imagens

Representação de Sinais

Introdução a Compressive Sensing

Teoria de Compressive Sensing

Resultados

Trabalhos Futuros

$$\text{Amostragem} \implies \text{Nyquist}$$

Nyquit era *pessimista*!!!

$$\text{Taxa de Nyquit} \times \text{Taxa de Informação}$$

1. Compressão de Imagens
2. Representação de Sinais
3. Introdução a Compressive Sensing
4. Teoria de Compressive Sensing
5. Resultados
6. Trabalhos Futuros

Compressão de Imagens

Representação de Sinais

Introdução a Compressive Sensing

Teoria de Compressive Sensing

Resultados

Trabalhos Futuros

1 Compressão de Imagens

2 Representação de Sinais

3 Introdução a Compressive Sensing

4 Teoria de Compressive Sensing

5 Resultados

6 Trabalhos Futuros

Compressão de Imagens

Representação de Sinais

Introdução a Compressive Sensing

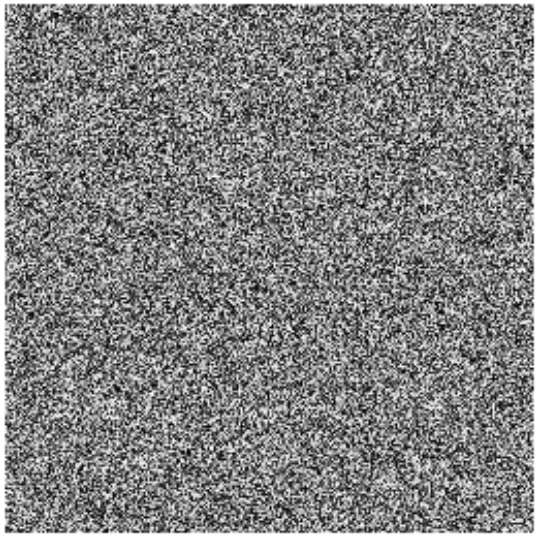
Teoria de Compressive Sensing

Resultados

Trabalhos Futuros

Compressão de Imagens
Representação de Sinais
Introdução a Compressive Sensing
Teoria de Compressive Sensing
Resultados
Trabalhos Futuros

Sinais naturais são *compressíveis*



Compressão de Imagens
Representação de Sinais
Introdução a Compressive Sensing
Teoria de Compressive Sensing
Resultados
Trabalhos Futuros

Transform Coding

1 Compressão de Imagens

2 Representação de Sinais

3 Introdução a Compressive Sensing

4 Teoria de Compressive Sensing

5 Resultados

6 Trabalhos Futuros

Compressão de Imagens

Representação de Sinais

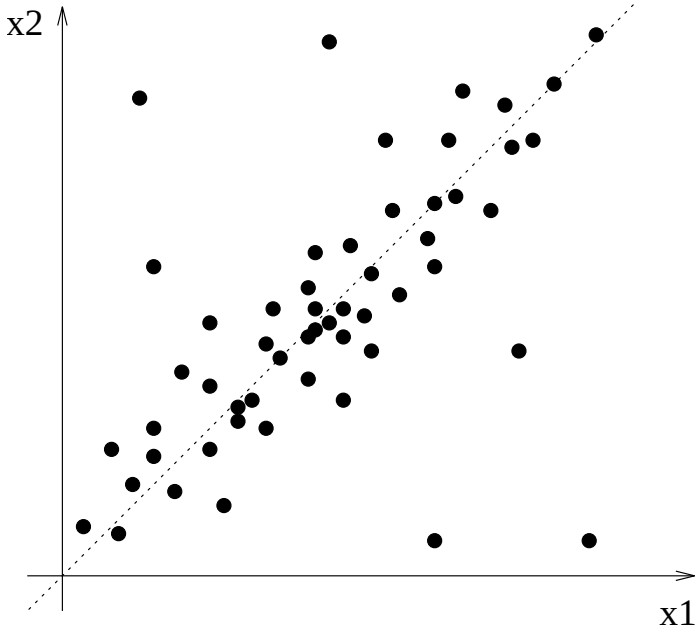
Introdução a Compressive Sensing

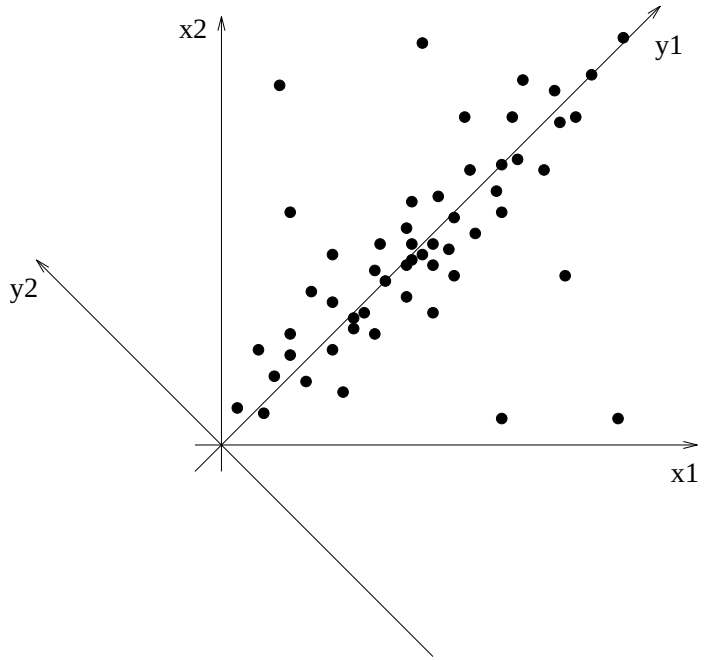
Teoria de Compressive Sensing

Resultados

Trabalhos Futuros

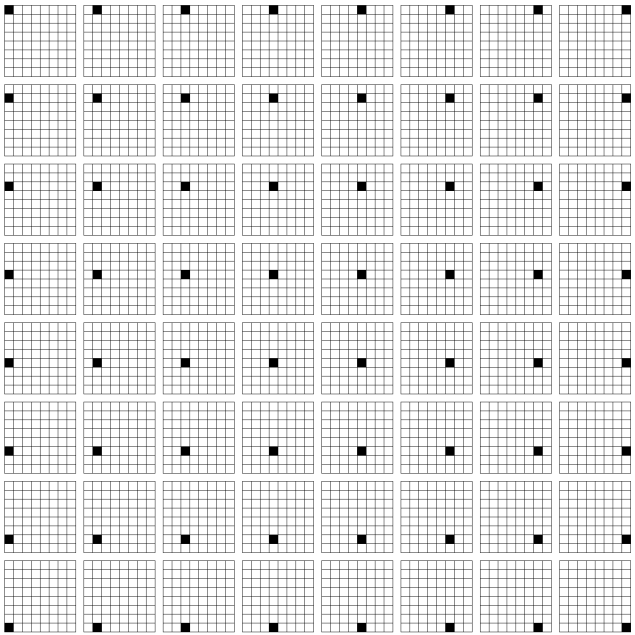
Representação de Sinais

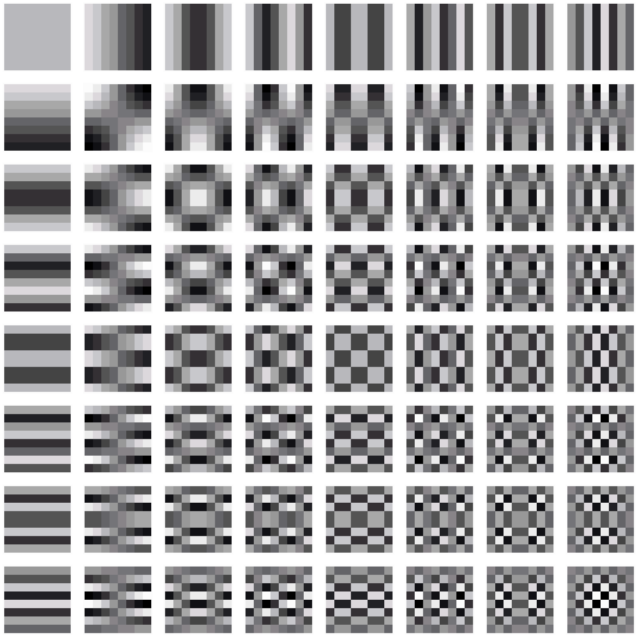




Compressão de Imagens
Representação de Sinais
Introdução a Compressive Sensing
Teoria de Compressive Sensing
Resultados
Trabalhos Futuros

Representação de Sinais





Compressão de Imagens
Representação de Sinais
Introdução a Compressive Sensing
Teoria de Compressive Sensing
Resultados
Trabalhos Futuros

1 Compressão de Imagens

2 Representação de Sinais

3 Introdução a Compressive Sensing

4 Teoria de Compressive Sensing

5 Resultados

6 Trabalhos Futuros

Compressão de Imagens

Representação de Sinais

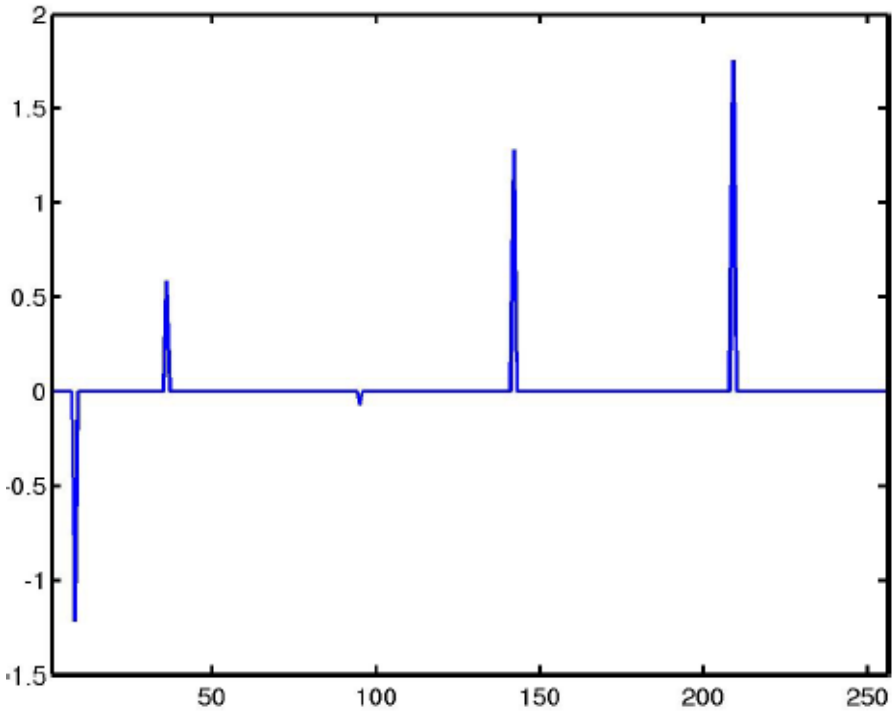
Introdução a Compressive Sensing

Teoria de Compressive Sensing

Resultados

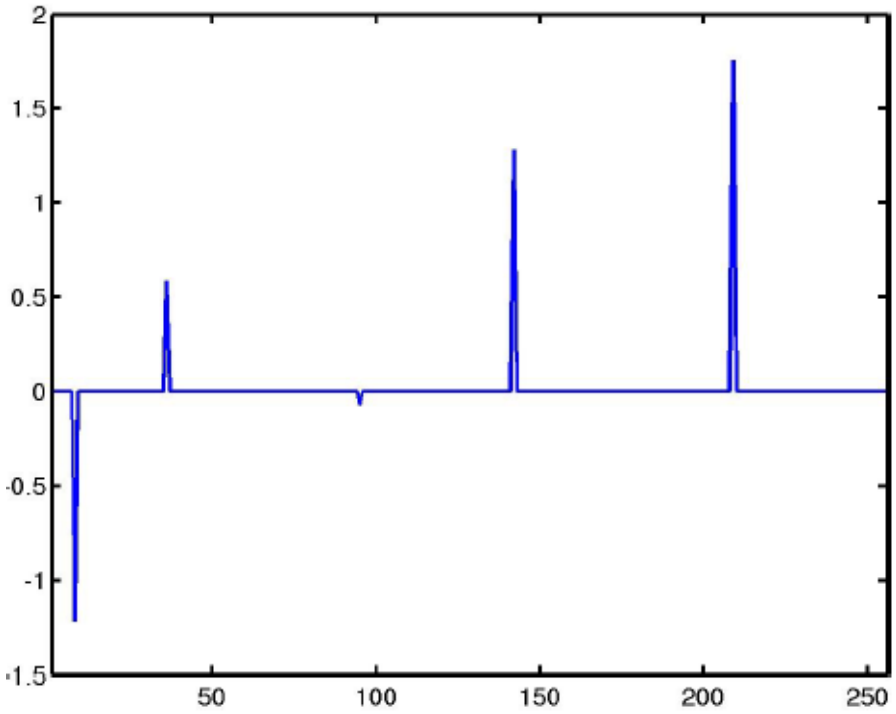
Trabalhos Futuros

Sinais Esparsos



Compressão de Imagens
Representação de Sinais
Introdução a Compressive Sensing
Teoria de Compressive Sensing
Resultados
Trabalhos Futuros

Sinais Esparsos



Não sabemos onde os pontos estão...

Compressão de Imagens
Representação de Sinais
Introdução a Compressive Sensing
Teoria de Compressive Sensing
Resultados
Trabalhos Futuros

O Truque

amostras pontuais

Compressão de Imagens
Representação de Sinais
Introdução a Compressive Sensing
Teoria de Compressive Sensing
Resultados
Trabalhos Futuros

O Truque

amostras pontuais $\times$ medidas do sinal

Compressão de Imagens
Representação de Sinais
Introdução a Compressive Sensing
Teoria de Compressive Sensing
Resultados
Trabalhos Futuros

O Truque

amostras pontuais $\times$ medidas do sinal

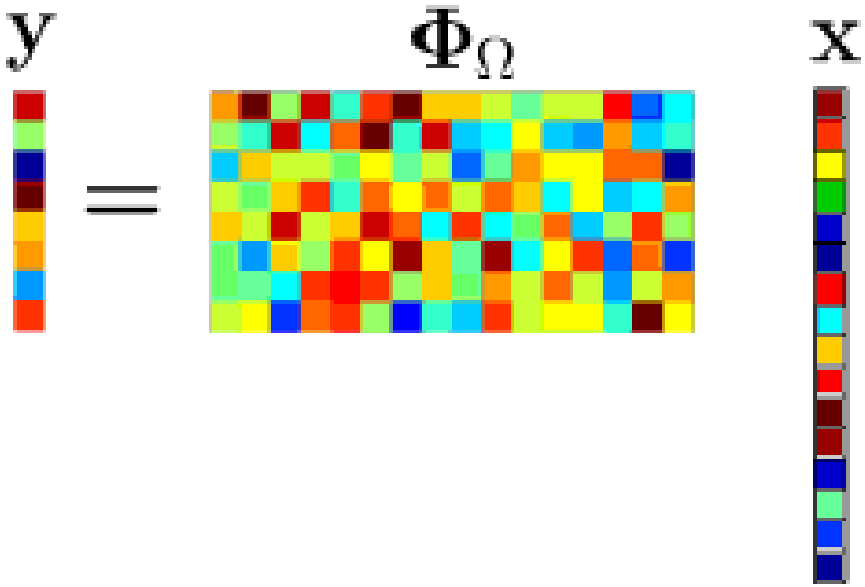
Cada medida y_k é o produto interno sobre uma função teste diferente ϕ_k:

$$y_1 = \langle x, \phi_1 \rangle \,, \quad y_2 = \langle x, \phi_2 \rangle \,, \quad \ldots \quad , \quad y_M = \langle x, \phi_M \rangle$$

onde M é o número de medidas.

Compressão de Imagens
Representação de Sinais
Introdução a Compressive Sensing
Teoria de Compressive Sensing
Resultados
Trabalhos Futuros

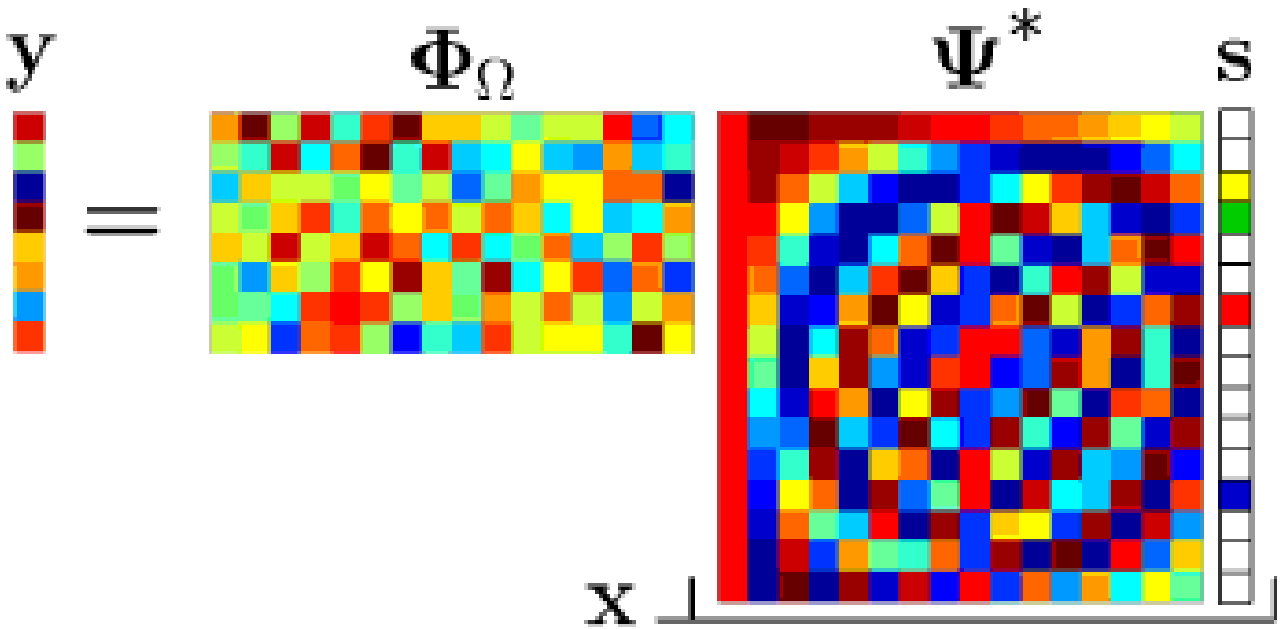
O Problema Algébrico



- Este problema é mal condicionado!

Compressão de Imagens
Representação de Sinais
Introdução a Compressive Sensing
Teoria de Compressive Sensing
Resultados
Trabalhos Futuros

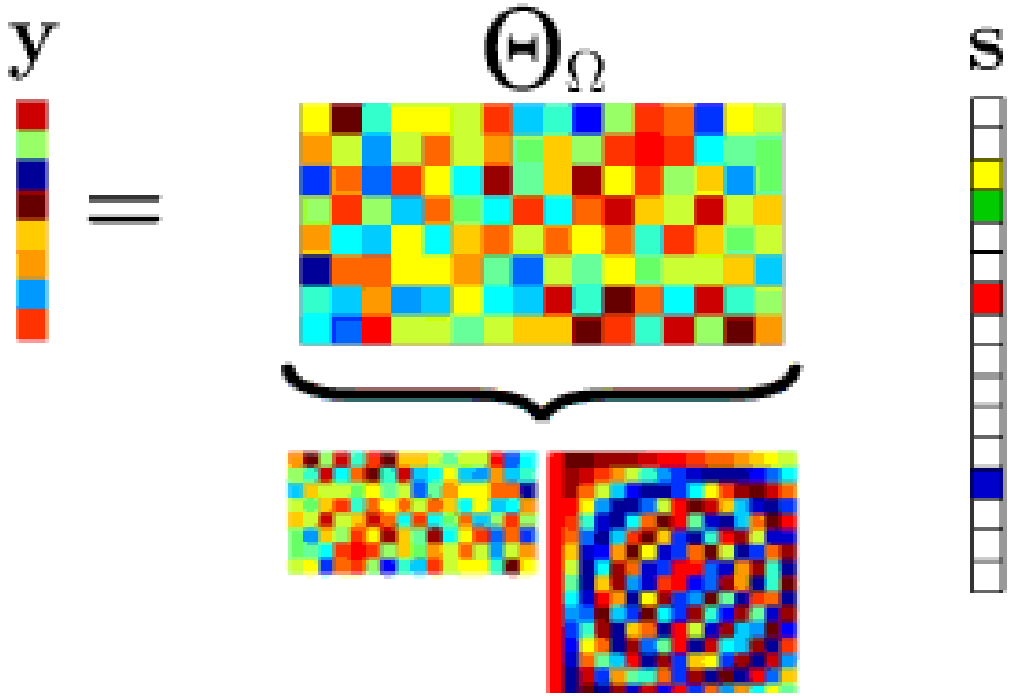
O Problema Algébrico



- Mas e se existe um domínio onde *x* é esparso?

Compressão de Imagens
Representação de Sinais
Introdução a Compressive Sensing
Teoria de Compressive Sensing
Resultados
Trabalhos Futuros

O Problema Algébrico



- $\Theta_\Omega = \Phi_\Omega \Psi^*$
- Medidas $y = \Theta_\Omega s$

Compressão de Imagens
Representação de Sinais
Introdução a Compressive Sensing
Teoria de Compressive Sensing
Resultados
Trabalhos Futuros

- Existem infinitas soluções para o problema.
- Desejamos encontrar aquela que torna s esparso.

Compressão de Imagens
Representação de Sinais
Introdução a Compressive Sensing
Teoria de Compressive Sensing
Resultados
Trabalhos Futuros

Compressão de Imagens
Representação de Sinais
Introdução a Compressive Sensing
Teoria de Compressive Sensing
Resultados
Trabalhos Futuros

- Existem infinitas soluções para o problema.
- Desejamos encontrar aquela que torna *s* esparso.

Problema NP Complexo!!!

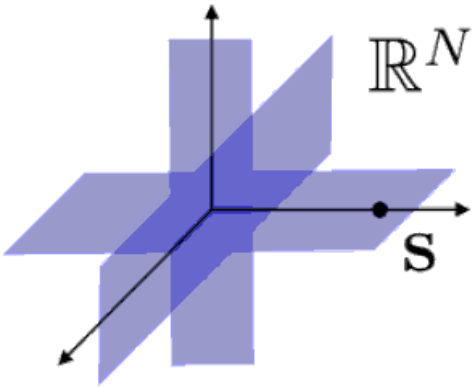
Compressão de Imagens
Representação de Sinais
Introdução a Compressive Sensing
Teoria de Compressive Sensing
Resultados
Trabalhos Futuros

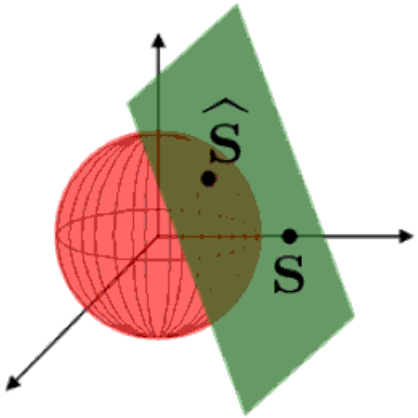
- Existem infinitas soluções para o problema.
- Desejamos encontrar aquela que torna *s* esparso.

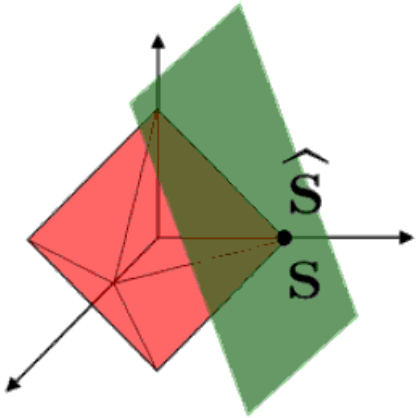
Problema NP Complexo!!!

- Como tornar o problema viável?

A Norma l_1 e a Esparsidade

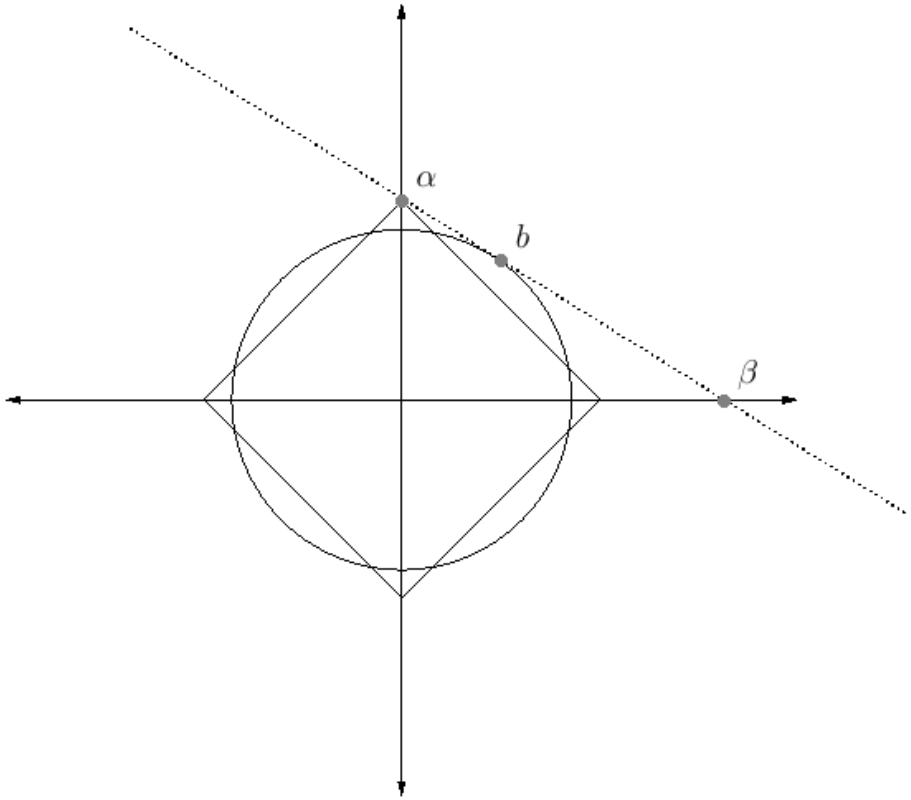






Compressão de Imagens
Representação de Sinais
Introdução a Compressive Sensing
Teoria de Compressive Sensing
Resultados
Trabalhos Futuros

A Norma l_1 e a Esparsidade



Compressão de Imagens
Representação de Sinais
Introdução a Compressive Sensing
Teoria de Compressive Sensing
Resultados
Trabalhos Futuros

O Algoritmo de Reconstrução

$$\min_{s} \|s\|_{l_1} \quad \text{sujeito a} \quad \Theta_\Omega s = y$$

onde

$$\Theta_\Omega = \Phi_\Omega \Psi^*$$

Compressão de Imagens
Representação de Sinais
Introdução a Compressive Sensing
Teoria de Compressive Sensing
Resultados
Trabalhos Futuros

O Algoritmo de Reconstrução

$$\min_{s} \|s\|_{l_1} \quad \text{sujeito a} \quad \Theta_\Omega s = y$$

onde

$$\Theta_\Omega = \Phi_\Omega \Psi^*$$

Parece um boa forma de resolver o problema.

- Mas quando vai funcionar?
- O que devemos assumir sobre a matriz Φ_Ω?
- E sobre o número de medidas?
- Que tipo de resultados podemos garantir?

Compressão de Imagens
Representação de Sinais
Introdução a Compressive Sensing
Teoria de Compressive Sensing
Resultados
Trabalhos Futuros

1 Compressão de Imagens

2 Representação de Sinais

3 Introdução a Compressive Sensing

4 **Teoria de Compressive Sensing**

5 Resultados

6 Trabalhos Futuros

Compressão de Imagens

Representação de Sinais

Introdução a Compressive Sensing

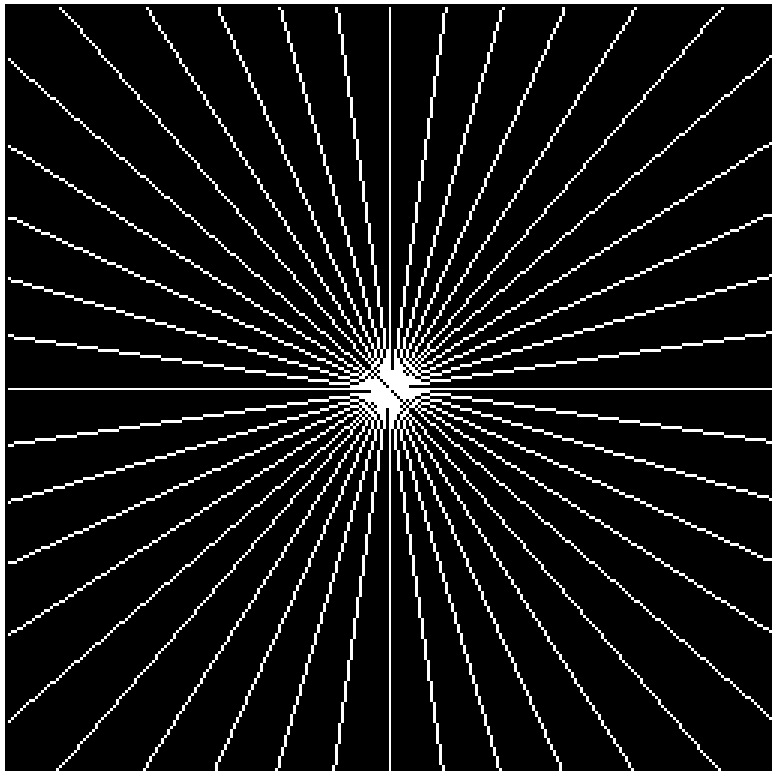
Teoria de Compressive Sensing

Resultados

Trabalhos Futuros

O Primeiro Teorema

- O modelo MRI
- Amostras no domínio da freqüência



Compressão de Imagens
Representação de Sinais
Introdução a Compressive Sensing
Teoria de Compressive Sensing
Resultados
Trabalhos Futuros

Backprojection $\times$ Minimização de *Total Variation*

(a) Imagem de teste

Compressão de Imagens

Representação de Sinais

Introdução a Compressive Sensing

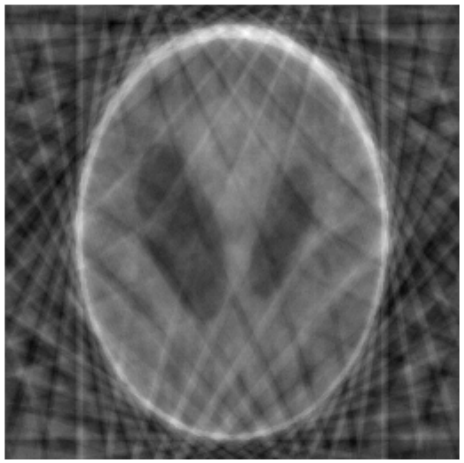
Teoria de Compressive Sensing

Resultados

Trabalhos Futuros

Backprojection $\times$ Minimização de *Total Variation*

(a) Imagem de teste



(b) Reconstrução a partir de backprojection

Compressão de Imagens

Representação de Sinais

Introdução a Compressive Sensing

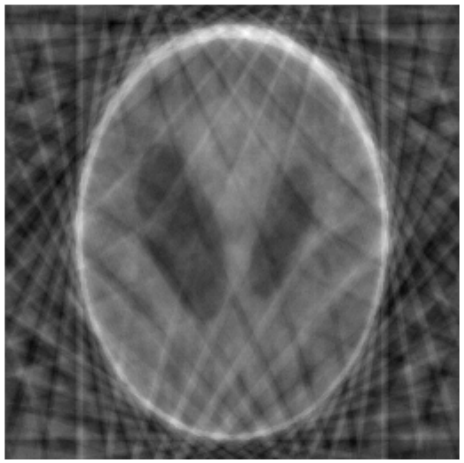
Teoria de Compressive Sensing

Resultados

Trabalhos Futuros

Backprojection × Minimização de *Total Variation*

(a) Imagem de teste



(b) Reconstrução a partir de backprojection

(c) Reconstrução a partir de otimização convexa

Reconstrução perfeita!

Compressão de Imagens
Representação de Sinais
Introdução a Compressive Sensing
Teoria de Compressive Sensing
Resultados
Trabalhos Futuros

Fourier Sampling Theorem

Teorema

- $x \in \mathbb{R}^N$ *é S-esparso*
- *M coeficientes de Fourier selecionados aleatoriamente.*

$$M \geq Const \cdot S \cdot \log N$$

Então a reconstrução é exata com alta probabilidade.

Compressão de Imagens
Representação de Sinais
Introdução a Compressive Sensing
Teoria de Compressive Sensing
Resultados
Trabalhos Futuros

Fourier Sampling Theorem

Compressão de Imagens
Representação de Sinais
Introdução a Compressive Sensing
Teoria de Compressive Sensing
Resultados
Trabalhos Futuros

Teorema

- $x \in \mathbb{R}^N$ *é S-esparso*
- *M coeficientes de Fourier selecionados aleatoriamente.*

$$M \geq Const \cdot S \cdot \log N$$

Então a reconstrução é exata com alta probabilidade.

princípio da incerteza

Fourier Sampling Theorem

Compressão de Imagens
Representação de Sinais
Introdução a Compressive Sensing
Teoria de Compressive Sensing
Resultados
Trabalhos Futuros

Teorema

- $x \in \mathbb{R}^N$ *é S-esparso*
- *M coeficientes de Fourier selecionados aleatoriamente.*

$$M \geq Const \cdot S \cdot \log N$$

Então a reconstrução é exata com alta probabilidade.

princípio da incerteza

$\Longrightarrow$ possibilita os resultados!

Extensão do *Fourier Sampling Theorem*

- outras possibilidades de Φ e Ψ

Definição (Coerência entre Ψ and Φ)

$$\mu(\Phi, \Psi) = \sqrt{N} \max_{i,j} |\langle \phi_i, \psi_j \rangle| \quad , \quad \|\phi_i\|_{l_2} \quad \|\psi_i\|_{l_2} = 1$$

Compressão de Imagens
Representação de Sinais
Introdução a Compressive Sensing
Teoria de Compressive Sensing
Resultados
Trabalhos Futuros

Extensão do *Fourier Sampling Theorem*

- outras possibilidades de Φ e Ψ

Definição (Coerência entre Ψ and Φ)

$$\mu(\Phi, \Psi) = \sqrt{N} \max_{i,j} |\langle \phi_i, \psi_j \rangle| \quad , \quad \|\phi_i\|_{l_2} \quad \|\psi_i\|_{l_2} = 1$$

Teorema

Suponha que

$$M \geq Const \cdot S \cdot \mu^2(\Phi, \Psi) \cdot \log N$$

Então a reconstrução é exata com alta probabilidade.

Compressão de Imagens
Representação de Sinais
Introdução a Compressive Sensing
Teoria de Compressive Sensing
Resultados
Trabalhos Futuros

Princípio da Isometria Restrita (RIP)

Compressão de Imagens

Representação de Sinais

Introdução a Compressive Sensing

Teoria de Compressive Sensing

Resultados

Trabalhos Futuros

Princípio da Isometria Restrita (RIP)

Definição (Constante de Isometria Restrita)

Para cada inteiro $S = 1, 2, \ldots, N$ define-se a constante de isometria S-restrita δ_S de uma matriz Θ_Ω como o menor número tal que

$$(1 - \delta_S)\|s\|_{l_2}^2 \leq \|\Theta_\Omega s\|_{l_2}^2 \leq (1 + \delta_S)\|s\|_{l_2}^2$$

para todos vetores S-esparsos.

RIP $\Rightarrow$ propriedade de Θ_Ω relacionada à existência e limitação de δ_S

Compressão de Imagens
Representação de Sinais
Introdução a Compressive Sensing
Teoria de Compressive Sensing
Resultados
Trabalhos Futuros

Princípio da Isometria Restrita (RIP)

Definição (Constante de Isometria Restrita)

Para cada inteiro $S = 1, 2, \ldots, N$ define-se a constante de isometria S-restrita δ_S de uma matriz Θ_Ω como o menor número tal que

$$(1 - \delta_S)\|s\|_{l_2}^2 \leq \|\Theta_\Omega s\|_{l_2}^2 \leq (1 + \delta_S)\|s\|_{l_2}^2$$

para todos vetores S-esparsos.

RIP $\Rightarrow$ propriedade de Θ_Ω relacionada à existência e limitação de δ_S

- Na verdade, RIP garante que a solução mais esparsa é única!

Compressão de Imagens
Representação de Sinais
Introdução a Compressive Sensing
Teoria de Compressive Sensing
Resultados
Trabalhos Futuros

Se as colunas de Θ_Ω forem l.d., $\exists a, b$ tais que

$$y = \Theta_\Omega a = \Theta_\Omega b$$

Compressão de Imagens

Representação de Sinais

Introdução a Compressive Sensing

Teoria de Compressive Sensing

Resultados

Trabalhos Futuros

Se as colunas de Θ_Ω forem l.d., $\exists a, b$ tais que

$$y = \Theta_\Omega a = \Theta_\Omega b$$

- Isso sempre ocorre pois Θ_Ω é *gorda*!
- Mas, só é necessário que a combinação de quaisquer S colunas de Θ_Ω seja l.i.!

Compressão de Imagens
Representação de Sinais
Introdução a Compressive Sensing
Teoria de Compressive Sensing
Resultados
Trabalhos Futuros

Se as colunas de Θ_Ω forem l.d., $\exists a, b$ tais que

$$y = \Theta_\Omega a = \Theta_\Omega b$$

- Isso sempre ocorre pois Θ_Ω é *gorda*!
- Mas, só é necessário que a combinação de quaisquer S colunas de Θ_Ω seja l.i.!

- Se $\delta_{2S} < 1$ a solução que maximiza a esparsidade é única.

Compressão de Imagens
Representação de Sinais
Introdução a Compressive Sensing
Teoria de Compressive Sensing
Resultados
Trabalhos Futuros

Se as colunas de Θ_Ω forem l.d., $\exists a, b$ tais que

$$y = \Theta_\Omega a = \Theta_\Omega b$$

- Isso sempre ocorre pois Θ_Ω é *gorda*!
- Mas, só é necessário que a combinação de quaisquer S colunas de Θ_Ω seja l.i.!

- Se $\delta_{2S} < 1$ a solução que maximiza a esparsidade é única.

Seja s_1 e s_2 S-esparsos tais que $\Theta_\Omega s_1 = \Theta_\Omega s_2 = y$.

Seja $h = s_1 - s_2$.

$$\Theta_\Omega h = \Theta_\Omega(s_1 - s_2) = \Theta_\Omega s_1 - \Theta_\Omega s_2 = 0.$$

Já que h é $2S$-esparso, temos pela RIP:

$$\underbrace{(1 - \delta_{2S})}_{>0} \|h\|^2 \leq \|\Theta_\Omega h\|^2 = 0 \Rightarrow h = 0$$

Compressão de Imagens
Representação de Sinais
Introdução a Compressive Sensing
Teoria de Compressive Sensing
Resultados
Trabalhos Futuros

Se as colunas de Θ_Ω forem l.d., $\exists a, b$ tais que

$$y = \Theta_\Omega a = \Theta_\Omega b$$

- Isso sempre ocorre pois Θ_Ω é *gorda*!
- Mas, só é necessário que a combinação de quaisquer S colunas de Θ_Ω seja l.i.!

- Se $\delta_{2S} < 1$ a solução que maximiza a esparsidade é única.

- Se $\delta_{2S} < \sqrt{2} - 1$ a solução que maximiza a esparsidade e a que minimiza a norma l_1 são únicas e equivalentes.

Teorema

Seja s S-esparso. Se para a matriz Θ_Ω a constante de isometria é tal que

$$\delta_{2S} < \sqrt{2} - 1$$

Então a reconstrução é exata com alta probabilidade.

Compressão de Imagens
Representação de Sinais
Introdução a Compressive Sensing
Teoria de Compressive Sensing
Resultados
Trabalhos Futuros

CS Robusto

A teoria deve ser robusta e considerar

- o sinal não é exatamente esparso; ou
- medições estão corrompidas por ruído.

Compressão de Imagens
Representação de Sinais
Introdução a Compressive Sensing
Teoria de Compressive Sensing
Resultados
Trabalhos Futuros

CS Robusto

A teoria deve ser robusta e considerar

- o sinal não é exatamente esparso; ou
- medições estão corrompidas por ruído.

Seja:

- s_S a melhor aproximação S-esparsa de s

Compressão de Imagens
Representação de Sinais
Introdução a Compressive Sensing
Teoria de Compressive Sensing
Resultados
Trabalhos Futuros

CS Robusto

A teoria deve ser robusta e considerar

- o sinal não é exatamente esparso; ou
- medições estão corrompidas por ruído.

Seja:

- s_S a melhor aproximação S-esparsa de s
- $y = \Phi x + n$, onde o ruído n é limitado por $\|n\|_{l_2} \leq \epsilon$

Compressão de Imagens
Representação de Sinais
Introdução a Compressive Sensing
Teoria de Compressive Sensing
Resultados
Trabalhos Futuros

CS Robusto

A teoria deve ser robusta e considerar

- o sinal não é exatamente esparso; ou
- medições estão corrompidas por ruído.

Seja:

- s_S a melhor aproximação S-esparsa de s
- $y = \Phi x + n$, onde o ruído n é limitado por $\|n\|_{l_2} \leq \epsilon$

Teorema

Se $\delta_{2S} < \sqrt{2} - 1$, *a solução* $\hat{s}$ *para*

$$\hat{s} = \min_s \|s\|_{l_1} \quad \textit{sujeito a} \quad \|\Theta_\Omega s - y\|_{l_2} \leq \epsilon$$

obedece

$$\|\hat{s} - s\|_{l_2} \leq C_0 s^{-1/2} \cdot \|\hat{s} - s_S\|_{l_1} + C_1 \epsilon$$

para valores razoáveis das constantes C_0 *e* C_1.

Compressão de Imagens
Representação de Sinais
Introdução a Compressive Sensing
Teoria de Compressive Sensing
Resultados
Trabalhos Futuros

1 Compressão de Imagens

2 Representação de Sinais

3 Introdução a Compressive Sensing

4 Teoria de Compressive Sensing

5 **Resultados**

6 Trabalhos Futuros

Compressão de Imagens

Representação de Sinais

Introdução a Compressive Sensing

Teoria de Compressive Sensing

Resultados

Trabalhos Futuros

Procedimento Experimental

- Diferentes cenários de aquisição de dados
- Simulação com imagens já armazenadas
- Variações do número de medida
- Avaliação baseada em PSNR
- Bases
  - Ψ: DCT e Wavelets
  - Φ: Noiselets : incoerente, ortogonal e auto-adjunta

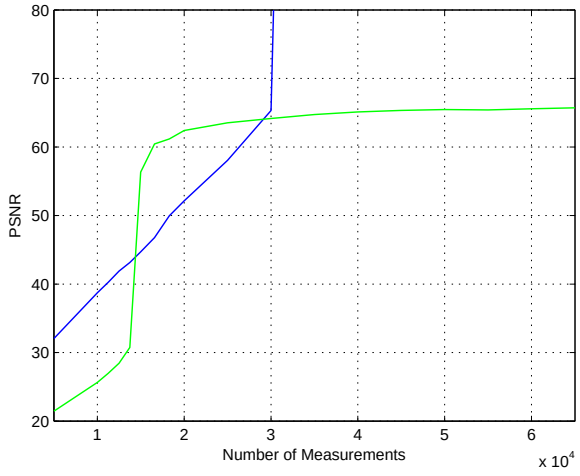
$$\Phi = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- Otimização: `l1-Magic`

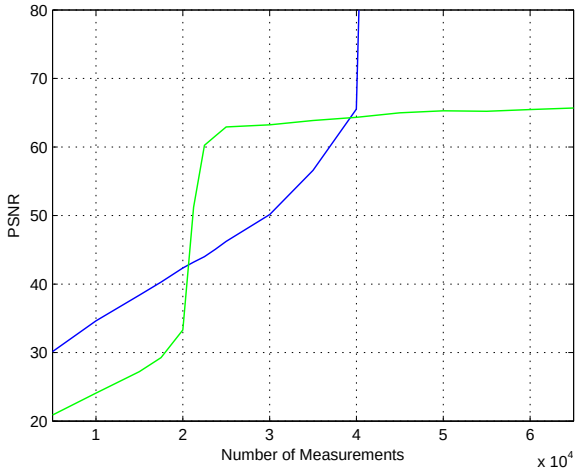
$\hat{s} = \min_s \|s\|_{l_1}$ sujeito a $y = \Theta_\Omega s \Rightarrow$ não converge!
Solução:
$\hat{s} = \min_s \|s\|_{l_1}$ sujeito a $\|y - \Theta_\Omega s\|_{l_2} \leq \epsilon$

Compressão de Imagens
Representação de Sinais
Introdução a Compressive Sensing
Teoria de Compressive Sensing
Resultados
Trabalhos Futuros

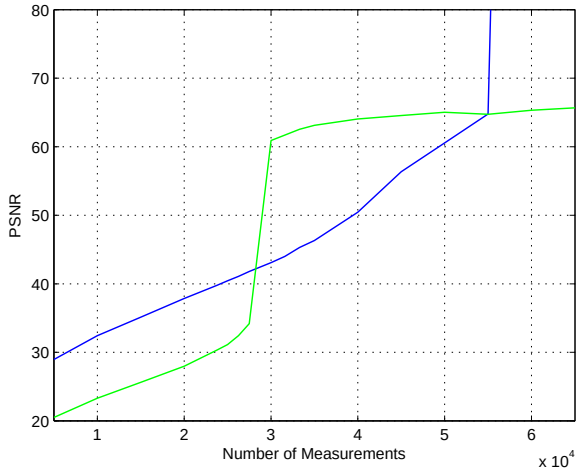
Imagem Esparsa (DCT)



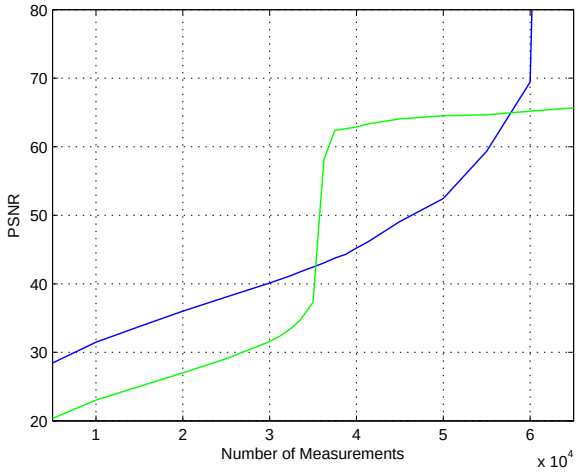
(a) Imagem 3.5k-Esparsa



(b) Imagem 6k-Esparsa



(c) Imagem 10k-Esparsa



(d) Imagem 14k-Esparsa

Figura: DCT Linear (azul), CS baseado na DCT (verde).

Compressão de Imagens
Representação de Sinais
Introdução a Compressive Sensing
Teoria de Compressive Sensing
Resultados
Trabalhos Futuros

Imagem Aproximadamente Esparsa (DCT)

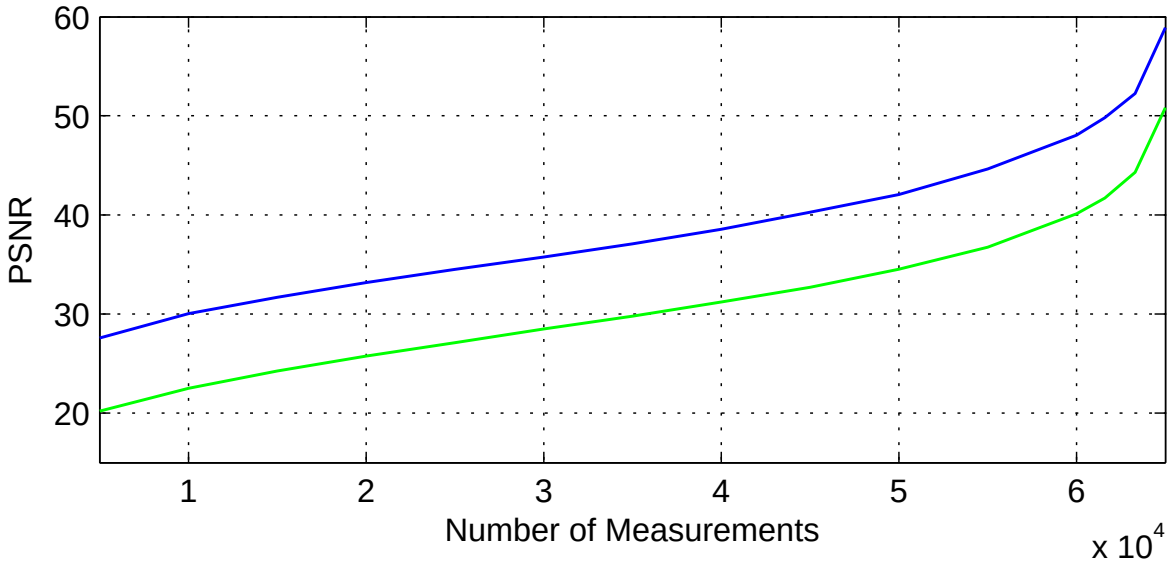


Figura: DCT Linear (azul), CS baseado na DCT (verde).

Compressão de Imagens
Representação de Sinais
Introdução a Compressive Sensing
Teoria de Compressive Sensing
Resultados
Trabalhos Futuros

Imagem Aproximadamente Esparsa (Wavelets)

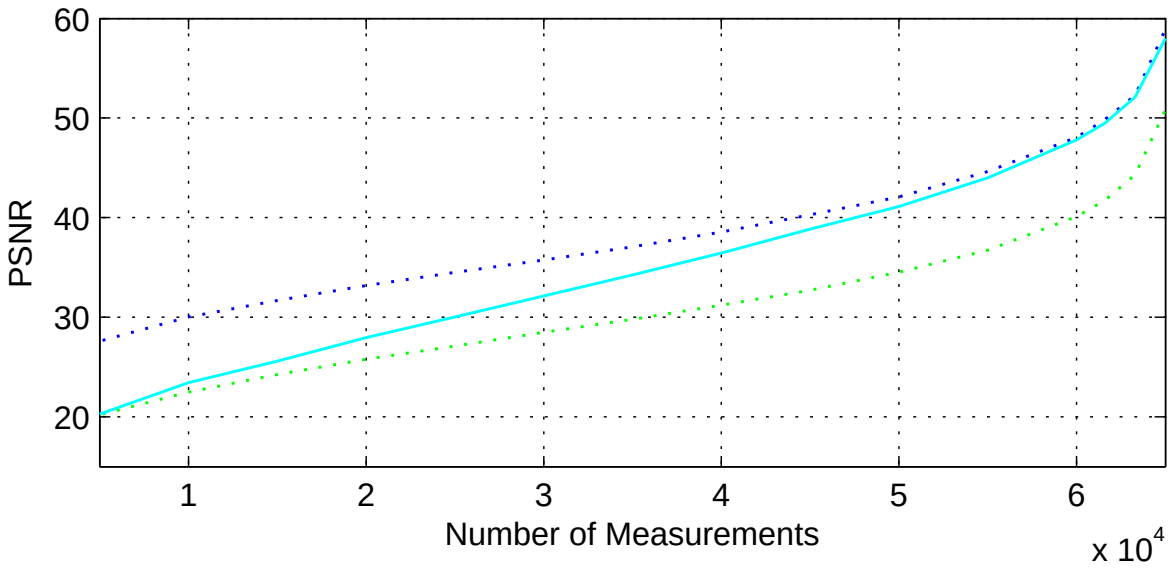


Figura: DCT Linear (azul), CS baseado na DCT (verde), CS baseado em Wavelets (cian).

Compressão de Imagens
Representação de Sinais
Introdução a Compressive Sensing
Teoria de Compressive Sensing
Resultados
Trabalhos Futuros

Avaliação Taxa $\times$ Distorção

- Diversos passos de quantização
- Variações do número de medida
- Avaliação baseada em PSNR

Cálculo da taxa:

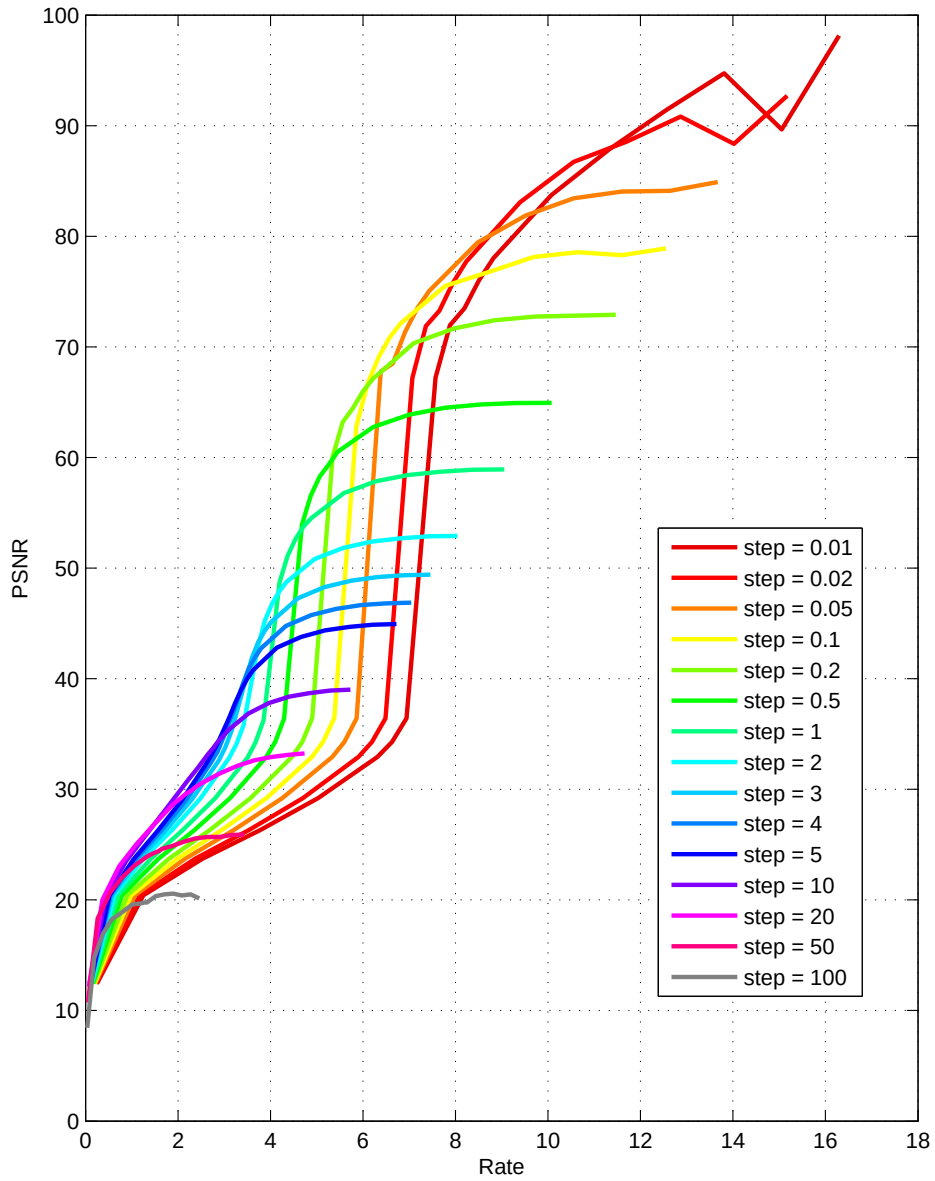
$$Taxa = \frac{M \cdot E_y}{256^2}$$

onde

$$E_y = \sum_{k=1}^{K} p_k \cdot \log\left(\frac{1}{p_k}\right)$$

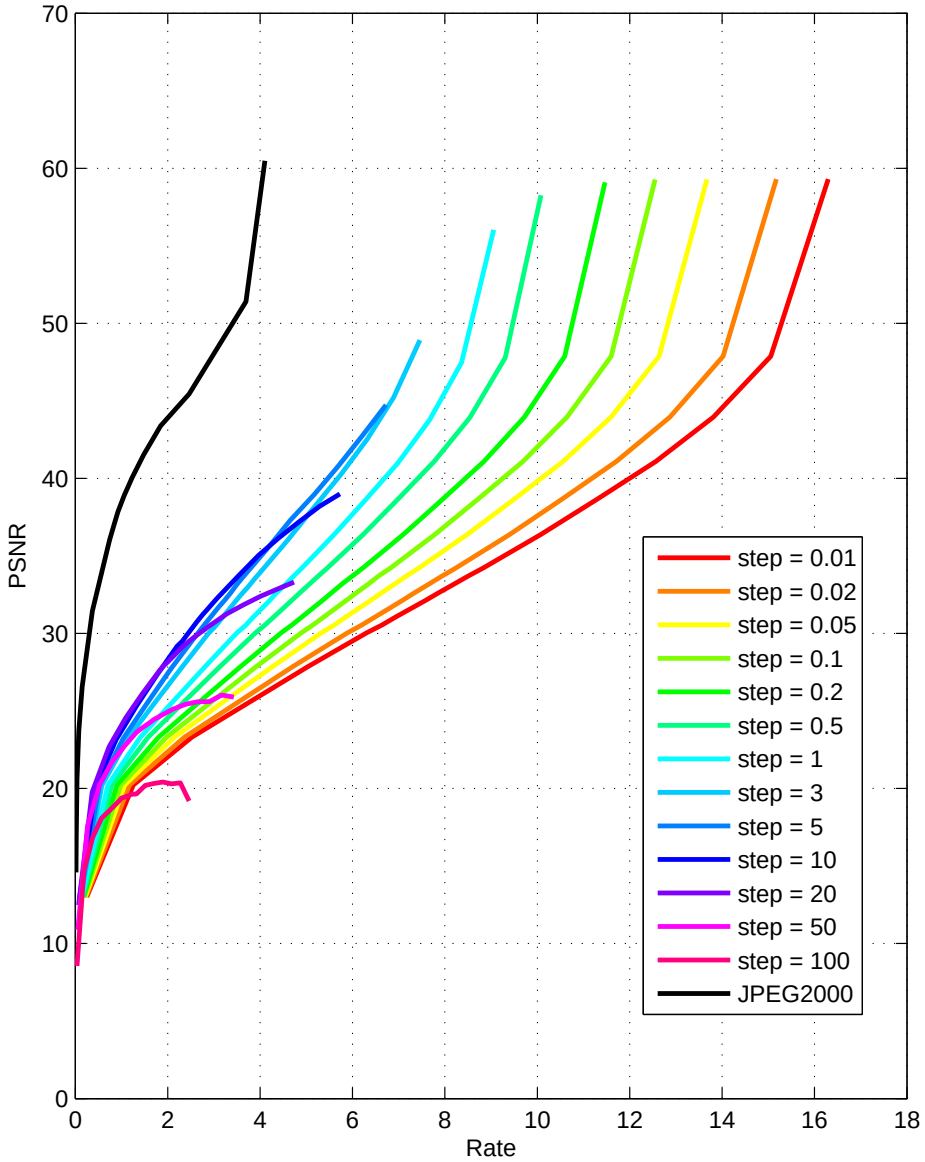
Compressão de Imagens
Representação de Sinais
Introdução a Compressive Sensing
Teoria de Compressive Sensing
Resultados
Trabalhos Futuros

Imagem Esparsa Quantizada



Compressão de Imagens
Representação de Sinais
Introdução a Compressive Sensing
Teoria de Compressive Sensing
Resultados
Trabalhos Futuros

Imagem Original Quantizada



Compressão de Imagens

Representação de Sinais

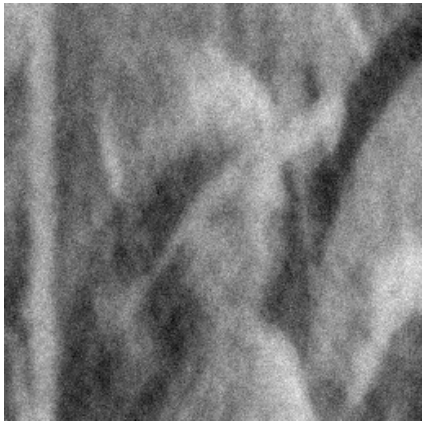
Introdução a Compressive Sensing

Teoria de Compressive Sensing

Resultados

Trabalhos Futuros

Imagem Aproximadamente Esparsa no Domínio DCT



(a) *Medidas* $= 5k$

(b) *Medidas* $= 20k$

(c) *Medidas* $= 35k$

(d) *Medidas* $= 50k$

Compressão de Imagens

Representação de Sinais

Introdução a Compressive Sensing

Teoria de Compressive Sensing

Resultados

Trabalhos Futuros

Imagem Aproximadamente Esparsa no Domínio Wavelet

(a) *Medidas* $= 5k$

(b) *Medidas* $= 20k$

(c) *Medidas* $= 35k$

(d) *Medidas* $= 50k$

Compressão de Imagens

Representação de Sinais

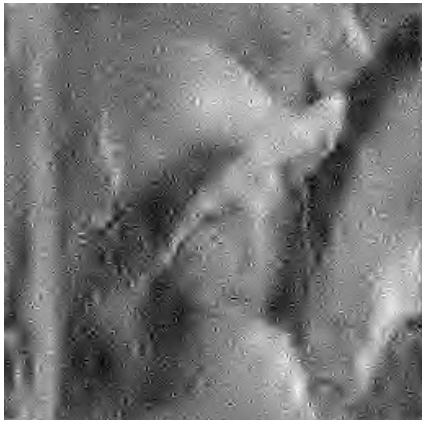
Introdução a Compressive Sensing

Teoria de Compressive Sensing

Resultados

Trabalhos Futuros

Imagem Quantizada



(a) $Medidas = 5k$,
Taxa $= 0.36 bits/pixel$

(b) $Medidas = 20k$,
Taxa $= 1.46 bits/pixel$

(c) $Medidas = 35k$,
Taxa $= 3.09 bits/pixel$

(d) $Medidas = 50k$,
Taxa $= 5.17 bits/pixel$

Compressão de Imagens
Representação de Sinais
Introdução a Compressive Sensing
Teoria de Compressive Sensing
Resultados
Trabalhos Futuros

1 Compressão de Imagens

2 Representação de Sinais

3 Introdução a Compressive Sensing

4 Teoria de Compressive Sensing

5 Resultados

6 Trabalhos Futuros

Compressão de Imagens

Representação de Sinais

Introdução a Compressive Sensing

Teoria de Compressive Sensing

Resultados

Trabalhos Futuros

Trabalhos Futuros

- Norma *Total-Variation*
- Alternativas para Noiselets
- Wavelets Biortogonais
- Particionamento em blocos

Compressão de Imagens
Representação de Sinais
Introdução a Compressive Sensing
Teoria de Compressive Sensing
Resultados
Trabalhos Futuros

Obrigada pela Atenção!

Compressão de Imagens

Representação de Sinais

Introdução a Compressive Sensing

Teoria de Compressive Sensing

Resultados

Trabalhos Futuros