



Universidade Federal
do Rio de Janeiro

Escola Politécnica

UMA SOLUÇÃO ESTÁTICA PARA TENSÕES LIMITE EM ANÉIS SUBMETIDOS À COMPRESSÃO UNIAXIAL

Poti-Ayrá Bernabé Moreira

Projeto de Graduação apresentado ao Curso de Engenharia Mecânica da Escola Politécnica da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Engenheiro.

Orientador: Prof. José Luís Lopes da Silveira

RIO DE JANEIRO
ABRIL DE 2013

UMA SOLUÇÃO ESTÁTICA PARA TENSÕES LIMITE EM ANÉIS SUBMETIDOS
À COMPRESSÃO UNIAXIAL

Poti-Ayrá Bernabé Moreira

PROJETO FINAL SUBMETIDO AO CORPO DOCENTE DO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA DA ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE ENGENHEIRO MECÂNICO.

Aprovado por:

Prof. José Luís Lopes da Silveira

Prof.^a Anna Carla Monteiro de Araújo

Prof.^a Lavinia Maria Sanabio Alves Borges

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

ABRIL DE 2013

Moreira, Poti-Ayrá Bernabé

Solução Aproximada para um Anel de Material Poroso
Submetido à Compressão Uniaxial/ Poti-Ayrá Bernabé
Moreira. – Rio de Janeiro: UFRJ/ Escola Politécnica, 2013.

V, 32 p.: il.; 29,7 cm.

Orientador: José Luís Lopes da Silveira

Projeto de Graduação – UFRJ/ POLI/ Engenharia
Mecânica, 2013.

Referências Bibliográficas: p. 32.

1. Método dos Blocos. 2. Função de Escoamento. 3.
Critério de Drucker-Prager. I. Lopes da Silveira, José Luís. II.
Universidade Federal do Rio de Janeiro, UFRJ, Engenharia
Mecânica. III. Título

Resumo

Uma solução aproximada para as tensões em um anel de material poroso submetido à compressão entre duas placas planas é proposta utilizando o método dos blocos e a função de escoamento de Drucker-Prager. Para isso, primeiramente é feita uma análise comparativa entre duas soluções aproximadas, para um disco e para um anel, ambos de material denso, sendo escolhida entre essas duas soluções a mais adequada para a análise de um anel de material poroso.

Abstract

An approximate solution to model the stresses in a ring, made of porous material, subjected to axial compression between two plates is proposed using the slab method and the Drucker-Prager yield function. Initially, a comparative analysis for two approximate solutions is presented, for a disk and for a ring, both made of dense material, and the most appropriate is used for the analysis of a ring made of porous material.

Índice

1	Introdução.....	1
2	Solução para um Disco Denso.....	3
2.1	Solução Clássica	3
2.2	Solução Proposta.....	5
2.3	Comparação das Soluções	8
3	Solução para um Anel Denso	9
3.1	Caso 1 – Solução análoga à clássica para o disco.....	10
3.2	Caso 2 – Solução análoga à proposta para o disco	14
3.3	Comparação das Soluções	18
4	Critério de Escoamento	20
4.1	Critério de Escoamento para Simetria Axial	23
5	Solução para um Anel Poroso	26
5.1	Comparação com Modelo Existente	29
6	Conclusão	31
	Referências	32

1 Introdução

Este trabalho tem como objetivo desenvolver uma solução que descreva o comportamento de um anel de material poroso quando submetido à compressão entre duas placas planas. Para isso, primeiro serão apresentadas as soluções para o comportamento de um disco de material denso, isto é, um material livre de porosidade, calculadas por duas hipóteses distintas. A primeira hipótese conduz a uma solução já conhecida, presente na literatura [1], que será utilizada para validar tanto a segunda hipótese quanto as soluções obtidas para um anel também de material denso. Em seguida, serão apresentadas as soluções para um anel de material denso, utilizando as mesmas hipóteses, com o objetivo de selecionar a melhor solução para ser posteriormente utilizada na análise do comportamento do anel de material poroso.

O método dos blocos (um método baseado em tensões) é um método de limite inferior e foi utilizado para obter uma solução aproximada do problema, esse método é amplamente utilizado na análise da conformação mecânica dos materiais [2]. O método dos blocos é um método simplificado, porém muito utilizado, pois seus resultados são frequentemente aproximações razoáveis, apesar de ser baseado numa condição de equilíbrio não verdadeira na zona de deformação. Para simplificação do processo supõe-se que em todos os pontos do corpo as direções principais podem ser consideradas um sistema coordenado de referência, onde essas tensões sofrem variações principalmente em uma direção e podem ser consideradas constantes nas outras.

Para estabelecer o critério de escoamento nos modelos de material sólido foi utilizado o critério de Tresca, devido a sua simplicidade, e para o modelo de material poroso foi utilizado o critério de escoamento de Drucker-Prager [3,4]. O critério de escoamento de Drucker-Prager leva em consideração não somente a tensão desviadora, mas também a tensão hidrostática e também satisfaz as condições de simetria e convexidade que são necessárias para a teoria de plasticidade de materiais porosos.

Para a utilização dos critérios de escoamento será considerado um coeficiente de atrito grande o suficiente para que a tensão radial seja compressiva em todo r considerando valores obtidos por Robinson e Arrstrong [5].

Uma solução para esse caso foi apresentada por Hawkyard e Johnson [6], mas utilizando outros métodos de solução e outras teorias para descrição do atrito no contato, como a lei de Seibel [2], diferentemente desse estudo que irá utilizar a lei de Coulomb.

2 Solução para um Disco Denso

Inicialmente será estudada uma primeira hipótese para a análise do disco, que conduz a uma solução já conhecida e, em seguida, uma hipótese proposta, que fornecerá uma solução alternativa para o problema. Para essas soluções será considerado um disco de material denso submetido à compressão entre duas placas planas como indicado na figura 1.

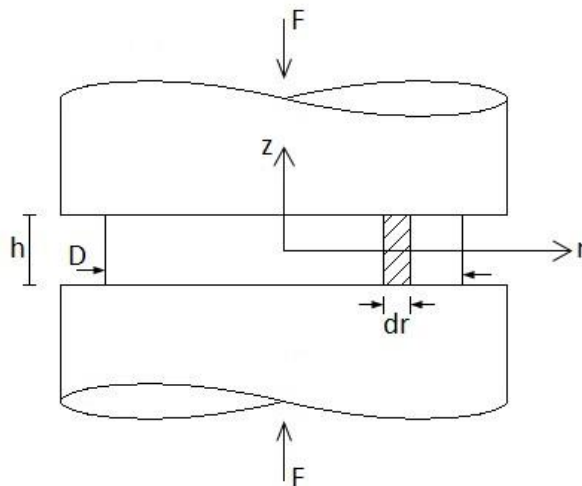


Figura 1 – Compressão de um disco

2.1 Solução Clássica

Para a primeira solução será utilizado o método dos blocos, onde é necessário considerar uma condição de equilíbrio de um elemento infinitesimal do disco, denominado bloco.

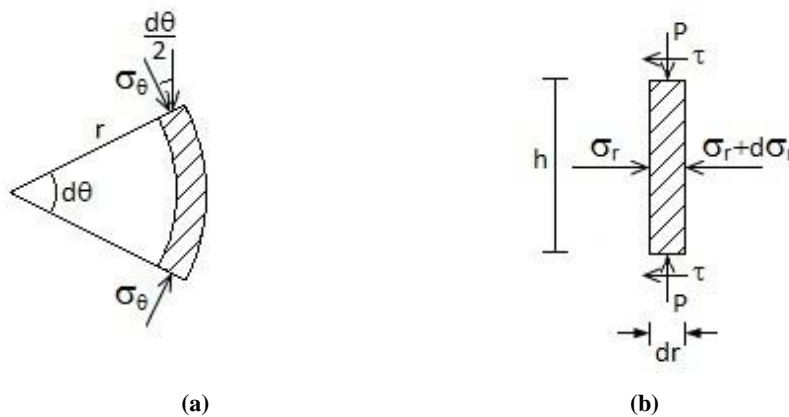


Figura 2 - Bloco isolado. (a) vista superior (b) vista lateral

Fazendo a equação de equilíbrio das forças representadas na figura 2 na direção radial, tem-se:

$$\sigma_r h \cdot r d\theta - (\sigma_r + d\sigma_r) h (r + dr) d\theta - 2\tau r dr d\theta + 2\sigma_\theta \text{sen} \frac{d\theta}{2} h dr = 0 \quad (1)$$

Fazendo a seguinte consideração para ângulos muito pequenos

$$\text{sen} \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2}, \quad d\theta \ll 1 \quad (2)$$

e eliminando $d\theta$ da equação (1), tem-se:

$$\sigma_r h r - \sigma_r h r - \sigma_r h dr - d\sigma_r h r - d\sigma_r h dr - 2\tau r dr + \sigma_\theta h dr = 0 \quad (3)$$

Reorganizando os termos, obtém-se:

$$\sigma_r h dr + d\sigma_r h r + 2\tau r dr - \sigma_\theta h dr = 0 \quad (4)$$

A seguir, é utilizada a Lei de Coulomb para relacionar a tensão cisalhante e a pressão aplicada, por meio do coeficiente atrito μ .

$$\tau = \mu P \quad (5)$$

Substituindo a equação (5) na equação (4), resulta:

$$(\sigma_r - \sigma_\theta) h dr + d\sigma_r h r + 2\mu P r dr = 0 \quad (6)$$

Substituindo $r = 0$ na equação (6) se obtém

$$\sigma_r = \sigma_\theta \quad (7)$$

Supondo que (7) é válida para todo r , obtém-se

$$d\sigma_r h + 2\mu P dr = 0 \quad (8)$$

Essa hipótese é comumente utilizada na solução desse problema, por isso será utilizada como parâmetro de comparação para os modelos desenvolvidos posteriormente.

Usando o critério de Tresca para obter uma equação para P :

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_y \quad (9)$$

onde σ_y é a tensão de escoamento a tração, que é considerada igual a tensão de escoamento a compressão.

Nesse caso, $\sigma_1 = -\sigma_r$ e $\sigma_3 = -P$. Substituindo na equação (9), obtém-se:

$$P = \sigma_y + \sigma_r \quad (10)$$

e substituindo (10) em (8), tem-se:

$$d\sigma_r h = -2\mu(\sigma_y + \sigma_r) dr \quad (11)$$

Separando as variáveis e integrando ambos os lados, sabendo que em $r = D/2$, $\sigma_r = 0$:

$$\int_0^{\sigma_r} \frac{d\sigma_r}{(\sigma_y + \sigma_r)} = - \int_{\frac{D}{2}}^r \frac{2\mu}{h} dr \quad (12)$$

$$\ln\left(\frac{\sigma_y + \sigma_r}{\sigma_y}\right) = \frac{2\mu}{h}\left(\frac{D}{2} - r\right) \quad (13)$$

Isolando σ_r , se obtém a solução para a solução clássica

$$\sigma_r = \sigma_y \left(e^{\frac{2\mu}{h}\left(\frac{D}{2} - r\right)} - 1 \right) \quad (14)$$

2.2 Solução Proposta

Para essa solução também será utilizado o método dos blocos, com isso, é necessário novamente considerar uma condição de equilíbrio de um elemento infinitesimal do disco.

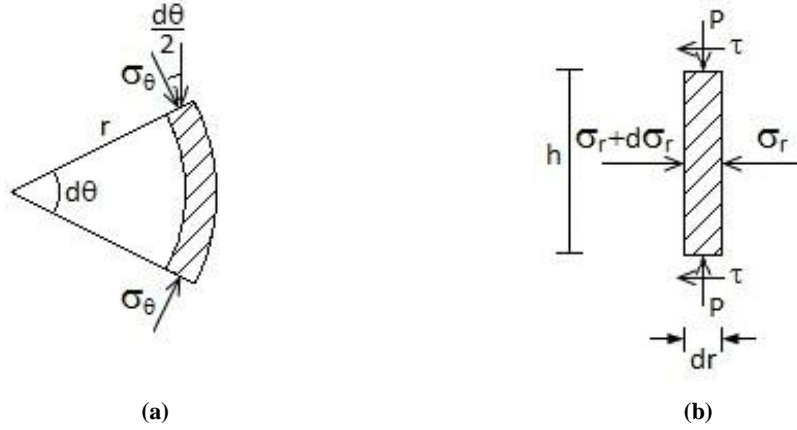


Figura 3 – Bloco isolado. (a) vista superior (b) vista lateral

Fazendo a equação de equilíbrio das forças, representadas na figura 3, em um elemento infinitesimal de um disco na direção radial, tem-se:

$$(\sigma_r + d\sigma_r)hr d\theta - \sigma_r h(r + dr) d\theta - 2\tau r dr d\theta + 2\sigma_\theta \text{sen} \frac{d\theta}{2} h dr = 0 \quad (15)$$

Fazendo a seguinte consideração para ângulos muito pequenos

$$\text{sen} \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2}, \quad d\theta \ll 1 \quad (16)$$

e eliminando $d\theta$ da equação (15)

$$\sigma_r hr + d\sigma_r hr - \sigma_r hr - \sigma_r h dr - 2\tau r dr + \sigma_\theta h dr = 0 \quad (17)$$

Reorganizando os termos, obtém-se

$$\sigma_r h dr - d\sigma_r hr + 2\tau r dr - \sigma_\theta h dr = 0 \quad (18)$$

Utilizando novamente a Lei de Coulomb para relacionar a tensão cisalhante e a pressão aplicada por meio do coeficiente atrito μ no disco e substituindo a equação (5) na equação (18) tem-se:

$$(\sigma_r - \sigma_\theta) h dr - d\sigma_r hr + 2\mu Pr dr = 0 \quad (19)$$

Em $r = r_e = D/2$, será considerada a variação de tensão radial muito pequena, ou seja, $d\sigma_r \approx 0$. Logo, da equação (19), se obtém

$$(\sigma_r - \sigma_\theta)h + 2\mu Pr_e = 0 \quad (20)$$

e resolvendo para σ_θ ,

$$\sigma_\theta = \sigma_r + \frac{2\mu}{h} Pr_e \quad (21)$$

Supondo que (21) é válida para todo r , tem-se

$$\left(\sigma_r - \sigma_r - \frac{2\mu}{h} Pr_e\right) h dr - d\sigma_r hr + 2\mu Pr dr = 0 \quad (22)$$

e reorganizando os termos,

$$d\sigma_r hr - 2\mu P(r - r_e) dr = 0 \quad (23)$$

Usando o critério de Tresca para obter uma equação para P :

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_y \quad (24)$$

Nesse caso, $\sigma_1 = -\sigma_r$ e $\sigma_3 = -P$. Logo, substituindo na equação (24) resulta

$$P = \sigma_y + \sigma_r \quad (25)$$

e substituindo (25) em (23), obtém-se

$$d\sigma_r hr = 2\mu(\sigma_y + \sigma_r)(r - r_e) dr \quad (26)$$

Separando as variáveis e integrando ambos os lados, sabendo que em $r = r_e$, $\sigma_r = 0$:

$$\int_0^{\sigma_r} \frac{d\sigma_r}{\sigma_y + \sigma_r} = \int_{r_e}^r \frac{2\mu}{h} \frac{(r - r_e)}{r} dr \quad (27)$$

$$\ln\left(\frac{\sigma_y + \sigma_r}{\sigma_y}\right) = \frac{2\mu}{h}(r - r_e) + \ln\left(\frac{r_e}{r}\right)^{\frac{2\mu r_e}{h}} \quad (28)$$

Resolvendo para σ_r

$$\sigma_r = \sigma_y \left[\left(\frac{r_e}{r}\right)^{\frac{2\mu r_e}{h}} e^{\frac{2\mu}{h}(r - r_e)} - 1 \right] \quad (29)$$

e substituindo $r_e = D/2$ na equação (29), se obtém a solução para a segunda hipótese

$$\sigma_r = \sigma_y \left[\left(\frac{D}{2r} \right)^{\frac{\mu D}{h}} \cdot e^{\frac{2\mu}{h}(r-\frac{D}{2})} - 1 \right] \quad (30)$$

2.3 Comparação das Soluções

Observando o gráfico da figura 4, nota-se que para a segunda solução ao se aproximar do raio zero a curva tende a infinito, diferente da curva da solução clássica que possui um valor definido. Quando as curvas se aproximam da extremidade do disco, a segunda equação possui uma curva menos acentuada, consistente com a hipótese de variação da tensão radial muito pequena nas proximidades desse ponto.

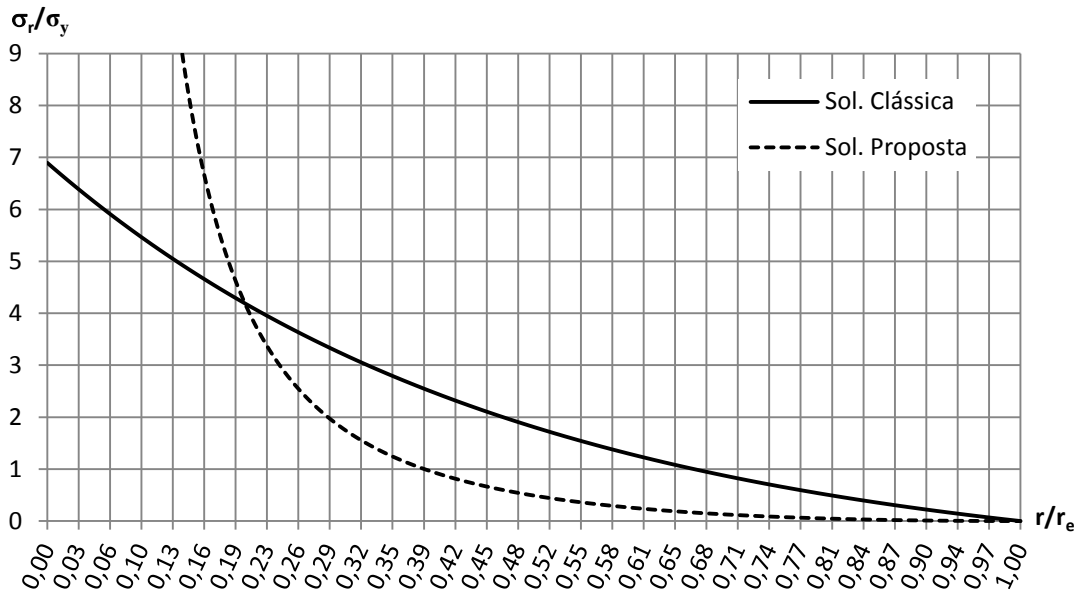


Figura 4 – Gráfico de σ_r

A seguir serão utilizadas as mesmas duas hipóteses para um anel sólido, para que seja possível analisar a diferença de comportamento das curvas para este caso, da mesma forma que foi feito para o disco.

3 Solução para um Anel Denso

Nesse capítulo serão estudadas para um anel as mesmas duas hipóteses estudadas para um disco. Para essas soluções vamos considerar um anel de material denso submetido à compressão entre duas placas planas, como indicado na figura 5, com os raios representados como descritos na figura 6.

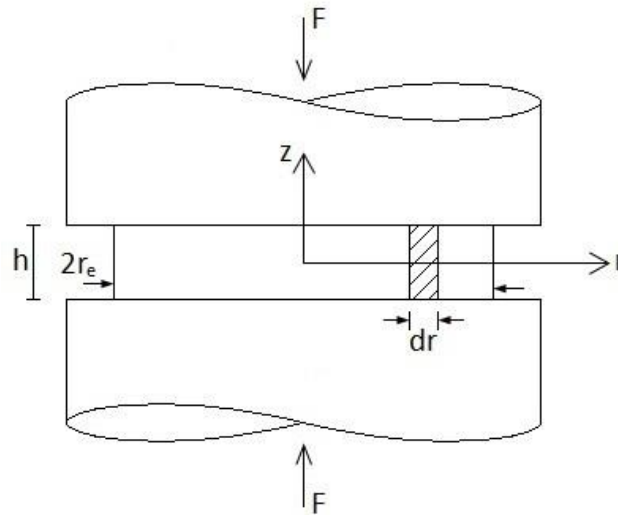


Figura 5 – Compressão de um anel

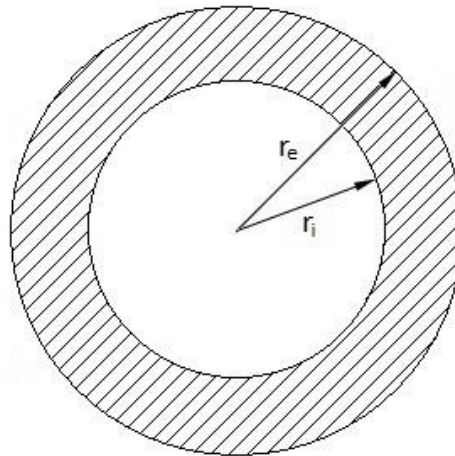


Figura 6 – Raios interno e externo

Para que o problema de um anel possa ser resolvido, é necessária a consideração de que existe um raio intermediário r_c onde a tensão radial é máxima.

3.1 Caso 1 – Solução análoga à clássica para o disco

Para essa solução será utilizado o método dos blocos onde, primeiro, será necessário encontrar a equação de equilíbrio para o intervalo entre o raio interno r_i e o raio intermediário r_c e aplicar a hipótese utilizada na solução clássica para o disco.

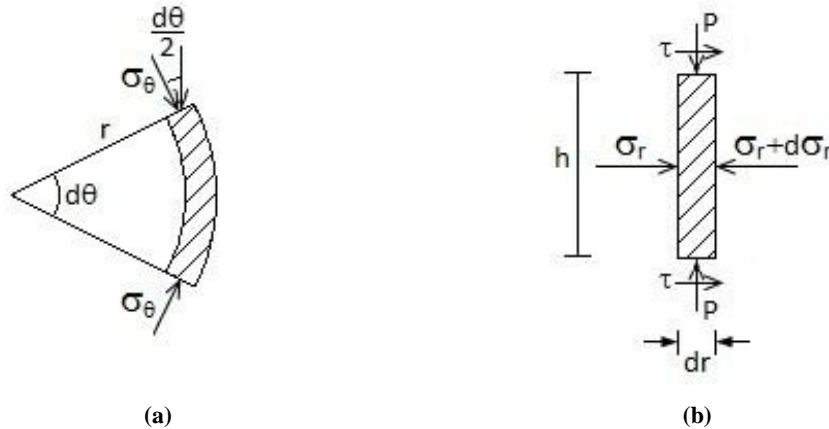


Figura 7 – Bloco isolado. (a) vista superior (b) vista lateral

Fazendo a equação de equilíbrio para as forças representadas na figura 7 em um elemento infinitesimal do anel, tem-se

$$\sigma_r h r d\theta - (\sigma_r + d\sigma_r) h (r + dr) d\theta + 2\tau r dr d\theta + 2\sigma_\theta \sin \frac{d\theta}{2} h dr = 0 \quad (31)$$

Fazendo a seguinte consideração para ângulos muito pequenos:

$$\sin \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2}, \quad d\theta \ll 1 \quad (32)$$

eliminando $d\theta$ em (31), tem-se:

$$\sigma_r h r - \sigma_r h r - \sigma_r h dr - d\sigma_r h r - d\sigma_r h dr + 2\tau r dr + \sigma_\theta h dr = 0 \quad (33)$$

Reorganizando os termos, obtém-se:

$$\sigma_r h dr + d\sigma_r h r - 2\tau r dr - \sigma_\theta h dr = 0 \quad (34)$$

Utilizando novamente a Lei de Coulomb para relacionar a tensão cisalhante e a pressão aplicada por meio do coeficiente de atrito no anel e substituindo a equação (5)

na equação (34), obtém-se uma equação de equilíbrio simplificada para o intervalo entre r_i e r_c :

$$(\sigma_r - \sigma_\theta)h dr + d\sigma_r h r - 2\mu P r dr = 0 \quad (35)$$

Substituindo $r = 0$ na equação (35) obtém-se para esse ponto:

$$\sigma_r = \sigma_\theta \quad (36)$$

Supondo que (36) é válida para todo $r_i \leq r \leq r_c$ tem-se

$$d\sigma_r h - 2\mu P dr = 0 \quad (37)$$

Usando o critério de Tresca para obter uma equação para P :

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_y \quad (38)$$

Nesse caso, $\sigma_1 = -\sigma_r$ e $\sigma_3 = -P$. Substituindo esses valores na equação (38)

$$P = \sigma_y + \sigma_r \quad (39)$$

e substituindo (39) em (37), se obtém:

$$d\sigma_r h = 2\mu(\sigma_y + \sigma_r) dr \quad (40)$$

Separando as variáveis e integrando em ambos os lados, sabendo que em $r = r_i, \sigma_r = 0$:

$$\int_0^{\sigma_r} \frac{d\sigma_r}{(\sigma_y + \sigma_r)} = \int_{r_i}^r \frac{2\mu}{h} dr \quad (41)$$

$$\ln\left(\frac{\sigma_y + \sigma_r}{\sigma_y}\right) = \frac{2\mu}{h}(r - r_i) \quad (42)$$

Organizando os termos e resolvendo para σ_r , se obtém a solução desse caso para valores de $r_i \leq r \leq r_c$

$$\sigma_r = \sigma_y \left(e^{\frac{2\mu}{h}(r-r_i)} - 1 \right) \quad (43)$$

Agora será necessário encontrar também a equação de equilíbrio para o intervalo entre r_c e o raio externo r_e para que seja possível utilizar o método dos blocos.

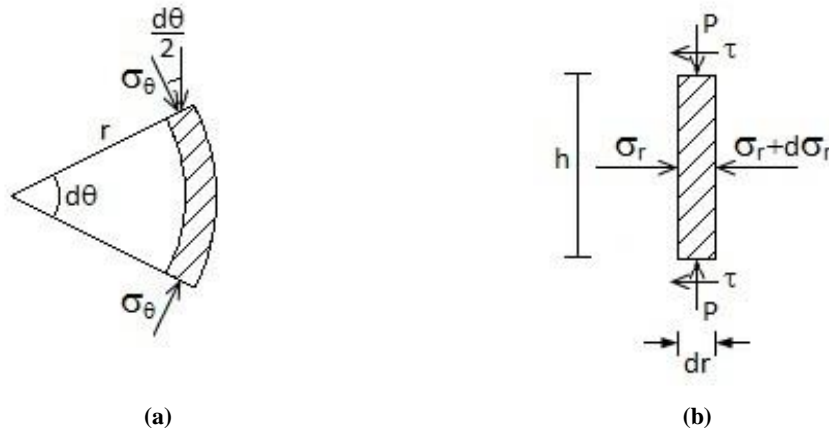


Figura 8 – Bloco isolado. (a) vista superior (b) vista lateral

Fazendo novamente a equação de equilíbrio, agora das forças representadas na figura 8 de um elemento infinitesimal do anel, tem-se

$$\sigma_r hr d\theta - (\sigma_r + d\sigma_r)h(r + dr) d\theta - 2\tau r dr d\theta + 2\sigma_\theta \sin \frac{d\theta}{2} h dr = 0 \quad (44)$$

Utilizando novamente a hipótese (32) e eliminando $d\theta$ e o termo de segunda ordem, se obtém:

$$\sigma_r hr - \sigma_r hr - \sigma_r h dr - d\sigma_r hr - d\sigma_r h dr - 2\tau r dr + \sigma_\theta h dr = 0 \quad (45)$$

e organizando os termos, resulta:

$$\sigma_r h dr + d\sigma_r hr + 2\tau r dr - \sigma_\theta h dr = 0 \quad (46)$$

Utilizando novamente a Lei de Coulomb para relacionar a tensão cisalhante e a pressão aplicada pela substituição da equação (5) na equação (46), obtém-se uma equação de equilíbrio simplificada para o intervalo entre r_c e r_e :

$$(\sigma_r - \sigma_\theta)h dr + d\sigma_r hr + 2\mu Pr dr = 0 \quad (47)$$

Substituindo $r = 0$ na equação (47), obtém-se para esse intervalo:

$$\sigma_r = \sigma_\theta \quad (48)$$

Supondo que (48) é válida para todo $r_c \leq r \leq r_e$ tem-se

$$d\sigma_r h + 2\mu P dr = 0 \quad (49)$$

Novamente utilizando Tresca para obter uma equação para P e neste caso também sendo $\sigma_1 = -\sigma_r$ e $\sigma_3 = -P$ obtém-se a equação (39). Substituindo essa equação em (49), se obtém

$$d\sigma_r h = -2\mu(\sigma_y + \sigma_r) dr \quad (50)$$

Separando as variáveis e integrando em ambos os lados sabendo que em $r = r_e, \sigma_r = 0$:

$$\int_0^{\sigma_r} \frac{d\sigma_r}{(\sigma_y + \sigma_r)} = - \int_{r_e}^r \frac{2\mu}{h} dr \quad (51)$$

$$\ln\left(\frac{\sigma_y + \sigma_r}{\sigma_y}\right) = \frac{2\mu}{h}(r_e - r) \quad (52)$$

Resolvendo para σ_r , tem-se a solução do primeiro caso para valores de $r_c \leq r \leq r_e$

$$\sigma_r = \sigma_y \left(e^{\frac{2\mu}{h}(r_e - r)} - 1 \right) \quad (53)$$

Como representado no gráfico da figura 9, pode-se ver que ao igualar as equações (43) e (53) obtém-se a posição do raio intermediário r_c como sendo o raio médio entre r_i e r_e .

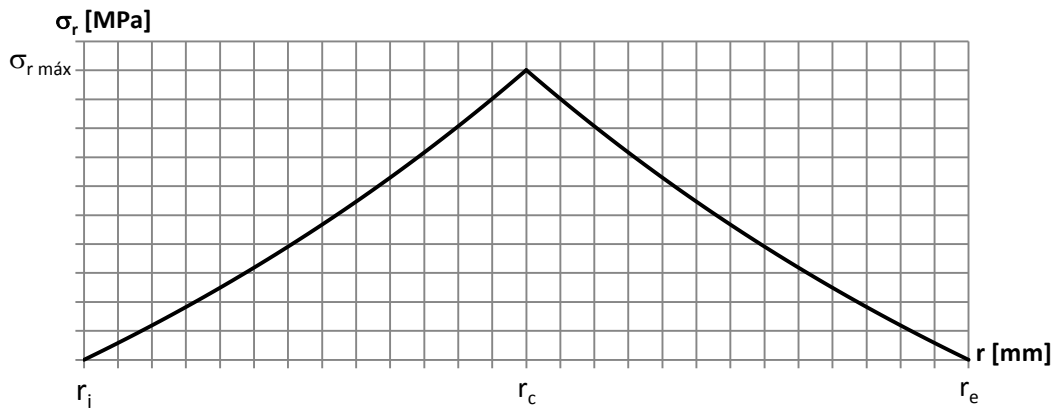


Figura 9 – Gráfico esquemático para r_c

3.2 Caso 2 – Solução análoga à proposta para o disco

Para essa solução, mais uma vez será necessário encontrar uma equação de equilíbrio para o intervalo entre os raios r_i e r_c , agora para resolver o problema considerando uma hipótese similar à solução proposta para o disco, na seção 2.2.

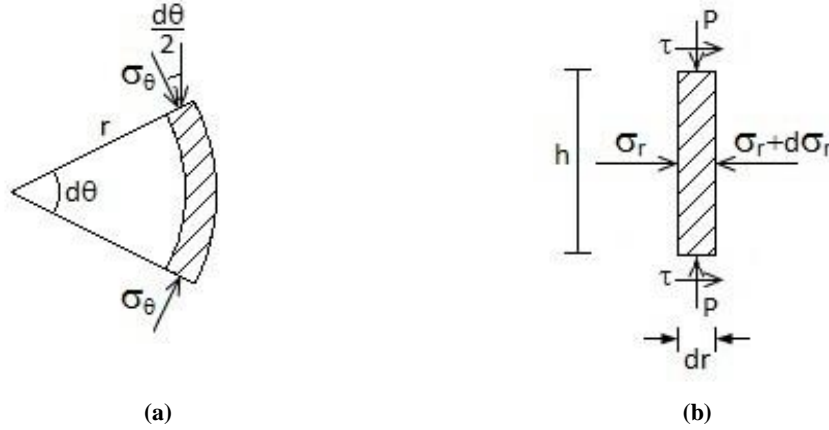


Figura 10 – Bloco isolado. (a) vista superior (b) vista lateral

Fazendo a equação de equilíbrio das forças representadas na figura 10 na direção radial para um elemento infinitesimal do anel, tem-se

$$\sigma_r h r d\theta - (\sigma_r + d\sigma_r) h (r + dr) d\theta + 2\tau r dr d\theta + 2\sigma_\theta \sin \frac{d\theta}{2} h dr = 0 \quad (54)$$

Fazendo a seguinte consideração para ângulos muito pequenos:

$$\sin \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2}, \quad d\theta \ll 1 \quad (55)$$

eliminando $d\theta$,

$$\sigma_r h r - \sigma_r h r - \sigma_r h dr - d\sigma_r h r - d\sigma_r h dr + 2\tau r dr + \sigma_\theta h dr = 0 \quad (56)$$

e organizando os termos, obtém-se

$$\sigma_r h dr + d\sigma_r h r - 2\tau r dr - \sigma_\theta h dr = 0 \quad (57)$$

Utilizando novamente a Lei de Coulomb e substituindo a equação (5) na equação (57) se obtém uma equação de equilíbrio simplificada para o intervalo entre r_i e r_c :

$$(\sigma_r - \sigma_\theta)hdr + d\sigma_r hr - 2\mu Pr dr = 0 \quad (58)$$

Em $r = r_i$, será considerada a variação de tensão radial muito pequena, ou seja, $d\sigma_r \approx 0$. Logo, da equação (58), se obtém

$$(\sigma_r - \sigma_\theta)h - 2\mu Pr_i = 0 \quad (59)$$

e resolvendo para σ_θ ,

$$\sigma_\theta = \sigma_r - \frac{2\mu}{h} Pr_i \quad (60)$$

Supondo que (60) é válida para todo $r_i \leq r \leq r_c$ e substituindo em (58) obtém-se

$$\left(\sigma_r - \sigma_r + \frac{2\mu}{h} Pr_i\right)hdr + d\sigma_r hr - 2\mu Pr dr = 0 \quad (61)$$

Reorganizando os termos

$$d\sigma_r hr + 2\mu P(r_i - r)dr = 0 \quad (62)$$

Usando novamente o critério de Tresca para obter uma equação para P :

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_y \quad (63)$$

Nesse caso, $\sigma_1 = -\sigma_r$ e $\sigma_3 = -P$. Substituindo esses valores na equação (63), se obtém

$$P = \sigma_y + \sigma_r \quad (64)$$

Substituindo a expressão (64) em (62), resulta:

$$d\sigma_r hr = 2\mu(\sigma_y + \sigma_r)(r - r_i)dr \quad (65)$$

Separando as variáveis e integrando ambos os lados, sabendo que em $r = r_i$, $\sigma_r = 0$:

$$\int_0^{\sigma_r} \frac{d\sigma_r}{\sigma_y + \sigma_r} = \int_{r_i}^r \frac{2\mu}{h} \frac{(r - r_i)}{r} dr \quad (66)$$

$$\ln\left(\frac{\sigma_y + \sigma_r}{\sigma_y}\right) = \frac{2\mu}{h}(r - r_i) + \ln\left(\frac{r_i}{r}\right)^{\frac{2\mu r_i}{h}} \quad (67)$$

Organizando os termos e resolvendo para σ_r , tem-se a solução desse caso para valores de $r_i \leq r \leq r_c$

$$\sigma_r = \sigma_y \left[\left(\frac{r_i}{r}\right)^{\frac{2\mu r_i}{h}} e^{\frac{2\mu}{h}(r-r_i)} - 1 \right] \quad (68)$$

Agora será necessário encontrar também uma equação de equilíbrio para o intervalo entre r_c e o raio externo r_e .

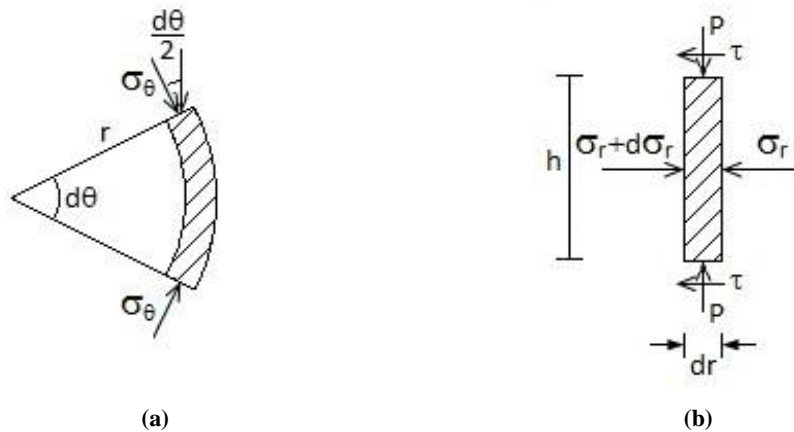


Figura 11 – Bloco isolado. (a) vista superior (b) vista lateral

Fazendo a equação de equilíbrio das forças representadas na figura 11 em um elemento infinitesimal do anel, tem-se

$$(\sigma_r + d\sigma_r)hr d\theta - \sigma_r h(r + dr) d\theta - 2\tau r dr d\theta + 2\sigma_\theta \sin\frac{d\theta}{2} h dr = 0 \quad (69)$$

Fazendo a seguinte consideração para ângulos muito pequenos:

$$\sin\frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2}, \quad d\theta \ll 1 \quad (70)$$

eliminando $d\theta$,

$$\sigma_r hr + d\sigma_r hr - \sigma_r hr - \sigma_r h dr - 2\tau r dr + \sigma_\theta h dr = 0 \quad (71)$$

e organizando os termos

$$\sigma_r h dr - d\sigma_r hr + 2\tau r dr - \sigma_\theta h dr = 0 \quad (72)$$

Utilizando novamente a Lei de Coulomb, equação (5), para relacionar a tensão cisalhante e a pressão aplicada por meio do coeficiente de atrito no anel, na equação (72) obtém-se a equação de equilíbrio para o intervalo entre r_c e r_e

$$(\sigma_r - \sigma_\theta) h dr - d\sigma_r hr + 2\mu P r dr = 0 \quad (73)$$

Em $r = r_e$, será considerada a variação de tensão radial muito pequena, ou seja, $d\sigma_r \approx 0$. Logo, da equação (73), obtém-se

$$(\sigma_r - \sigma_\theta) h + 2\mu P r_e = 0 \quad (74)$$

e resolvendo para σ_θ ,

$$\sigma_\theta = \sigma_r + \frac{2\mu}{h} P r_e \quad (75)$$

Supondo que (75) é válida para todo $r_c \leq r \leq r_e$ tem-se

$$\left(\sigma_r - \sigma_r - \frac{2\mu}{h} P r_e \right) h dr - d\sigma_r hr + 2\mu P r dr = 0 \quad (76)$$

e organizando os termos,

$$d\sigma_r hr - 2\mu P (r - r_e) dr = 0 \quad (77)$$

Novamente utilizando Tresca para obter uma equação para P e nesse caso também sendo $\sigma_1 = -\sigma_r$ e $\sigma_3 = -P$ obtém-se a equação (64). Substituindo a equação (64) em (77), tem-se

$$d\sigma_r hr = 2\mu(\sigma_y + \sigma_r)(r - r_e) dr \quad (78)$$

Separando as variáveis e integrando ambos os lados, sabendo que em $r = r_e$, $\sigma_r = 0$:

$$\int_0^{\sigma_r} \frac{d\sigma_r}{\sigma_y + \sigma_r} = \int_{r_e}^r \frac{2\mu}{h} \frac{(r - r_e)}{r} dr \quad (79)$$

$$\ln\left(\frac{\sigma_y + \sigma_r}{\sigma_y}\right) = \frac{2\mu}{h}(r - r_e) + \ln\left(\frac{r_e}{r}\right)^{\frac{2\mu r_e}{h}} \quad (80)$$

Resolvendo para σ_r , tem-se a solução desse caso para valores de $r_c \leq r \leq r_e$

$$\sigma_r = \sigma_y \left[\left(\frac{r_e}{r}\right)^{\frac{2\mu r_e}{h}} e^{\frac{2\mu}{h}(r-r_e)} - 1 \right] \quad (81)$$

3.3 Comparação das Soluções

A partir dos gráficos das figuras 12, 13 e 14 pode-se observar que para o caso 1 o ponto de maior tensão se encontra no raio médio. Já para o caso 2, o ponto de maior tensão se desloca para a esquerda do gráfico quanto menor o raio interno. Outro aspecto a se observar é que quanto menor o raio interno, menor é a diferença entre as tensões máximas.

Para que o caso 1 possa ser utilizado, é necessário ter uma razão entre o raio externo e a variação entre os raios interno e externo pequena. Para essa condição, ao serem comparados os pontos de tensão máxima entre os dois casos, observa-se que esses pontos são muito próximos, ou seja, o ponto de tensão máxima é muito próximo do raio médio.

Para a solução de um anel de material poroso, será estudado apenas o caso 1, considerando um anel com raio externo suficientemente grande e uma variação entre os raios interno e externo pequena.

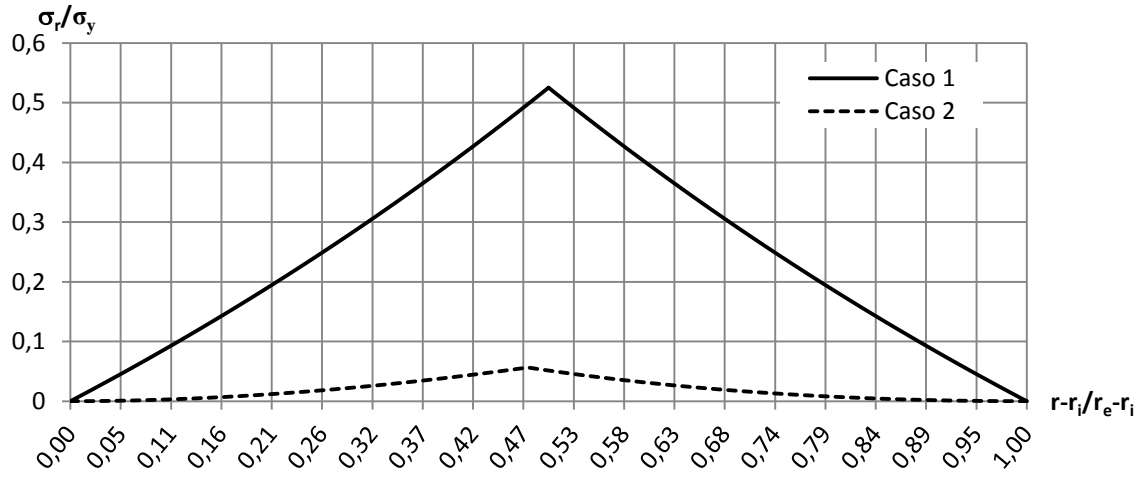


Figura 12 – Gráfico de σ_r para $r_i = 11mm$ e $r_e = 18,6mm$

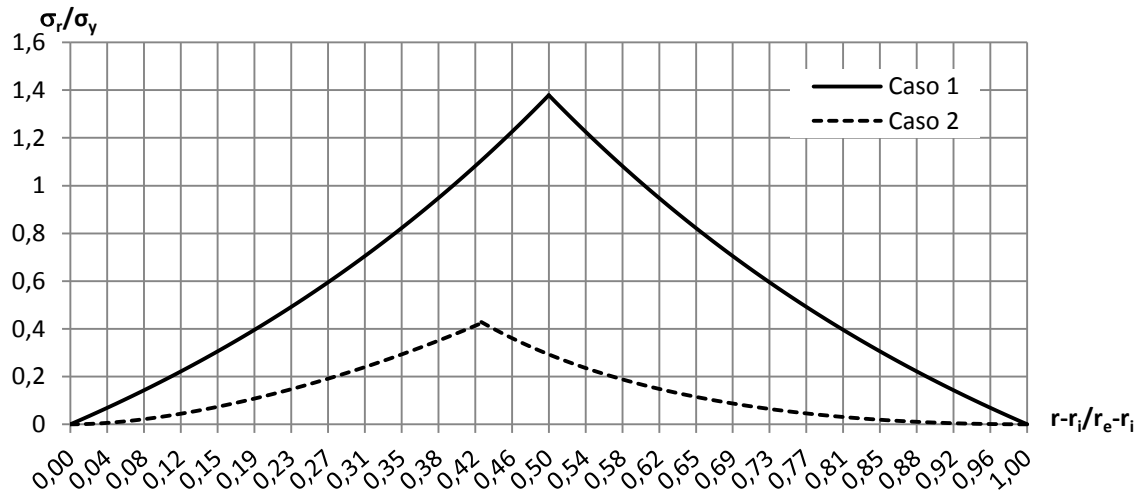


Figura 13 – Gráfico de σ_r para $r_i = 3mm$ e $r_e = 18,6mm$

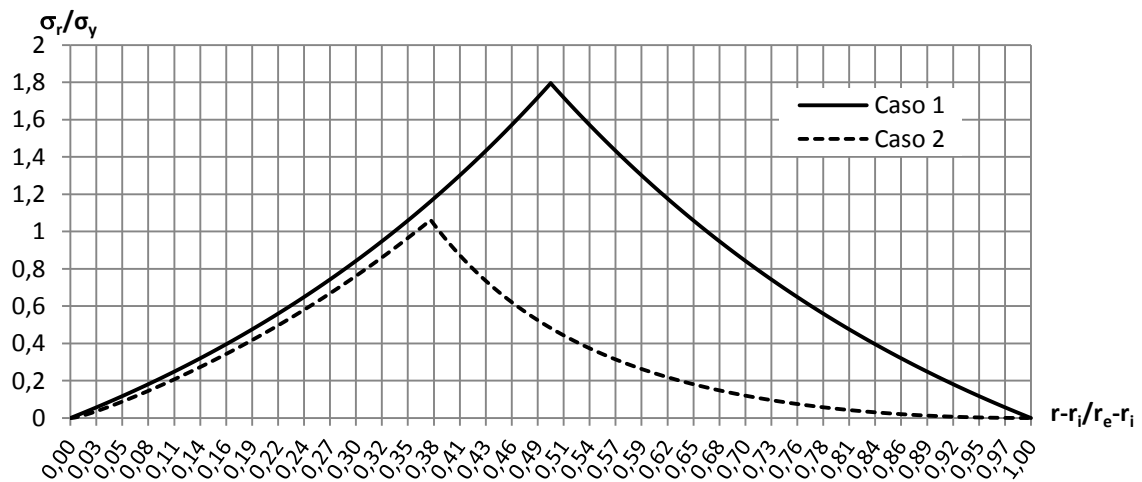


Figura 14 – Gráfico de σ_r para $r_i = 0,1mm$ e $r_e = 18,6mm$

4 Critério de Escoamento

A função de escoamento de Drucker-Prager, que é utilizada para solos, pode ser utilizada como uma aproximação para materiais porosos, e é dada pela seguinte equação:

$$f = A\sqrt{J_2} + BI_1 \quad (82)$$

onde A e B são parâmetros do material a serem determinados, J_2 é o segundo invariante do tensor de tensão desviadora e I_1 é o primeiro invariante do tensor de tensões, como se segue

$$J_2 = \frac{1}{2} S \cdot S \quad (83)$$

$$I_1 = tr T \quad (84)$$

Para encontrar A e B serão analisadas duas situações distintas, compressão uniaxial e pressão isostática. Para compressão uniaxial tem-se

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (85)$$

Nesse caso, se tem o seguinte tensor de tensão desviadora:

$$S = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\sigma_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma_{11} \end{bmatrix} \quad (86)$$

e os seguintes invariantes:

$$J_2 = \frac{1}{3}\sigma_{11}^2 \quad (87)$$

$$I_1 = \sigma_{11} \quad (88)$$

Substituindo os valores encontrados em (87) e (88) na função de escoamento de Drucker-Prager (82), obtém-se

$$f = A\sqrt{J_2} + BI_1 = \left(\frac{A}{\sqrt{3}} + B\right)\sigma_{11} \quad (89)$$

Considerando a compressão uniaxial σ_{11} igual à tensão de escoamento σ_y a compressão, que para materiais porosos depende da densidade, a equação (89) fica

$$f = \left(\frac{A}{\sqrt{3}} + B\right)\sigma_y \quad (90)$$

Agora para pressão isostática tem-se

$$T = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix} \quad (91)$$

com os seguintes invariantes

$$J_2 = 0 \quad (92)$$

$$I_1 = 3P \quad (93)$$

Substituindo novamente os invariantes encontrados na função de escoamento de Drucker-Prager (82), se obtém

$$f = A\sqrt{J_2} + BI_1 = 3BP \quad (94)$$

Considerando a pressão isostática P igual à pressão de escoamento P_y a compressão, que para materiais porosos depende da densidade, na equação (94)

$$f = 3BP_y \quad (95)$$

Fazendo um sistema com as equações (90) e (95)

$$\begin{cases} f = \left(\frac{A}{\sqrt{3}} + B\right)\sigma_y \\ f = 3BP_y \end{cases} \quad (96)$$

obtem-se uma soluao para os parâmetros A e B em funao da tensâo e pressâo de escoamento

$$A = \sqrt{3} \left(1 - \frac{\sigma_y}{3P_y} \right) \quad (97)$$

$$B = \frac{\sigma_y}{3P_y} \quad (98)$$

Substituindo (97) em (98), encontra-se uma relaao entre A e B

$$A = \sqrt{3}(1 - B) \quad (99)$$

Para definir A e B , equaoes (97) e (98), é necessârio utilizar uma relaao entre a tensâo de escoamento de um material poroso (σ_y), que depende da densidade, e a tensâo de escoamento de um material denso (σ_0). Para isso, a relaao seguinte serâ utilizada

$$\sigma_y = \delta \sigma_0 \quad (100)$$

onde δ deve satisfazer a condiao de que para uma densidade relativa R igual â densidade relativa inicial R_0 , a tensâo de escoamento σ_y é nula, logo δ deve ser igual a zero e tambêm a condiao que para uma densidade relativa R igual a um, a tensâo de escoamento σ_y é igual a do material denso σ_0 , logo δ deve ser igual a um.

Logo, δ pode ser definido como:

$$\delta = \frac{R - R_0}{1 - R_0} \quad (101)$$

e R é definido por

$$R = \frac{\text{densidade do material poroso}}{\text{densidade do material denso}} \quad (102)$$

Reorganizando a equaao (98) para P_y

$$P_y = \beta \sigma_y \quad (103)$$

onde $\beta = 1/3B$, obtém-se a relação entre a pressão de escoamento P_y e a tensão de escoamento σ_y necessária para definir A e B .

A expressão para β deve satisfazer a condição de que para uma densidade relativa R igual a um, a tensão de escoamento σ_y deve ser igual à tensão de escoamento σ_0 , com isso a pressão de escoamento P_y tenderá a infinito, logo β também deverá tender a infinito e também a condição que para uma densidade relativa R igual a densidade relativa inicial R_0 , a tensão de escoamento σ_y se aproximará de zero, com isso a pressão de escoamento P_y também deve ser próxima de zero, logo β terá um valor positivo constante, que nesse caso será assumido o valor de um.

Logo, β é definido como:

$$\beta = \frac{1 - R_0}{1 - R} \quad (104)$$

Substituindo a equação (100) na equação (103), encontra-se uma relação entre a pressão de escoamento e a tensão de escoamento de um material denso

$$P_y = \beta \sigma_y = \beta \delta \sigma_0 \quad (105)$$

Substituindo as equações (101) e (104) em (105), obtém-se

$$P_y = \left(\frac{R - R_0}{1 - R} \right) \sigma_0 \quad (106)$$

Agora podem ser encontradas as variáveis A e B em função apenas da densidade relativa:

$$B = \frac{1}{3\beta} = \frac{1}{3} \left(\frac{1 - R}{1 - R_0} \right) \quad (107)$$

$$A = \sqrt{3}(1 - B) = \sqrt{3} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{1 - R}{1 - R_0} \right) \right] \quad (108)$$

4.1 Critério de Escoamento para Simetria Axial

Usando a lei da normalidade para a taxa de deformação plástica,

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\lambda} \nabla f \quad (109)$$

e substituindo a função de escoamento de Drucker-Prager (82), onde

$$\nabla(\sqrt{J_2}) = \frac{S}{2\sqrt{J_2}} \quad (110)$$

$$\nabla I_1 = I_{3 \times 3} \quad (111)$$

obtem-se

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\lambda} \left(\frac{A}{2} \frac{S}{\sqrt{J_2}} + B I_{3 \times 3} \right) \quad (112)$$

Para um anel sob compressão uniaxial sabe-se que $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$, logo

$$\dot{\lambda} \left(\frac{A}{2} \frac{S_2}{\sqrt{J_2}} + B \right) = \dot{\lambda} \left(\frac{A}{2} \frac{S_3}{\sqrt{J_2}} + B \right) \quad (113)$$

e simplificando, encontra-se

$$S_2 = S_3 \quad (114)$$

Então, nesse caso, o segundo invariante do tensor de tensão desviadora J_2 fica

$$J_2 = \frac{1}{2} S \cdot S = \frac{1}{2} (S_1^2 + 2S_2^2) \quad (115)$$

Também para $S_2 = S_3$, vê-se que $\sigma_2 = \sigma_3$. Logo,

$$S_1 = \sigma_1 - \frac{1}{3} \text{tr} T = \frac{2}{3} (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (116)$$

$$S_2 = \sigma_2 - \frac{1}{3} \text{tr} T = \frac{1}{3} (\sigma_2 - \sigma_1) \quad (117)$$

Substituindo (116) e (117) em (115)

$$J_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{4}{9} (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \frac{2}{9} (\sigma_2 - \sigma_1)^2 \right] = \frac{1}{3} (\sigma_1 - \sigma_2)^2 \quad (118)$$

e

$$\sqrt{J_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (119)$$

E para essa mesma situação o primeiro invariante do tensor de tensões I_1 é dado por

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_1 + 2\sigma_2 \quad (120)$$

Retornando à função de escoamento de Drucker-Prager (82) e substituindo nela as equações (97), (98), (119) e (120), obtém-se

$$f = \sqrt{3} \left(1 - \frac{\sigma_y}{3P_y} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_1 - \sigma_2) \right) + \frac{\sigma_y}{3P_y}(\sigma_1 + 2\sigma_2) \quad (121)$$

Simplificando, igualando a equação (90) e substituindo a equação (99)

$$f = \sigma_1 + \left(\frac{\sigma_y}{P_y} - 1 \right) \sigma_2 = \sigma_y \quad (122)$$

e sabendo que

$$B = \frac{\sigma_y}{3P_y} \quad (123)$$

encontra-se o seguinte critério de escoamento para um anel de material poroso

$$f = \sigma_1 + (3B - 1)\sigma_2 = \sigma_y \quad (124)$$

5 Solução para um Anel Poroso

Para obter uma solução que descreva o comportamento de um anel poroso durante uma compressão, serão utilizadas as equações obtidas pelo método dos blocos para um anel sólido usando a hipótese de que $\sigma_r = \sigma_\theta$ é válida para todo r .

Utilizando a equação de equilíbrio (37) obtida pelo método dos blocos para um anel sólido no intervalo entre o raio interno r_i e r_c

$$d\sigma_r h - 2\mu P dr = 0 \quad (125)$$

Utilizando o critério de escoamento (124) obtido anteriormente para um anel poroso onde, nesse caso, $\sigma_1 = P$ e $\sigma_2 = \sigma_r$:

$$P + (3B - 1)\sigma_r = \sigma_y \quad (126)$$

e resolvendo para P

$$P = \sigma_y + (1 - 3B)\sigma_r \quad (127)$$

Substituindo a equação (127) na equação (125), obtém-se

$$d\sigma_r h - 2\mu(\sigma_y + (1 - 3B)\sigma_r)dr = 0 \quad (128)$$

Separando as variáveis e integrando em ambos os lados, sabendo que em $r = r_i, \sigma_r = 0$:

$$\int_0^{\sigma_r} \frac{d\sigma_r}{\sigma_y + \sigma_r(1 - 3B)} = \frac{2\mu}{h} \int_{r_i}^r dr \quad (129)$$

$$\ln\left(\frac{\sigma_y + \sigma_r(1 - 3B)}{\sigma_y}\right) = \frac{2\mu}{h}(r - r_i)(1 - 3B) \quad (130)$$

Resolvendo para σ_r , chega-se à solução para um anel poroso para valores de $r_i \leq r \leq r_c$

$$\sigma_r = \frac{\sigma_y}{1 - 3B} \left(e^{\frac{2\mu}{h}(r - r_i)(1 - 3B)} - 1 \right) \quad (131)$$

Substituindo (131) em (127), obtém-se uma solução para P :

$$P = \sigma_y \left(e^{\frac{2\mu}{h}(r-r_i)(1-3B)} \right) \quad (132)$$

Sabendo que pela Lei de Coulomb $\tau = \mu P$ e substituindo a equação (132) se obtém

$$\tau = \mu \sigma_y \left(e^{\frac{2\mu}{h}(r-r_i)(1-3B)} \right) \quad (133)$$

Agora para o intervalo entre r_c e o raio externo r_e será utilizada a equação de equilíbrio (49) obtida pelo método dos blocos para um anel sólido

$$d\sigma_r h + 2\mu P dr = 0 \quad (134)$$

Utilizando novamente o critério de escoamento (124) obtido anteriormente para um anel poroso onde, nesse caso, $\sigma_1 = P$ e $\sigma_2 = \sigma_r$ e resolvendo para P :

$$P = \sigma_y + (1 - 3B)\sigma_r \quad (135)$$

Substituindo a equação (135) na equação (134), tem-se

$$d\sigma_r h + 2\mu(\sigma_y + (1 - 3B)\sigma_r) dr = 0 \quad (136)$$

Separando as variáveis e integrando em ambos os lados, sabendo que em $r = r_e, \sigma_r = 0$:

$$\int_0^{\sigma_r} \frac{d\sigma_r}{\sigma_y + \sigma_r(1 - 3B)} = -\frac{2\mu}{h} \int_{r_e}^r dr \quad (137)$$

$$\ln \left(\frac{\sigma_y + \sigma_r(1 - 3B)}{\sigma_y} \right) = \frac{2\mu}{h} (r_e - r)(1 - 3B) \quad (138)$$

Resolvendo para σ_r , chega-se à solução para um anel poroso para valores de $r_c \leq r \leq r_e$

$$\sigma_r = \frac{\sigma_y}{1 - 3B} \left(e^{\frac{2\mu}{h}(r_e-r)(1-3B)} - 1 \right) \quad (139)$$

Substituindo (139) em (135), obtém-se uma solução para P :

$$P = \sigma_y \left(e^{\frac{2\mu}{h}(r_e-r)(1-3B)} \right) \quad (140)$$

Sabendo que pela Lei de Coulomb $\tau = \mu P$ e substituindo a equação (140) se obtém

$$\tau = \mu \sigma_y \left(e^{\frac{2\mu}{h}(r_e-r)(1-3B)} \right) \quad (141)$$

Nas figuras 15 e 16 estão representados os gráficos das tensões σ_r, P e obtidas.

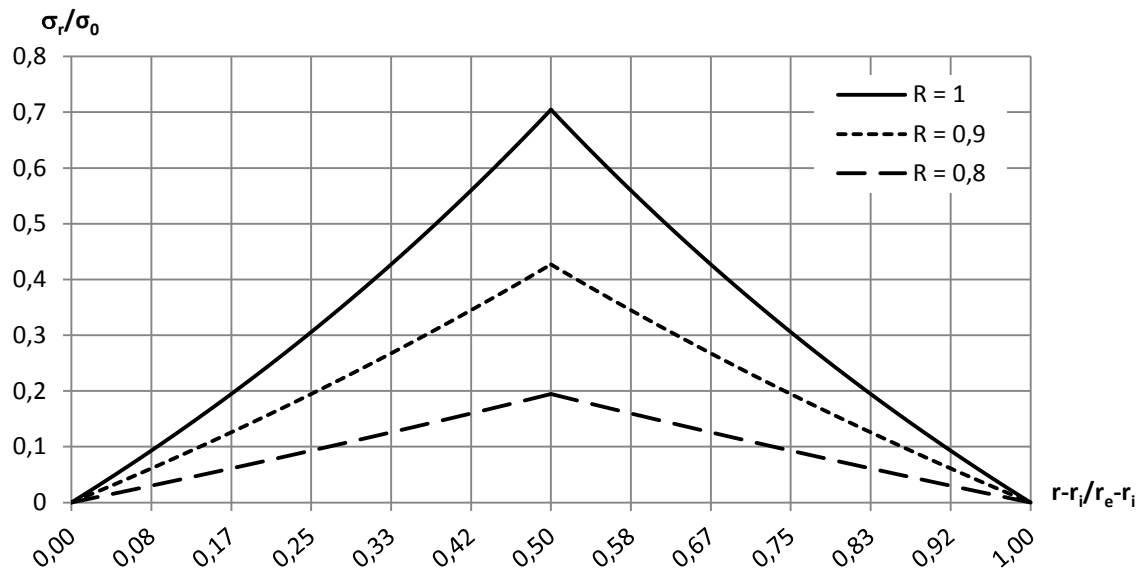


Figura 15 – Gráfico de σ_r para $R_0 = 0,7, r_i = 9\text{mm}$ e $r_e = 18,6\text{mm}$

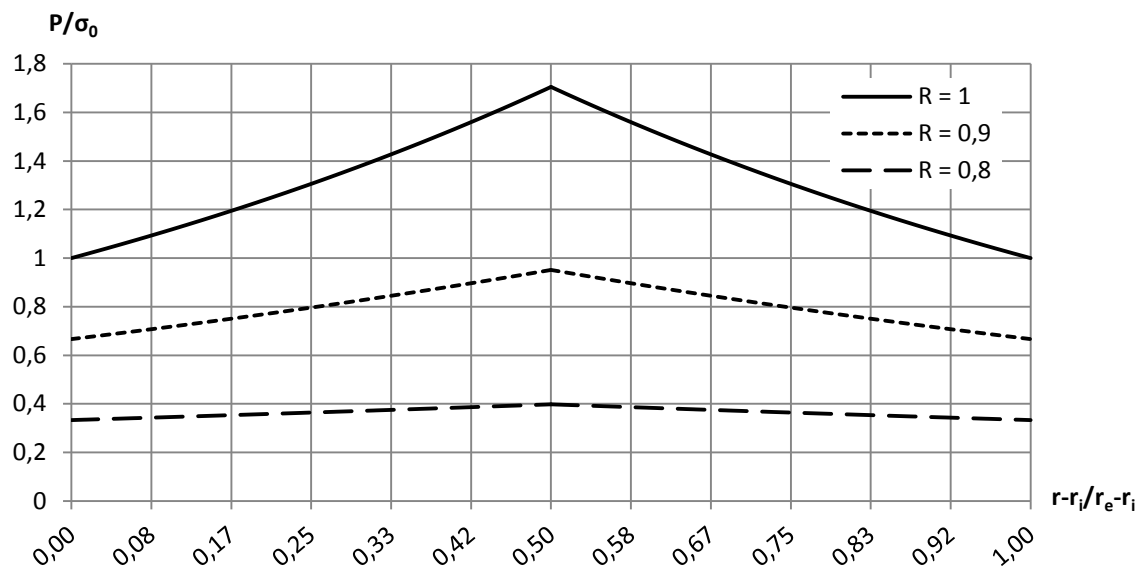


Figura 16 – Gráfico de P para $R_0 = 0,7, r_i = 9\text{mm}$ e $r_e = 18,6\text{mm}$

5.1 Comparação com Modelo Existente

Em Hawkyard e Johnson [6], uma solução para um anel de material denso submetido à compressão uniaxial é dada da seguinte forma:

$$\frac{P}{k} = 2 \left(\frac{x}{x_a} - 1 \right) \frac{\alpha r_i}{h} + \left\{ \frac{3x^2 + 1}{(3x^4 + 1)^{\frac{1}{2}}} + \ln \frac{x_a^2 \left[(3x^4 + 1)^{\frac{1}{2}} - 1 \right]}{x^2 \left[(3x_a^4 + 1)^{\frac{1}{2}} - 1 \right]} \right\} \quad (142)$$

$$\frac{P}{k} = 2 \left(1 - \frac{x}{x_b} \right) \frac{\alpha r_e}{h} + \left\{ \frac{3x^2 + 1}{(3x^4 + 1)^{\frac{1}{2}}} - \ln \frac{x^2 \left[(3x_b^4 + 1)^{\frac{1}{2}} - 1 \right]}{x_b^2 \left[(3x^4 + 1)^{\frac{1}{2}} - 1 \right]} \right\} \quad (143)$$

Onde:

$$x = \frac{r}{r_c} \quad (144)$$

$$x_a = \frac{r_i}{r_c} \quad (145)$$

$$x_b = \frac{r_e}{r_c} \quad (146)$$

$$\alpha = \sqrt{3}\mu \quad (147)$$

$$k = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \quad (148)$$

Comparando a solução apresentada para o anel poroso com a solução encontrada por Hawkyard e Johnson [6], ambas representadas na figura 17, pode-se observar que os pontos de pressão máxima não coincidem, porém as pressões máximas obtidas são muito próximas.

Apesar de Hawkyard e Johnson [6] também utilizarem uma condição de equilíbrio aproximada no elemento infinitesimal do anel, outras considerações e teorias utilizadas, fizeram com que as soluções obtidas fossem diferentes.

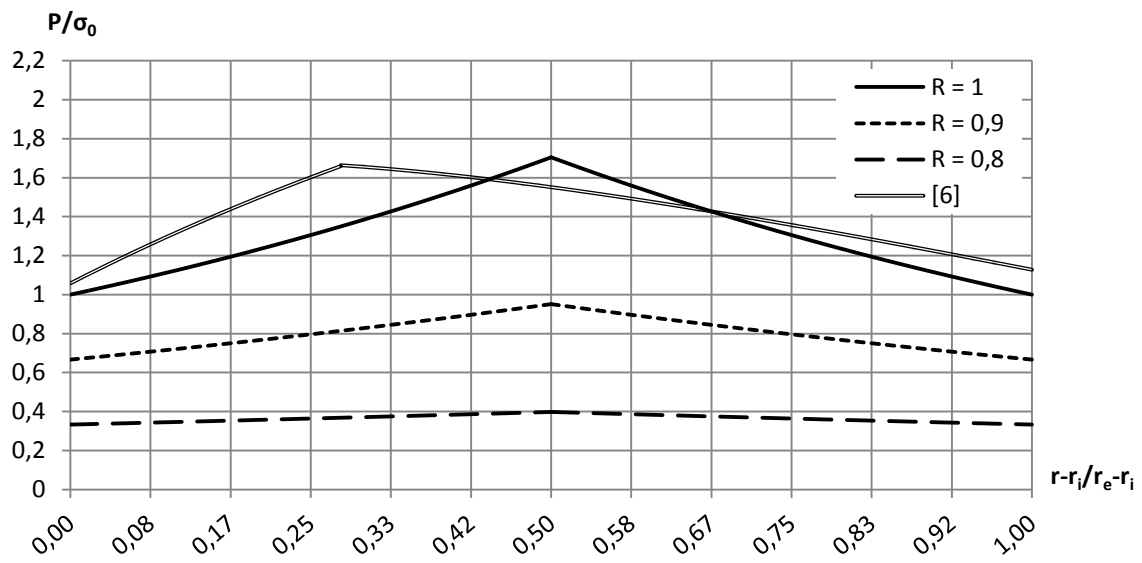


Figura 17 – Gráfico de P para $R_0 = 0,7$, $r_i = 9\text{mm}$ e $r_e = 18,6\text{mm}$

6 Conclusão

Com base no método dos blocos, foi desenvolvido um modelo aproximado para o comportamento de um anel de material poroso quando submetido à compressão, levando em consideração as características desse material e estabelecendo o critério de escoamento utilizando a função de Drucker-Prager.

Para chegar a essa solução foram estudados, por duas hipóteses, um disco e um anel, ambos de material denso, cujos resultados foram apresentados e analisados, para escolher dentre essas hipóteses a que melhor representava a solução do problema. A hipótese escolhida fixa o ponto de tensão radial máxima no raio médio, enquanto na outra hipótese esse ponto flutua dependendo do valor para o raio interno. Porém foi visto que para uma diferença de raios pequena, os pontos onde ocorre a tensão máxima para os dois casos quase coincidem e a tensão radial máxima da hipótese escolhida era muito maior. Por isso, para a solução de um modelo de anel de material poroso foi considerada uma diferença entre os raios interno e externo suficientemente pequena.

Outras análises ainda podem ser feitas para esse modelo, como por exemplo, a utilização da lei de Seibel ao invés da lei de Coulomb, ou um aprimoramento do segundo caso estudado, fazendo outras considerações visando obter uma solução mais precisa para esse resultado.

Referências

- [1] SILVEIRA, J. L. L., *Notas de Aula de Ferramentas de Conformação*, 2011.
- [2] CETLIN, P. R., HELMAN, H., *Fundamentos da Conformação Mecânica dos Metais*. 2 ed. São Paulo, Artliber Editora, 2005.
- [3] DORAIVELU, S. M., GEGEL, H. L., GUNASEKERA, J. S., MALAS, J. C., MORGAN, J. T., “A New Yield Function for Compressible P/M Materials”, *International Journal of Mechanical Science*, v. 26, n. 9/10, pp. 527-535, 1984.
- [4] SCHATZ, F. O., SILVEIRA, J. L. L., BORGES, L. M. S. A., “An Aproximate Analytical Solution for the Upsetting of a Porous Disk Using Drucker-Prager Yield Condition”. *Congresso Nacional de Engenharia Mecânica*, Belém do Pará, 2004.
- [5] ROBINSON, T. H., ARMSTRONG, C. G., “Study on Ring Compression Test Using Physical Modelling and FE Simulation”, *Journal of Processing Technology*, v. 153-154, pp. 54-59, 2004.
- [6] HAWKYARD, J. B., JOHNSON, W., “An Analysis of the Changes in Geometry of a Short Hollow Cylinder During Axial Compression”, *International Journal of Mechanical Science*, v. 9, pp. 163-182, 1967.