



AJUSTE DE MODELOS COMPUTACIONAIS NA DINÂMICA DAS ESTRUTURAS

Michael Leone Madureira de Souza

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientadores: Ney Roitman
Daniel Alves Castello

Rio de Janeiro
Dezembro de 2017

AJUSTE DE MODELOS COMPUTACIONAIS NA DINÂMICA DAS
ESTRUTURAS

Michael Leone Madureira de Souza

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO
ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE
ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA
CIVIL.

Examinada por:

Prof. Ney Roitman, D.Sc.

Prof. Daniel Alves Castello, D.Sc.

Prof. Carlos Magluta, D.Sc.

Prof^a. Roberta de Queiroz Lima, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
DEZEMBRO DE 2017

de Souza, Michael Leone Madureira

Ajuste de Modelos Computacionais na Dinâmica das Estruturas/Michael Leone Madureira de Souza. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2017.

XIII, 77 p.: il.; 29, 7cm.

Orientadores: Ney Roitman

Daniel Alves Castello

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Civil, 2017.

Referências Bibliográficas: p. 60 – 62.

1. *Model Updating.* 2. Estimação de Parâmetros.
 3. Função de Verosimilhança. I. Roitman, Ney *et al.*
- II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Civil. III. Título.

*A minha esposa Mariana e meus
pais Roberto e Vera*

Agradecimentos

A Deus acima de tudo.

A minha esposa pelo carinho, apoio e compreensão nos momentos ausentes para a realização deste trabalho.

Aos meus pais pelo amor, dedicação e ensinamentos que me permitiram chegar até aqui.

A minha família pelo suporte e incentivo ao longo de toda essa jornada.

Aos meus orientadores Ney Roitman e Daniel Alves Castello pela dedicação, aprendizado e incentivo na busca do conhecimento.

Aos colegas Laila Saraiva, Dianelys Vega, Mariana Miglio, Elvis Jhoarsy, Renato Lefone do LABEST do PEC-COPPE/UFRJ e Joan O'Connor do PEM-COPPE/UFRJ pela amizade e companheirismo.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

AJUSTE DE MODELOS COMPUTACIONAIS NA DINÂMICA DAS ESTRUTURAS

Michael Leone Madureira de Souza

Dezembro/2017

Orientadores: Ney Roitman

Daniel Alves Castello

Programa: Engenharia Civil

O principal objetivo desta análise é apresentar um procedimento simples de ajuste de modelos computacionais para avaliação do comportamento dinâmico de um viga bi-apoiada. Foram realizados ensaios experimentais, onde a excitação externa é fornecida por impactos de um martelo instrumentado e as medições são realizadas em três pontos por acelerômetros piezoelétricos. O arranjo experimental é submetido a um processo de montagem e desmontagem para simular um cenário mais próximo do real, onde grande variabilidade das propriedades modais é verificada. O módulo de Young e os coeficientes do modelo de amortecimento proporcional são adotados como variáveis incertas e ajustadas ao longo do procedimento de otimização. A propagação das incertezas é realizada a partir de uma função de verossimilhança e através de simulações de Monte Carlo. O grande número de dados experimentais permite uma investigação da função de verossimilhança. O modelo calibrado é validado a partir da comparação entre os dados experimentais e as previsões numéricas para a curva de amortecimento e função de resposta de freqüência (FRF). Por fim, o modelo validado é utilizado para identificação de danos, que neste trabalho são simulados pelo acréscimo de pequenas massas ao longo da estrutura. A otimização determinística é realizada a luz do problema inverso aplicado via método dos elementos finitos.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

MODEL UPDATING ANALYSES ON A SIMPLY SUPPORTED BEAM

Michael Leone Madureira de Souza

December/2017

Advisors: Ney Roitman

Daniel Alves Castello

Department: Civil Engineering

The main objective of this work is to present model updating analyses. Experimental modal analyses are performed on a simply supported beam. Measurements come from three accelerometers and the input excitation is provided by an impact hammer. The experimental set-up is submitted to a process of assembling and disassembling the beam supports in order to simulate a scenario closer to the real one in which one may face variability of modal data. The Young's modulus and the coefficients of the proportional damping model are considered as the updating structural variables in optimization procedure. Data variability is taken into account along the model updating process by means of the likelihood function and through Monte Carlo simulation analysis. The great number of experimental data provides the likelihood function investigation. The calibrated model is assessed by comparing the model-predicted natural frequencies and the frequency response function (FRF) with their measured counterparts. Finally, the calibrated model is used for damage identification which is simulated by an addition of small masses on the structure. Inverse method is applied to perform this study based on a finite element analysis model updating.

Sumário

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xiii
1 Introdução	1
1.1 Revisão Bibliográfica	2
1.2 Objetivo e Organização do Trabalho	4
1.3 Metodologia	5
2 Desenvolvimento Teórico	9
2.1 Introdução	9
2.2 Problema Dinâmico	9
2.3 Formulação via Problema Inverso	10
2.4 Propagação de Incertezas	12
2.4.1 Simulações de Monte Carlo	12
2.4.2 Cálculo do Operador Jacobiano	14
2.5 Identificação de Dano	15
3 Procedimento Experimental	18
3.1 Introdução	18
3.2 Esquema Experimental	19
3.2.1 Descrição dos Ensaios	19
3.2.2 Descrição dos Ensaios com Simulação de Dano	21
3.3 Resultados Obtidos	23
3.3.1 Pós-Processamento e Tratamento Estatístico	23
3.3.2 Apresentação e Discussão dos Resultados	25
4 Apresentação dos Resultados e Discussão	31
4.1 Introdução	31
4.2 Ajuste do Vetor θ	31
4.3 Validação do Modelo	32
4.3.1 Hipótese 1 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$	32

4.3.2	Hipótese 2 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$	39
4.3.3	Hipótese 3 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$	45
4.4	Identificação de Dano	49
4.4.1	Ajuste do Vetor η	50
4.4.2	Avaliação das Predições Computacionais	54
5	Conclusão e Considerações Finais	58
Referências Bibliográficas		60
A Funções de Resposta em Frequência		63
A.1	FRFs Experimentais Íntegra X Danificada	63
A.2	FRFs na Hipótese 1 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$	64
A.3	FRFs na Hipótese 2 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$	67
A.4	FRFs na Hipótese 3 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$	70
A.5	FRFs no Cenário A1 de Dano	73
A.6	FRFs no Cenário A2 de Dano	74
A.7	FRFs no Cenário B1 de Dano	75
A.8	FRFs no Cenário B2 de Dano	76

Lista de Figuras

1.1	Fluxograma do ajuste do modelo computacional	8
3.1	Vista da viga ensaiada e sua instrumentação	19
3.2	Ilustração do apoio da viga sobre o rolete.	20
3.3	Esquema experimental utilizado	20
3.4	Ilustração do aparato experimental.	21
3.5	Massas utilizadas na simulação de dano	22
3.6	Número de medições dos pólos experimentais.	24
3.7	Exemplo da saída da função <i>plotmatrix</i>	25
3.8	Dispersão dos polos experimentais.	27
3.9	Comparação entre FRFs íntegra e danificada para a posição AC1 dos acelerômetros	30
4.1	Dispersão do vetor de parâmetros para hipótese 1	33
4.2	Dispersão das frequências naturais para hipótese 1	34
4.3	Dispersão das taxas de amortecimento para hipótese 1	35
4.4	Curva de amortecimento na hipótese 1.	35
4.5	FRF no acelerômetro AC1 na hipótese 1.	37
4.6	Regiões de ressonância da FRF no acelerômetro AC1 na hipótese 1. .	39
4.7	Dispersão do vetor de parâmetros para hipótese 2. Unidade: E[Pa]. .	40
4.8	Dispersão das frequências naturais para hipótese 2. Unidade: [Hz] .	41
4.9	Dispersão das taxas de amortecimento para hipótese 2. Unidade: [%]	41
4.10	Curva de amortecimento na hipótese 2.	42
4.11	FRF no acelerômetro AC1 na hipótese 2.	43
4.12	Regiões de ressonância da FRF no acelerômetro AC1 na hipótese 2. .	44
4.13	Dispersão do vetor de parâmetros para hipótese 3. Unidade: E[Pa]. .	45
4.14	Dispersão das frequências naturais para hipótese 3. Unidade: [Hz] .	46
4.15	Dispersão das taxas de amortecimento para hipótese 3. Unidade: [%]	46
4.16	Curva de amortecimento na hipótese 3.	47
4.17	FRF no acelerômetro AC1 na hipótese 3.	48
4.18	Regiões de ressonância da FRF no acelerômetro AC1 na hipótese 3. .	49

4.19	Ilustração da posição X em função da discretização pelo MEF.	52
4.20	Curvas de nível do funcional $S(\boldsymbol{\eta})$ no cenário A1	52
4.21	Curvas de nível do funcional $S(\boldsymbol{\eta})$ no cenário B2	53
4.22	Superfície 3D do funcional no cenário B2	54
4.23	FRF no acelerômetro AC1 no cenário A1 de dano.	55
4.24	FRF no acelerômetro AC1 no cenário A2 de dano.	55
4.25	FRF no acelerômetro AC1 no cenário B1 de dano.	56
4.26	FRF no acelerômetro AC1 no cenário B2 de dano.	57
4.27	APCC entre as FRFs computacionais no acelerômetro AC1 no cenário B2 de dano.	57
A.1	Comparação entre FRFs íntegra e danificada para a posição AC2 dos acelerômetros	63
A.2	Comparação entre FRFs íntegra e danificada para a posição AC3 dos acelerômetros	64
A.3	FRF no acelerômetro AC2 na hipótese 1 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$	64
A.4	FRF no acelerômetro AC3 na hipótese 1 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$	65
A.5	Regiões de ressonância da FRF no acelerômetro AC2 na hipótese 1 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$	65
A.6	Regiões de ressonância da FRF no acelerômetro AC3 na hipótese 1 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$	66
A.7	FRF no acelerômetro AC2 na hipótese 2 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$	67
A.8	FRF no acelerômetro AC3 na hipótese 2 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$	67
A.9	Regiões de ressonância da FRF no acelerômetro AC2 na hipótese 2 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$	68
A.10	Regiões de ressonância da FRF no acelerômetro AC3 na hipótese 2 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$	69
A.11	FRF no acelerômetro AC2 na hipótese 3 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$	70
A.12	FRF no acelerômetro AC3 na hipótese 3 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$	70
A.13	Regiões de ressonância da FRF no acelerômetro AC2 na hipótese 3 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$	71
A.14	Regiões de ressonância da FRF no acelerômetro AC3 na hipótese 3 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$	72
A.15	FRF no acelerômetro AC2 no cenário A1 de dano.	73
A.16	FRF no acelerômetro AC3 no cenário A1 de dano.	73
A.17	FRF no acelerômetro AC2 no cenário A2 de dano.	74
A.18	FRF no acelerômetro AC3 no cenário A2 de dano.	74
A.19	FRF no acelerômetro AC2 no cenário B1 de dano.	75
A.20	FRF no acelerômetro AC3 no cenário B1 de dano.	75

A.21 FRF no acelerômetro AC2 no cenário B2 de dano.	76
A.22 APCC entre as FRFs computacionais no acelerômetro AC2 no cenário B2 de dano.	76
A.23 FRF no acelerômetro AC3 no cenário B2 de dano.	77
A.24 APCC entre as FRFs computacionais no acelerômetro AC3 no cenário B2 de dano.	77

Lista de Tabelas

3.1	Cenários de dano simulados	22
3.2	Resultado do tratamento estatístico dos dados experimentais.	24
3.3	Frequências naturais para a estrutura íntegra e com dano	28
4.1	Solução ótima do vetor de parâmetros.	32
4.2	Solução determinística do vetor η . Unidades: X [mm] e M [g].	51

Capítulo 1

Introdução

Em praticamente todas as áreas da ciência e engenharia modelos computacionais são utilizados para simular o comportamento de sistemas reais. Sua aplicação é muito variada: otimização, projeto, análise de estabilidade, análises preditivas, etc. [1]. No contexto de sistemas estruturais, esses modelos são geralmente utilizados, considerando a formulação proposta pelo método dos elementos finitos, MEF, para avaliar deformações, deslocamentos, tensões, respostas devido a cargas de vento e tráfego, etc.

Problemas reais possuem inúmeras informações que *a priori* são desconhecidas, geralmente relacionadas às propriedades do sistema físico, como por exemplo as condições de contorno, de carregamento, propriedades geométricas e propriedades dos materiais. Invariavelmente são formuladas hipóteses para contornar essa falta de informação, o que pode acabar levando a erros que diminuem a acurácia e, portanto, a qualidade da solução.

Infelizmente, a presença de erros não está associada somente ao sistema em análise. Tanto as hipóteses simplificadoras associadas ao processo de modelagem como os sinais aferidos nos ensaios experimentais geram erros que integram o problema.

Neste cenário surge o conceito do ajuste de modelos (*model updating*) que pode ser entendido como um processo de calibração, ou ajuste, de determinados parâmetros do modelo. Nesse processo ocorre a reconstrução computacional da estrutura a partir de informações sobre seu comportamento.

Considerando, por exemplo, problemas de vibração, são realizados ensaios dinâmicos na estrutura para aferição das frequências naturais e formas modais a fim de fornecer subsídios para a busca do melhor ajuste possível do modelo computacional.

A modelagem de incertezas é adicionada ao processo de ajuste de forma a aumentar o nível de confiança das previsões fornecidas pelos modelos computacionais. Nesta etapa, a investigação das incertezas associadas aos parâmetros do modelo

ocorre a partir da inferência sobre a variabilidade de suas incógnitas e sua influência na resposta numérica.

Destaca-se o fato de que uma das abordagens para a modelagem de incertezas baseia-se na Teoria da Probabilidade, [2].

Inúmeras são as aplicações do *model updating*, dentre as quais é possível citar: verificações de dimensionamento, validações, predições de resposta estrutural sobre condições de carga especiais ou excepcionais, estimativa de propriedades estruturais, etc. Uma das aplicações mais difundidas na literatura técnica é a identificação de danos estruturais.

Danos são definidos como modificações introduzidas às estruturas de forma que sua performance atual e/ou futura seja prejudicada. Nesse contexto, de acordo com FARRAR *et al.* [3], SHM é o nome dado ao desenvolvimento da estratégia de identificação de danos nos campos da engenharia de estrutura, tanto civil quanto mecânica e aeroespacial.

No presente trabalho considera-se a calibração e validação do modelo computacional de uma viga bi-apoiada e, posteriormente, a identificação de danos estruturais no sistema. É válido ressaltar que no contexto deste trabalho, o dano é simulado através da aplicação de massas pontuais ao longo do comprimento da estrutura.

1.1 Revisão Bibliográfica

O conceito de ajuste de modelos foi inicialmente introduzido por volta da década de 60 no âmbito da engenharia de controle e engenharia aeronáutica. Inicialmente denominado por *system identification* buscava o desenvolvimento de métodos de modelagem numérica baseados em observações do comportamento real dos sistemas. Essa área do conhecimento começou a receber atenção devido ao fato de que apesar de grande esforço dedicado à geração de modelos computacionais sofisticados, estes demonstravam pouca correlação quando tinham suas predições confrontadas com às obtidas experimentalmente.

De acordo com MOTTERSHEAD *et al.* [4] a diferença observada entre os dados pode ser ocasionada, além de pelas incertezas relativas aos ensaios experimentais, por três motivos: (i) erro relativo ao modelo matemático, i.e., incertezas inerentes às equações que governam o problema físico; (ii) erro relativo aos parâmetros, seja por hipóteses simplificadores, condições de contorno inadequadas, etc. e (iii) erro relativo à ordem do modelo, problemas na discretização de sistemas complexos.

Quando a formulação matemática é conhecida, assim como sua ordem, o problema de identificação é reduzido para um problema de estimativa de parâmetros.

Em 1971 ASTROM *et al.* [5] introduzem os fundamentos principais desta área de pesquisa. A formulação do problema está basicamente associado às entradas

(estímulos) e saídas (respostas) do sistema, à uma determinada classe de modelos e à escolha do modelo que melhor represente o caso de interesse. Os métodos de solução são divididos inicialmente em: métodos com processamento em tempo real, quando o processo é realizado durante a aquisição de informações do sistema, muito presente na engenharia de controle, e os métodos onde o processamento ocorre após a aquisição das informações. Os autores apresentam ainda inúmeras considerações sobre representações paramétricas, i.e., através de modelos de estado, e não-paramétricas, tais como funções de resposta a impulso e séries de Volterra, discutindo as principais vantagens e desvantagens de cada abordagem.

O problema de estimação de parâmetros passa a ser um problema de otimização quando a escolha do modelo equivalente ao sistema físico é calibrado a partir da minimização de uma função custo. Sobre esse prisma, inúmeras questões são suscitadas, tais como a existência de mínimo global, unicidade da solução, a influência ou não do sinal de entrada na solução, etc. Os métodos decorrentes do processo de otimização estão associados geralmente a uma solução determinística, ou seja, definida a métrica para a busca da solução, esta é determinada sem que nenhuma consideração sobre sua incerteza seja desenvolvida.

Os métodos clássicos da estimação de parâmetros são aqueles baseados em aproximações por mínimos quadrados. Esse método foi desenvolvido por Karl Friedrich Gauss em 1795 que definiu que: ”o valor mais provável de uma variável desconhecida é aquele para o qual a soma quadrática da diferença entre os dados observados e estimados, ponderada pelo grau de confiança na medição, é mínima”. Desde então, sua formulação vem sendo aprimorada para aplicação em diversas situações, como por exemplo o problema não-linear, Gauss-Newton. Nesse sentido em 1981 STREJC [6] apresentou diversas formulações propostas para estimações de parâmetros baseadas no método dos mínimos quadrados.

Com o surgimento de tecnologias em hardware e software mais eficientes e acessíveis, a análise via MEF é adotada quase como padrão por engenheiros e pesquisadores. Sua validação passa a ser realizada a partir da comparação entre os valores obtidos das análises modais e as previsões numéricas.

A necessidade crescente de inferir sobre o nível de confiança nos modelos computacionais proporcionou a aplicação de teorias estatísticas, probabilísticas e estocásticas, no procedimento adotado para avaliar o grau de correlação entre a previsão numérica e o comportamento real do sistema. A abordagem determinística cede espaço à uma solução dada por distribuições de probabilidade para as variáveis do vetor de parâmetros.

Apesar de atrair a atenção da comunidade científica mais recentemente, já em 1980 ASTROM [7] apresentava um estudo completo dos métodos de maximização da função de verosimilhança e avaliação de erros dentro do conceito de ajuste de

modelos.

Para exemplificar a situação atual dessa área de pesquisa, voltada ao campo da dinâmica das estruturas, são apresentados dois trabalhos onde os autores aplicaram os conceitos de estimação de parâmetros e avaliação das incertezas relativas a algumas variáveis do sistema.

SIMOEN *et al.* [1] dissertaram em 2015 sobre a necessidade da quantificação de incertezas relativas a certos parâmetros dos problemas físicos, ao mesmo tempo que apresentaram um comparativo entre as abordagens determinística, Bayesiana e Fuzzy em um problema de ajuste de modelo associado à identificação de dano. Uma viga em concreto armado foi construída e ensaiada em situação íntegra e danificada. O sinal medido foi utilizado para subsidiar a aplicação dos métodos. De forma geral, na visão dos autores os dois procedimentos avaliados para inferência de incertezas, i.e. abordagens Bayesiana e Fuzzy, proporcionam bons resultados e devem ser escolhidos de acordo com as especificidades de cada problema.

Já em 2016 BEHMANESH *et al.* [8] confirmaram a necessidade de considerar os efeitos da variação da temperatura e amplitude da excitação no módulo de elasticidade do concreto, tanto no momento da calibração do modelo computacional quanto na identificação de dano simulado. A estrutura alvo, passarela *Dowling Hall* situada no campus Medford na Universidade de Tufts, foi monitorada durante 27 meses de forma a capturar uma grande variabilidade de dados experimentais. Os resultados demonstraram que a consideração dos efeitos ambientais e de carregamento, além de reduzirem a variação dos parâmetros, aumentaram a confiança nas previsões computacionais, uma vez que as frequências naturais aferidas estavam em regiões de alta probabilidade de ocorrência no modelo numérico.

Para concluir, tratando agora do presente trabalho, este se localiza entre as duas grandes metodologias enunciadas anteriormente, i.e., determinísticas e probabilísticas. Obtém-se informações acerca da incerteza dos parâmetros apesar da utilização da abordagem determinística para o *model updating*. Considera-se portanto, uma aproximação para o cálculo da matriz de covariância do vetor de parâmetros de interesse. A contribuição está assentada em uma breve avaliação da função de verosimilhança e seu impacto na validação de modelos computacionais.

1.2 Objetivo e Organização do Trabalho

Este trabalho objetiva aplicar uma estratégia simples de estimação de parâmetros e propagação de incertezas para avaliar a acurácia do modelo computacional criado. Sua qualidade é aferida de acordo com o grau de correlação entre as previsões numéricas e os dados aferidos experimentalmente. O modelo validado é utilizado para identificação de danos. As propriedades físicas do sistema real consideradas

incertas, ou desconhecidas, são adicionadas ao problema como variáveis do vetor de parâmetros de interesse.

Inicialmente foram realizados ensaios experimentais para estimar dois parâmetros modais, frequência natural ω e taxa de amortecimento ζ . Após o devido tratamento estatístico, estes foram utilizados como dados de entrada para o processo de ajuste computacional.

Posteriormente validou-se o modelo computacional a partir da comparação entre os resultados experimentais e as previsões numéricas. A influência das incertezas relativas às variáveis do vetor de parâmetros foi levada em consideração no cálculo da curva de amortecimento e na obtenção das funções de resposta em frequência, FRFs. A propagação das incertezas foi medida a partir de histogramas e gráficos de dispersão.

Por fim, utilizou-se o modelo validado para identificar os danos estruturais impostos à viga. Nesta análise, os danos foram simulados através da aplicação de massas pontuais ao longo do estrutura.

O presente trabalho está estruturado da seguinte forma:

- Capítulo 2: descreve as abordagens teóricas, hipóteses e premissas adotadas ao longo de toda a análise.
- Capítulo 3: detalha o procedimento experimental, apresentando a metodologia e equipamentos utilizados para realização dos ensaios, além de apresentar as frequências naturais e taxas de amortecimento estimados após as análises modais.
- Capítulo 4: apresenta os resultados alcançados na calibração e validação do modelo computacional, assim como detalha as soluções obtidas para a identificação de danos. Discussões sobre as previsões computacionais são realizadas.
- Capítulo 5: formula as conclusões obtidas após a análise crítica dos resultados e tecce as considerações finais, propondo linhas de atuação para trabalhos futuros.

1.3 Metodologia

O processo de ajuste foi aplicado ao modelo computacional proposto para simular a resposta dinâmica de uma viga de alumínio bi-apoiada. Posteriormente, utilizou-se o modelo validado para identificar os danos simulados na estrutura.

De forma a facilitar o entendimento da sistemática adotada para o ajuste computacional, a Figura 1.1 apresenta um fluxograma das etapas realizadas no processo.

O modelo da viga foi desenvolvido com auxílio do software Matlab versão 2014b [9] e os códigos disponibilizados pela *Lund University*, [10], escritos de acordo com a abordagem estabelecida pelo método dos elementos finitos, MEF.

Foram realizados ensaios experimentais, ver Capítulo 3, para extrair as propriedades associadas à resposta dinâmica da viga de alumínio localizada no Laboratório de Dinâmica e Processamento de Imagens e Sinais, LADEPIS. O sinal foi aferido por três acelerômetros piezoelétricos e a excitação fornecida através de impactos aleatórios, intervalos não correlacionados, de um martelo também piezoelétrico.

Efetuou-se o pós-processamento dos sinais a partir de dois programas desenvolvidos no LADEPIS, denominados: Analisador [11] e STFT [12]. O Analisador estima a FRF, permitindo assim a obtenção das frequências naturais. Já o STFT, além da FRF, utiliza outras técnicas para inferir sobre as frequências naturais e as taxas de amortecimento modal. Os resultados experimentais são tratados estatisticamente e simplificados em variáveis com média e desvio padrão, $v = \mu \pm \sigma$.

Após a criação do modelo computacional são escolhidas três variáveis a serem otimizadas, são elas: o módulo de elasticidade, e os coeficientes do amortecimento proporcional de Rayleigh. Portanto, $\boldsymbol{\theta} = [E \ \alpha \ \beta]^T$. A escolha dessas variáveis ocorreu baseada na dificuldade de aferição precisa de suas magnitudes, e portanto no alto grau de desconhecimento delas, e de sua elevada influência na resposta dinâmica.

A otimização foi executada através da redução progressiva do resíduo entre a predição do modelo computacional e a resposta experimental, ou seja, pela minimização da função custo adotada, ver Capítulo 2. A função *lsqnonlin* [13] do Matlab foi escolhida para obter a solução ótima do vetor de parâmetros, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$.

Ao término da otimização, iniciou-se a etapa de avaliação das incertezas de cada uma das variáveis ajustadas, bem como seus efeitos na resposta dinâmica da viga. Foram adotadas três hipóteses de construção da matriz de covariância, ver Capítulo 2. A propagação das incertezas do vetor de parâmetros foi realizada através das simulações de Monte Carlo.

A análise crítica da qualidade do *model updating* foi baseada na comparação entre os dados experimentais e as previsões do modelo computacional. Portanto, foram avaliadas as dispersões da frequência natural ω e taxa de amortecimento ζ , a dispersão do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$, a adequação da curva de amortecimento e as FRFs. Foram estabelecidas regiões de confiança para balizar essa tomada de decisão, ver Capítulo 4.

Após o término da validação do modelo computacional, inicia-se a etapa de identificação do dano estrutural. No presente trabalho, este dano foi simulado através da aplicação de massas pontuais ao longo da estrutura, ver Capítulo 3. Foram eleitas duas novas variáveis para o processo de otimização, sendo elas: a posição X e a magnitude M da massa aplicada. Com isso, definiu-se o novo vetor de parâmetros

como: $\boldsymbol{\eta} = [X_{massa} \quad M_{massa}]^T$.

Nesta etapa a otimização foi realizada com o auxílio do algoritmo enxame de partículas [14] com pequenas adaptações implementadas para melhoria na convergência [15]. A análise crítica dos resultados foi baseada na qualidade da recuperação da informação real, i.e., posição e magnitude da massa em cada cenário de dano simulado. Adicionalmente foi feita uma comparação entre as FRFs experimentais e computacionais, ver Capítulo 4.

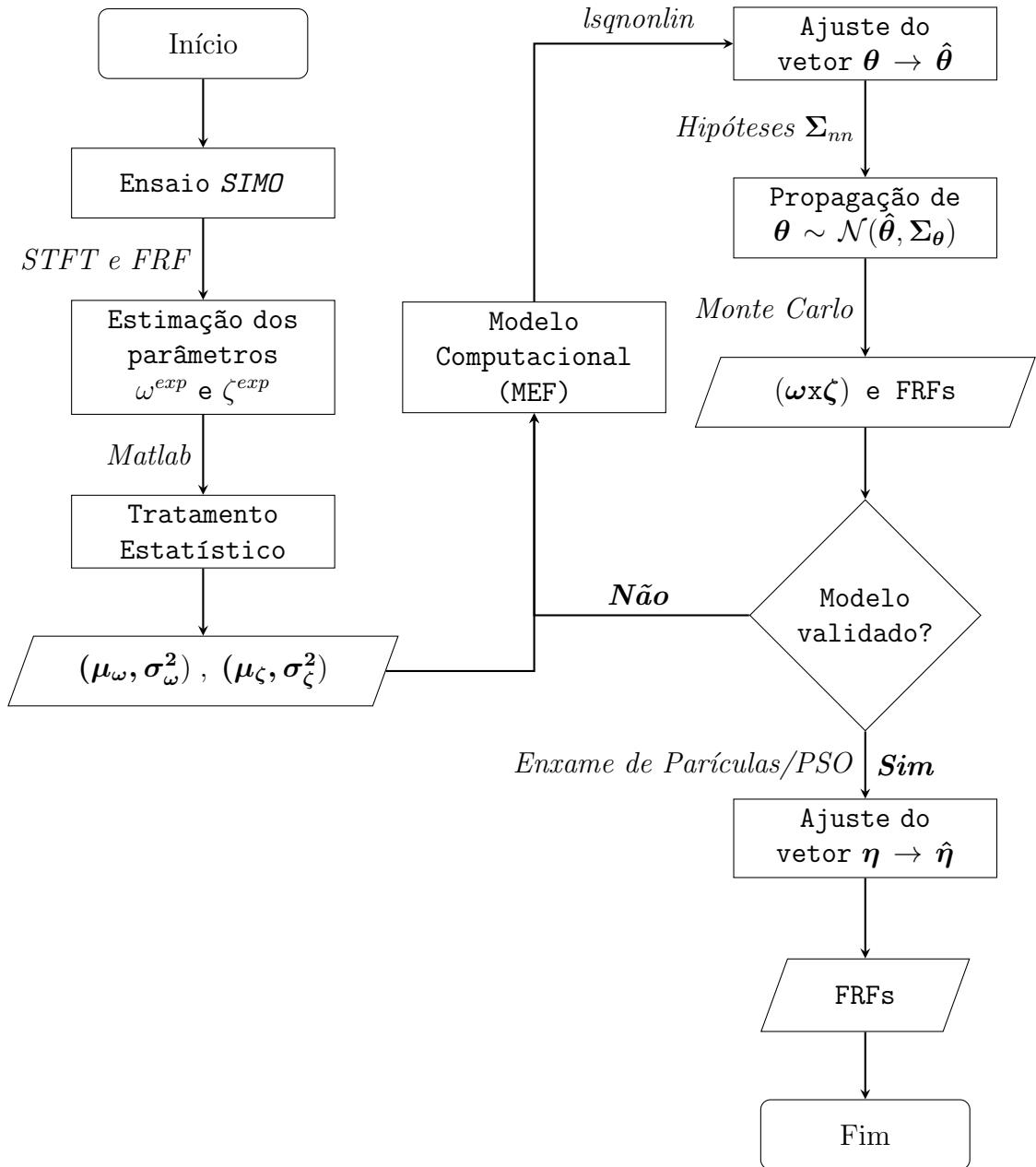


Figura 1.1: Fluxograma do ajuste do modelo computacional.

Capítulo 2

Desenvolvimento Teórico

2.1 Introdução

O presente capítulo apresenta as hipóteses adotadas para a realização desta análise, desde as premissas formuladas para quantificação e propagação de incertezas, bem como às adotadas para a solução do problema dinâmico e de identificação de dano. A abordagem computacional utilizada nestas etapas também é apresentada.

2.2 Problema Dinâmico

A equação de movimento de sistemas lineares com modelo de amortecimento viscoso é dada como segue, [16]:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (2.1)$$

\mathbf{M} , \mathbf{D} , \mathbf{K} são matrizes de dimensão $N \times N$ e representam respectivamente as matrizes globais de massa, amortecimento e rigidez. O vetor \mathbf{F} representa a excitação externa que atua no sistema. Já a aceleração, velocidade e deslocamento são definidos, respectivamente, pelos vetores $\ddot{\mathbf{u}}$, $\dot{\mathbf{u}}$ and \mathbf{u} .

A Eq. 2.1 pode ser reescrita como um sistema de $2N$ equações diferenciais acopladas quando formulada considerando a representação em espaço de estados, como apresentada na Eq. 2.2, [17].

$$\mathbf{A}\mathbf{r} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{P} \quad (2.2)$$

As matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{P} são dadas pela Eq. 2.3 e o vetor \mathbf{r} pela Eq. 2.4.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

O amortecimento proporcional de Rayleigh é adotado como hipótese básica para o amortecimento da estrutura, ou seja $\mathbf{D} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}$, [16].

A função de resposta em frequência $H_{pq}(\omega)$ é dada de acordo com a Eq. 2.5:

$$H_{pq}(\omega) = \sum_{k=1}^N \left[\frac{\phi_{kp}\phi_{kq}}{\mu_k(i\omega - \lambda_k)} + \frac{\phi_{kp}^*\phi_{kq}^*}{\mu_k^*(i\omega - \lambda_k^*)} \right] \quad (2.5)$$

Onde ϕ_{kp} representa o coeficiente do autovetor associado ao k-ésimo modo de vibração no p-ésimo grau de liberdade (relativo à medição da resposta), ϕ_{kq} o coeficiente do autovetor associado ao k-ésimo modo de vibração no q-ésimo grau de liberdade (relativo à excitação da estrutura), μ_k corresponde ao k-ésimo elemento da diagonal da matriz $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{B} \boldsymbol{\Phi}$, onde \mathbf{B} é dado pela Eq. 2.3, λ_k representa o k-ésimo autovalor do problema, N corresponde ao número de modos utilizados para o cálculo da FRF e ω a frequência angular em rad/s. O superíndice $(\bullet)^*$ indica o complexo conjugado da variável considerada.

2.3 Formulação via Problema Inverso

A equação governante de um sistema físicos pode ser escrita, de forma compacta, pela Eq. 2.6,[18].

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}) \quad (2.6)$$

Onde \mathbf{y} representa o vetor de dados, $\boldsymbol{\theta}$ o vetor dos parâmetros do modelo matemático e \mathbf{G} é a função que governa o problema físico. Caso \mathbf{y} e $\boldsymbol{\theta}$ sejam funções, \mathbf{G} é denominado operador do sistema. Para problemas não lineares \mathbf{G} é o operador que mapeia o espaço de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$ para o espaço solução.

É possível dividir a solução da Eq. 2.6 em duas abordagens, a saber;

- (i) **problema direto:** consiste no problema do "dimensionamento", a partir do conhecimento do comportamento do sistema \mathbf{G} e dos seus parâmetros $\boldsymbol{\theta}$, obtém-se \mathbf{y} .
- (ii) **problema inverso:** assume-se entender o comportamento do sistema \mathbf{G} e utilizam-se os dados disponíveis \mathbf{y} , a fim de obter os parâmetros $\boldsymbol{\theta}$.

Para a presente análise é adotada a formulação do problema inverso na solução da equação da dinâmica. Portanto, o operador da Eq. 2.6 é dado por $\mathbf{G} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{r} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{P}$.

Na presente análise, o vetor de dados \mathbf{y} representa as médias das frequências naturais ω e taxas de amortecimento modal ζ obtidas experimentalmente, respectivamente $\boldsymbol{\mu}_\omega$ e $\boldsymbol{\mu}_\zeta$, e \mathbf{y}^m as predições do modelo computacional para as mesmas características modais, ou seja, $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{\zeta}$.

O vetor de parâmetros desconhecidos, ou incertos, $\boldsymbol{\theta}$ é constituído de três variáveis relacionadas às propriedades físicas do sistema estrutural, são elas: o módulo de elasticidade E e os coeficientes do amortecimento proporcional de Rayleigh α e β .

Portanto, pode-se resumir tais definições de acordo com as Eq. 2.7, 2.8 e 2.9.

$$\mathbf{y} = [\boldsymbol{\mu}_\omega \quad \boldsymbol{\mu}_\zeta]^T \quad (2.7)$$

$$\mathbf{y}^m = [\boldsymbol{\omega} \quad \boldsymbol{\zeta}]^T \quad (2.8)$$

$$\boldsymbol{\theta} = [E \quad \alpha \quad \beta]^T \quad (2.9)$$

Há na literatura diversas metodologias desenvolvidas para solucionar a Eq. 2.6 de acordo com as características do problema e com a abordagem escolhida, i.e. determinística ou estocástica. É possível citar, por exemplo, a solução de sistemas lineares pelo método dos mínimos quadrados e de sistemas não lineares pelo método de Gauss-Newton. Para maiores informações ver [5] e [4].

Do ponto de vista matemático, a solução do problema está intimamente ligada à dispersão dos dados observados, ou seja, a incerteza associada ao fenômeno de interesse. Neste sentido, adotou-se um modelo de observação de acordo com a Eq. 2.10, com a premissa de erro aditivo, $\boldsymbol{\epsilon}$.

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.10)$$

A Eq. 2.10 é fundamentada na hipótese de que o modelo matemático, operador \mathbf{G} , é perfeito e a discrepância eventual entre os dados experimentais \mathbf{y} e os computacionais \mathbf{y}^m está relacionada à presença de incertezas/ruídos de medição, $\boldsymbol{\epsilon}$. Neste contexto, $\boldsymbol{\epsilon}$ é modelado de acordo com uma função de densidade de probabilidade (*probability density function*, pdf) normal Gaussiana com média zero e variância desconhecida, ou seja, a hipótese de $\boldsymbol{\epsilon} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$.

Entretanto, conforme exposto no Capítulo 1, há inúmeras fontes que impõem erros à solução da equação da dinâmica e, consequentemente, às predições do operador \mathbf{G} . Com isso, a diferença entre os resultados experimentais e numéricos passa a ser um valor desconhecido, um resíduo, definido como um vetor aleatório $\boldsymbol{\xi}$.

$$\begin{cases} \mathbf{y} - \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\xi} \neq \epsilon \end{cases} \quad (2.11)$$

O objetivo passa a ser encontrar a solução que minimiza essa discrepância $\boldsymbol{\xi}$. É possível definir matematicamente essa busca pela melhor solução como um problema de otimização governado pela Eq. 2.12.

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \underset{\boldsymbol{\theta} \in D_{\boldsymbol{\theta}}}{\operatorname{argmin}} S(\boldsymbol{\theta}) \quad (2.12)$$

Onde $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ representa a solução ótima do vetor de parâmetros, $D_{\boldsymbol{\theta}}$ o espaço solução e S é a métrica para avaliar a diferença entre os dados experimentais e computacionais, denominada função objetivo ou custo.

Para a presente análise foi adotada a função custo definida pela Eq. 2.13, [19], onde $\boldsymbol{\Sigma}_{\omega\omega}$ e $\boldsymbol{\Sigma}_{\zeta\zeta}$ simbolizam, respectivamente, a matriz diagonal das variâncias da frequência natural e taxa de amortecimento.

$$S(\boldsymbol{\theta}) = (\mathbf{d} - \mathbf{y})^T \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{d} - \mathbf{y}) \quad (2.13)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{\omega\omega} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Para obter a solução ótima, utilizou-se o código interno do Matlab denominado *lsqnonlin*, que tem o objetivo de realizar uma regressão não linear a partir de uma métrica pré-definida pelo usuário. Essa métrica corresponde a função custo definida na Eq. 2.13.

Apesar de o Matlab disponibilizar dois algoritmos dentro do código do *lsqnonlin* para proceder a otimização, *trust-region-reflective* (utilizado na presente análise) e o *levenberg-marquardt*, ambos são aplicáveis para minimizar somas quadráticas $\|S\|_2^2$ e utilizam o conceito de vetor gradiente para atingir a convergência, [18]. Para mais detalhes sobre a função, ver [13].

2.4 Propagação de Incertezas

2.4.1 Simulações de Monte Carlo

A propagação das incertezas relativas ao vetor de parâmetros é realizada a partir do conhecimento de sua pdf e o auxílio de uma metodologia para sortear números aleatórios. Porém, invariavelmente em problemas reais a distribuição de probabilidades deste vetor é desconhecida e, desta forma, é prática comum adotar hipóteses

acerca dessas pdfs.

Nesta análise adotou-se a hipótese de que o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$ possui uma distribuição normal Gaussiana com esperança igual à solução ótima e matriz de covariância conhecida. Sabendo que o suporte dessa pdf é infinito, impôs-se um truncamento nessa distribuição para que os valores sorteados sejam estritamente positivos.

Apesar de ser possível classificar esse sorteio aleatório como tendencioso, *biased*, em algumas situações particulares, essa avaliação é um dos objetivos deste estudo. Ou seja, procura-se mensurar o impacto das hipóteses acerca das pdfs e das matrizes de covariância dos dados na validação do modelo computacional. A Eq. 2.15 apresenta a formulação matemática da premissa associada ao vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$.

$$\boldsymbol{\theta} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}}) \quad (2.15)$$

Onde $\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}$ representa o valor médio do vetor de parâmetros e $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}}$ sua respectiva matriz de covariância.

É importante ressaltar que a inferência sobre $\boldsymbol{\theta}$ ocorre no campo da análise multivariada, haja vista que o vetor de parâmetros é função de três variáveis conforme definido na Eq. 2.9.

Seja uma variável aleatória X com distribuição normal, média μ e variância σ^2 , sua pdf é dada pela Eq. 2.16, representada por $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ e denominada função normal univariada. Porém, há situações onde mais de uma variável aleatória com distribuição normal é utilizada para solução do problema. Neste caso a função é denominada por função normal multivariada.

$$f_X(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.16)$$

A função multivariada é generalizada a partir da Eq. 2.16, onde a média μ e a variável x passam a ser vetores e a variância σ^2 é substituída pela matriz de covariância $\boldsymbol{\Sigma}$. A função normal multivariada é dada pela Eq. 2.17.

$$f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{\Sigma}(2\pi)^d}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})} \quad (2.17)$$

Onde a incógnita d indica a dimensão da distribuição. Para mais distribuições de probabilidade e maiores informações sobre o campo de funções multivariadas, ver [2] e [20].

A propagação das incertezas, por sua vez, é realizada através do sorteio de números de acordo com a distribuição de $\boldsymbol{\theta}$. Esse procedimento é conhecido na

literatura como simulações, ou análises, de Monte Carlo [21].

No presente trabalho as simulações de Monte Carlo foram executadas em ambiente Matlab com o auxílio do algoritmo desenvolvido por Tim Benham denominado *rmvnrnd*, totalizando 1000 realizações por análise. Esse código gera números pseudo-aleatórios a partir de uma distribuição de probabilidades normal truncada, haja vista que o módulo de elasticidade e os coeficientes α e β são estritamente positivos. Para maiores informações, ver [22].

Para visualizar as realizações e a dispersão dos resultados obtidos pela análise de Monte Carlo, adotou-se a função *plotmatrix* do Matlab, [23]. Esse código apresenta um gráfico em forma de matriz quadrada onde o número de linhas é igual ao número de variáveis avaliadas. Os elementos da diagonal principal contém os histogramas e os elementos fora da diagonal contém a correlação entre as respectivas variáveis.

Para fundamentar a tomada de decisão sobre a qualidade do modelo computacional foram estabelecidas intervalos de 98% de confiança, através dos percentis de 1% e 99%. Para o cálculo dos percentis foi utilizada a função interna *prctile* do Matlab, [24].

2.4.2 Cálculo do Operador Jacobiano

Considerando a hipótese adotada para a pdf do vetor de parâmetros, Eq. 2.15, definiu-se que a média da distribuição normal Gaussiana de $\boldsymbol{\theta}$ é igual à solução ótima, ou seja $\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}$. Então, para que seja possível realizar as simulações de Monte Carlo, basta obter uma estimativa para a matriz de covariância do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}}$.

Uma das técnicas para obtenção de uma estimativa para a matriz de covariância é a linearização da região próxima ao ponto de ótimo $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Essa formulação é realizada a partir da derivação parcial da função que governa o problema físico em relação às variáveis que compõem o vetor de parâmetros, [19].

A linearização é calculada através do operador jacobiano \mathbf{J} , onde $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{2N \times N_p}$, e N_p representa o número de variáveis que compõem o vetor de parâmetros, i.e. $N_p = 3$. O jacobiano pode ser formulado matematicamente pela Eq. 2.18.

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = \left. \frac{\partial \mathbf{y}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} \quad (2.18)$$

Esse procedimento de derivação parcial foi realizado numericamente a partir de um algoritmo escrito de acordo com o método das diferenças finitas e a escolha da formulação com diferença centrada.

Portanto, após o cálculo do jacobiano é possível obter uma estimativa da matriz de covariância através da Eq. 2.19.

$$Cov(\boldsymbol{\theta})_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} = \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{J}^T \mathbf{J}) \mathbf{J}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{\epsilon\epsilon} \mathbf{J} (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \quad (2.19)$$

Onde \mathbf{J} representa o operador jacobiano e $\boldsymbol{\Sigma}_{\epsilon\epsilon}$ a matriz de variância dos dados.

O presente trabalho adotou três hipóteses básicas a respeito da matriz de variância dos dados $\boldsymbol{\Sigma}_{\epsilon\epsilon}$:

- **Hipótese 1:** a matriz é diagonal, Eq. 2.20. Não há variância cruzada, ou seja, não existe correlação entre os diferentes elementos da matriz.

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\epsilon\epsilon} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{\omega\omega} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

- **Hipótese 2:** a matriz é completa, Eq. 2.21. Aproveitando a grande quantidade de ensaios, calculou-se a variância da massa total de dados experimentais, onde $\boldsymbol{\Sigma}_{\omega\zeta}$ representa a covariância entre as frequências naturais e taxas de amortecimento e é simétrica à $\boldsymbol{\Sigma}_{\zeta\omega}$.

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\epsilon\epsilon} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{\omega\omega} & \boldsymbol{\Sigma}_{\omega\zeta} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{\zeta\omega} & \boldsymbol{\Sigma}_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

- **Hipótese 3:** a matriz é diagonal. De acordo com BECK *et al.* [19], a covariância pode ser calculada no ponto de ótimo, conforme a Eq. 2.22.

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\epsilon\epsilon} = \frac{1}{2N - N_p} (\mathbf{y} - \mathbf{y}^m)^T (\mathbf{y} - \mathbf{y}^m) \quad (2.22)$$

O objetivo do cálculo da covariância com as três hipóteses é analisar o impacto dessas diferentes metodologias na construção da função de verosimilhança. A partir da obtenção de grande quantidade de resultados experimentais, conforme demonstrado no Capítulo 3, buscou-se avaliar a qualidade das previsões numéricas obtidas de acordo com cada uma das premissas de cálculo da matriz de covariância.

2.5 Identificação de Dano

Os danos à estrutura foram simulados a partir da aplicação de massas pontuais ao longo da estrutura. Para maiores detalhes, ver item 3.2.2.

De forma geral, o processo de identificação de dano segue as mesmas hipóteses estabelecidas nos itens 2.2 e 2.3. Nesta etapa o modelo computacional já está calibrado, i.e. $\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}$, bem como já propagadas as incertezas inerentes ao vetor de parâmetros.

Nesta etapa outro vetor de parâmetros foi escolhido para o processo de identificação de dano. Ele é composto por duas variáveis: posição X_{massa} e a magnitude M_{massa} das massas aplicadas à estrutura, de acordo com a Eq. 2.23.

$$\boldsymbol{\eta} = [X_{massa} \quad M_{massa}]^T \quad (2.23)$$

A representação dos dados seguem a mesma formulação apresentada na Eq. 2.7, e Eq. 2.7, ou seja, \mathbf{y} para os dados experimentais e \mathbf{y}^m para as predições computacionais, porém agora ambas na situação de dano. A métrica utilizada para avaliar a discrepância entre \mathbf{y} e \mathbf{y}^m continua sendo governada pela função custo dada pela Eq. 2.13.

Apesar de o modelo computacional ser o mesmo, a função *lsqnonlin* não é eficiente para realizar essa otimização em razão de seu conceito de busca se basear em vetores gradientes. Ou seja, a partir de uma estimativa inicial em uma região próxima à resposta os métodos gradientes convergem rápido para a solução.

Porém, considerando que o modelo computacional é discretizado em elementos finitos, dada uma estimativa inicial qualquer para o início da otimização, a função *lsqnonlin* não é capaz de investigar "todas" as possibilidades no domínio da estrutura. Então, lança-se mão do algoritmo denominado enxame de partículas, (*particle swarm optimization*, PSO), que possui um conceito de busca baseado na procura aleatória por uma população de partículas [14]. A convergência é dada em função da melhor situação encontrada por uma delas.

Analogamente às simulações de Monte Carlo, o enxame de partícula gera números pseudo-aleatórios a partir de uma distribuição de probabilidades uniforme, função denominada *rand* [25] do Matlab. Foram adicionados novos coeficientes para melhorar a convergência do enxame de partículas, [15]. O conceito do PSO é resumidamente explicado pelo pseudo-código Algoritmo 1.

Algorithm 1 Enxame de Partículas

- 1: Gerar a 1^a população de partículas
 - 2: Calcular a posição inicial de cada partícula
 - 3: Definir a melhor posição global
 - 4: **while** $n < n_{iteration}$ **do**
 - 5: Gerar nova população
 - 6: Calcular suas posições
 - 7: Verificar se a melhor posição global foi superada
 - 8: Avaliar critério de convergência
 - 9: **end while**
 - 10: X_{massa} e M_{massa}
-

Ao longo do processo de busca pela solução ótima, o algoritmo PSO altera as matrizes globais de massa e de amortecimento em função do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\eta}$

e o vetor ótimo $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, de acordo com as Eq. 2.24 e Eq. 2.25.

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{M} + \Delta\mathbf{M}(\boldsymbol{\eta}) \quad (2.24)$$

$$\mathbf{D}(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\eta}) = \hat{\alpha} \mathbf{M}(\boldsymbol{\eta}) + \hat{\beta} \mathbf{K}(\hat{E}) \quad (2.25)$$

Aproveitando a simetria da estrutura e os cenários de dano criados neste trabalho, ver Tabela 3.1, foram aplicadas restrições na busca da posição e magnitude das massas pelas partículas. A Eq. 2.26 apresenta as condições de contorno para o cenário A e a Eq. 2.27 para o cenário B de dano.

$$\text{cenário A: } \begin{bmatrix} \{X_{massa} \in \mathbb{R} \setminus 0 \leq X \leq 0,5L\} \\ \{M_{massa} \in \mathbb{R} \setminus 0 \leq M \leq 0,5kg\} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$$\text{cenário B: } \begin{bmatrix} \{X_{massa} \in \mathbb{R} \setminus 0,5L \leq X \leq L\} \\ \{M_{massa} \in \mathbb{R} \setminus 0 \leq M \leq 0,5kg\} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Porém, mesmo aproveitando-se a simetria da estrutura, a presença de falsas predições computacionais é recorrente neste tipo de otimização, i.e., identificação de danos. Então, sabendo-se que a função de resposta em frequência é avaliada para investigar o grau de proximidade nas respostas numéricas, foi adotada a métrica APCC, (*amplitude-phase correlation coefficient*) para verificar a correlação entre as FRFs. O APCC é definido de acordo com a Eq. 2.28, [26].

$$APCC(\omega) = \frac{2\mathbf{a}^*(\omega)\mathbf{b}(\omega)}{\mathbf{a}^*(\omega)\mathbf{a}(\omega) + \mathbf{b}^*(\omega)\mathbf{b}(\omega)} \quad (2.28)$$

Os vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} contém as FRFs analisadas e o superíndice $(\bullet)^*$ indica o complexo conjugado.

Quanto mais próximo de 1 estiver o módulo do APCC, maior é o grau de correlação entre as FRFs comparadas. Esse valor decresce quanto menor for o nível de aproximação, indo à 0 no limite onde não há correlação alguma.

Capítulo 3

Procedimento Experimental

3.1 Introdução

O presente capítulo apresenta em detalhes o aparato experimental utilizado, bem como o procedimento adotado para realização dos ensaios e estimação dos parâmetros modais. A estrutura ensaiada foi uma viga de alumínio bi-apoiada. Objetivou-se inferir sobre as frequências naturais e taxas de amortecimento dos primeiros modos de vibração. A excitação foi fornecida através de impactos de um martelo instrumentado e as respostas captadas por acelerômetros instalados ao longo do comprimento da viga.

O pós-processamento dos sinais foi realizado em dois programas desenvolvidos no Laboratório de Dinâmica e Processamento de Imagens e Sinais, LADEPIS: Analisador [11] e STFT [12]. O Analisador estima as frequências naturais a partir das FRFs e o STFT, além de obter as frequências naturais, infere sobre as taxas de amortecimento modal.

Os resultados experimentais v foram tratados estatisticamente e representados, de forma simplificada, a partir de sua média \bar{v} e desvio padrão σ .

O capítulo é organizado como se segue: o Item 3.2 apresenta o esquema experimental utilizado para a análise dinâmica, detalhando os sensores, equipamentos e sistemas de aquisição de dados, além do procedimento de ensaio. O Item 3.3 descreve o pós-processamento e o tratamento estatístico realizado nos dados experimentais e apresenta a dispersão das frequências naturais e taxas de amortecimento, com auxílio de histogramas.

3.2 Esquema Experimental

3.2.1 Descrição dos Ensaios

Com o objetivo de extrair informações para subsidiar o ajuste da modelagem computacional do problema, foram realizados ensaios em uma viga de alumínio bi-apoiada, conforme ilustrado na Figura 3.1.



Figura 3.1: Vista da viga ensaiada e sua instrumentação

O LADEPIS disponibilizou todos os equipamentos necessários para a realização do ensaio experimental, a saber: a) viga de alumínio, estrutura bi-apoiada com seção retangular de 6mm de altura e 76,2mm de largura, apresentada na Figura 3.1; b) martelo instrumentado fabricado pela PCB Piezotronics, modelo 086C01, Figura 3.3a; c) 3 acelerômetros piezoelétricos fabricados pela PCB Piezotronics, modelos 336C e 336C31, Figura 3.3b; e d) sistema de processamento de sinais, composto pelo condicionador de sinal, fabricado pela PCB Piezotronics, modelo 481, o sistema de aquisição, modelo APS2000 e o software, AqDados7, ambos produzidos pela Lynx Tecnologia, Figura 3.3c.

A estrutura é apoiada sobre roletes soldados nos perfis de aço, que por sua vez estão fixados na bancada de ensaio. O contato direto entre a viga de alumínio e o rolete de aço não permitiu a correta captura das acelerações. Ao realizar o impacto do martelo sobre a viga esta se descolava por completo, ocasionando vibrações sobre os apoios, independentemente do nível de energia aplicado. Esse fato ocorre em função de a estrutura ensaiada ser relativamente leve, com aproximadamente 1,80kg.

Para contornar esse problema, fixou-se uma tira de borracha entre o rolete e a viga, o que reduziu drasticamente a vibração entre os corpos, permitindo assim a medição das acelerações. A Figura 3.3 detalha a região do apoio do aparato experimental.

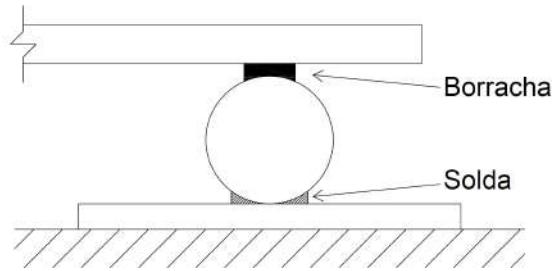


Figura 3.2: Ilustração do apoio da viga sobre o rolete.

O ensaio foi do tipo SIMO (*single input multiple output*) e os acelerômetros foram instalados na direção vertical em três pontos distintos na superfície superior da viga. Tanto a posição do impacto quanto a posição dos acelerômetros mantiveram-se inalteradas em todos os ensaios realizados.



(a) Martelo



(b) Acelerômetros



(c) Sistema de processamento de sinais



(d) Imagem do apoio da viga

Figura 3.3: Esquema experimental utilizado

A posição dos acelerômetros e do impacto do martelo foram definidos de forma que fosse possível inferir sobre as propriedades modais, frequência natural ω e taxa de amortecimento ζ , para os primeiros seis modos de vibração. A Figura 3.4 ilustra a posição dos acelerômetros e dos impactos realizados.

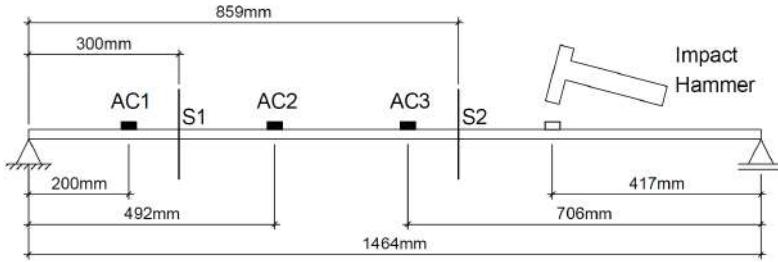


Figura 3.4: Ilustração do aparato experimental.

O procedimento de ensaio contou com um processo de desmontagem e montagem da viga, buscando-se, assim, considerar diferenças no comportamento da taxa de amortecimento e das frequências naturais em função das possíveis diferentes formas no posicionamento, por exemplo, dos apoios, dos fios de aquisição ligados aos acelerômetros, etc. A desmontagem e montagem da viga ocorreram entre ensaios consecutivos.

Esse processo tenta simular a variação das propriedades modais observada em estruturas em operação, aumentando assim a dispersão dos dados experimentais. Ao todo foram realizados 7 ensaios com 6 processos de montagem e desmontagem.

Os ensaios tiveram duração média de 10 minutos, onde em cada análise foram aplicados 20 impactos com intervalos não correlacionados. Ou seja, o intervalo entre excitações consecutivas variaram entre 21 e 39 segundos, resultando em um intervalo médio de 30 s.

Foi adotada uma frequência de amostragem de 1000 Hz, com um filtro passa baixa na ordem de 500 Hz, para garantir a análise dos sinais na faixa de 0 - 250 Hz.

As massas dos acelerômetros foram medidas para posterior inclusão no modelo computacional, sendo $m_{AC1} = 13,4g$, $m_{AC2} = 13,4g$ e $m_{AC3} = 11,8g$. As massas dos fios ligados aos acelerômetros não foram consideradas na modelagem numérica.

3.2.2 Descrição dos Ensaios com Simulação de Dano

Todos os equipamentos, bem como a metodologia apresentada no item 3.2.1 foram mantidos. O dano estrutural foi simulado através da aplicação de pequenas massas ao longo do comprimento da viga de alumínio.

A aplicação das massas pontuais foi realizada com o auxílio de uma pequena borracha aderente de forma à solidarizar os corpos, conforme ilustrado na Figura 3.5b.

Foram definidos quatro cenários de dano onde massas pontuais foram adicionadas no bordo superior da estrutura em duas seções específicas denominadas S1 e S2. As massas utilizadas estão detalhadas na Figura 3.5a e a disposição na viga encontra-se ilustrada na Figura 3.4.

Tabela 3.1: Cenários de dano simulados

Cenário	M_{massa}	$\frac{M_{massa}}{M_{viga}}$	Seção
A1	158,4 g	~ 9 %	S1
A2	49,6 g	~ 3 %	S1
B1	94,5 g	~ 5 %	S2
B2	36,9 g	~ 2 %	S2



(a) Massas pontuais



(b) Ligação massa-viga

Figura 3.5: Massas utilizadas na simulação de dano

A criação desses cenários de dano distintos objetivou investigar a capacidade de recuperação das informações experimentais (posição X e magnitude M) com a redução gradativa da influência das massas pontuais no comportamento global da estrutura. A informação detalhada de cada cenário de dano simulado encontra-se na Tabela 3.1.

Cada cenário de dano simulado foi ensaiado somente uma vez, com a mesma metodologia detalhada no item 3.2.1, i.e., foram aplicados 20 impactos, com intervalos não correlacionados, com duração de aproximadamente 10 minutos. Os impactos foram aplicados com intervalos variando entre 21 e 39 segundos, resultando em um intervalo médio de 30s. A análise com dano também contou com a desmontagem e montagem da viga, porém nesta etapa esse processo foi realizado entre ensaios de cenários de dano distintos.

Foi adotada a janela de 0 - 250 Hz para análise dos sinais, com a aplicação do filtro de passa baixa na ordem de 500 Hz e frequência de amostragem de 1000 Hz. As massas dos acelerômetros foram mantidas no modelo computacional.

3.3 Resultados Obtidos

3.3.1 Pós-Processamento e Tratamento Estatístico

Após a conclusão dos ensaios experimentais, iniciou-se a etapa de pós-processamento dos sinais obtidos durante a análise. De acordo com o estabelecido no Item 1.3, dois programas desenvolvidos no LADEPIS foram utilizados para estimar as frequências naturais e as taxas de amortecimento, são eles o Analisador [11] e o STFT [12].

O Analisador estima a função de resposta em frequência considerando os estimadores H_1 e H_V , [27] e o valor das frequências naturais são obtidas através dos picos da FRF. O intervalo de duração do ensaio, número de médias calculadas, percentagem de sobreposição entre as janelas, bem como o tipo de janela são algumas das opções fornecidas pelo programa. Para esta análise as FRFs foram estimadas selecionando-se todo o sinal obtido em cada ensaio, com 100 médias, 65 % de sobreposição e janela Hamming.

Ao contrário do Analisador, onde selecionou-se o sinal de todo o ensaio, no STFT o intervalo observado é o da resposta dinâmica de um impacto por vez. Com auxílio da técnica tempo-frequência denominada STFT (*Short Time Fourier Transform*) o sinal escolhido é dividido, calculando-se o espectro de cada segmento separadamente. A inferência sobre a frequência natural é realizada através da FRF estimada. Já a taxa de amortecimento é estimada através da técnica do decremento logarítmico. Selecionado o pico do modo de vibração de interesse na FRF, realiza-se uma regressão linear do sinal na escala temporal, obtendo-se assim a taxa de amortecimento.

Ao término do pós-processamento foram estimadas 21 FRFs, uma vez que a viga foi ensaiada 7 vezes e monitorada por 3 acelerômetros. A partir das funções de resposta em frequência, foi possível obter um grande número de pólos como apresentado na Figura 3.6. A diminuição do número de medições do quarto e sexto modos decorreu da dificuldade de posicionar os acelerômetros e o impacto do martelo de forma a medir com a mesma qualidade todos os modos de vibração de interesse, ou seja, do 1º ao 6º modo.

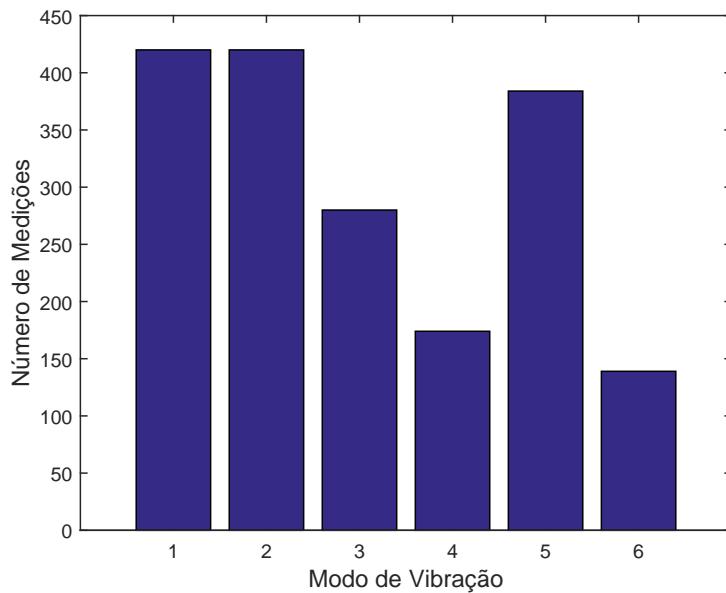


Figura 3.6: Número de medições dos pólos experimentais obtidos para os seis primeiros modos de vibração.

Com o auxílio do Matlab os polos experimentais estimados passam então por um tratamento estatístico onde a massa de dados é simplificada em variáveis com média e desvio padrão, $v = \bar{v} \pm \sigma$, representando cada modo de vibração. A Tabela 3.2 detalha os resultados obtidos. É válido acrescentar que a diferença entre as estimativas da frequência natural pelo Analisador e STFT foram inferiores a 1 %. Portanto, estão apresentados somente os valores obtidos pelo STFT.

Tabela 3.2: Resultado do tratamento estatístico dos dados experimentais. Unidades: ω em [Hz] e ζ em [%].

Modo	Frequência Natural		Amortecimento	
	ω	σ	ζ	σ
1º	6,78	$\pm 0,01$	0,40	$\pm 0,03$
2º	26,93	$\pm 0,01$	0,20	$\pm 0,01$
3º	60,46	$\pm 0,04$	0,27	$\pm 0,04$
4º	106,59	$\pm 0,10$	0,38	$\pm 0,03$
5º	166,46	$\pm 0,24$	0,40	$\pm 0,07$
6º	242,49	$\pm 0,52$	0,44	$\pm 0,08$

3.3.2 Apresentação e Discussão dos Resultados

Ensaios Modais

O ensaio na viga permitiu obter uma grande quantidade de dados experimentais conforme apresentado na Figura 3.6. Com o auxílio do Matlab, verificou-se a dispersão dos resultados em relação a cada modo de vibração através da função *plotmatrix*, [23].

Essa função apresenta um gráfico em forma de matriz quadrada com histogramas e gráficos de dispersão. Por exemplo, seja um vetor $V = [x \ x^2]$, com os dados detalhados abaixo, a função retorna o gráfico apresentado na Figura 3.7.

$$V = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}^T$$

O gráfico na posição a_{11} da Figura 3.7 detalha o histograma da variável x , onde os valores: $\{-2, 1, 2\}$ aparecem uma vez cada; o valor $\{-1\}$ aparece duas vezes; e o $\{0\}$ aparece três vezes. De forma análoga, o gráfico presente na posição a_{22} ilustra o histograma da variável x^2 , onde o valor: $\{4\}$ aparece duas vezes e os valores $\{0, 1\}$ aparecem três vezes cada.

A posição fora da diagonal a_{21} ilustra os cinco pontos da parábola (x, x^2) , ao passo que o gráfico presente na posição a_{12} ilustra os mesmos cinco pontos, porém com o par ordenado (x^2, x) . Portanto as posições (i, j) e (j, i) representam o mesmo gráfico com eixos invertidos. Ou seja, a "matriz" é simétrica.

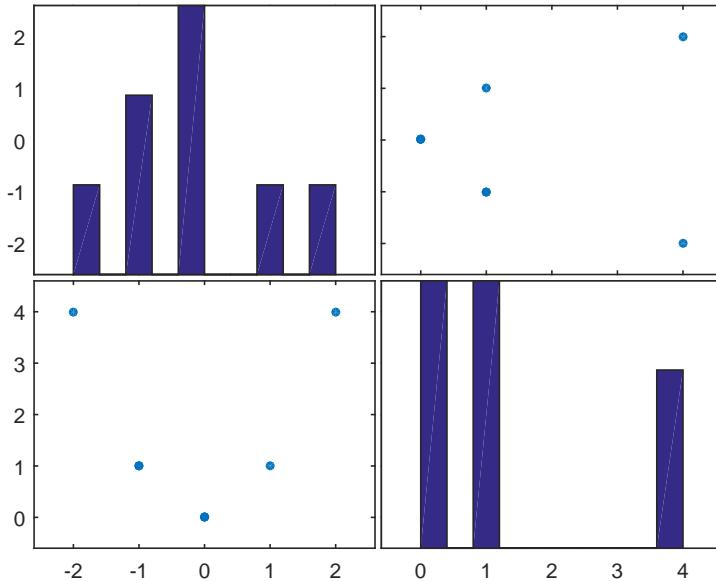


Figura 3.7: Exemplo da saída da função *plotmatrix* para o vetor V .

Passando agora a análise dos resultados experimentais, os polos experimentais estimados dos seis modos de vibração são apresentados na Figura 3.8.

Inicialmente ao analisar os histogramas das frequências naturais, posição a_{11} de cada figura, é possível perceber certa semelhança visual com uma pdf normal Gaussiana, o que parece não ocorrer com a mesma frequência para os histogramas das taxas de amortecimento, posição a_{22} de cada figura.

Portanto, a princípio é razoável perceber que a métrica adotada para avaliação da melhor estimativa para a frequência natural foi acertada, uma vez que em uma distribuição de probabilidades centrada, e.g. gaussiana, a média é uma boa opção de cálculo. Por outro lado, em distribuições assimétricas, como por exemplo a Figura 3.8c, ou bimodais, Figura 3.8b, outras métricas podem ser mais eficientes.

A variação experimental para a frequência natural é proporcionalmente muito inferior às evidenciadas para as taxas de amortecimento, o que torna, portanto, ζ um parâmetro modal muito mais sensível que ω .

Passando agora a avaliação da dispersão dos dados, posição a_{21} ou a_{12} (são simétricas) em cada modo de vibração, é possível inferir sobre a relação entre o par (ω, ζ) aplicando o conceito de independência. Segundo JOHNSON *et al.* [20] a independência é dada pela incapacidade de previsão, em qualquer nível de acurácia, de uma variável a partir das medições de uma segunda.

Sobre esse prisma, é possível afirmar que o par (ω, ζ) é independente para o 1º modo de vibração, Figura 3.8a. Por exemplo, observando a taxa de amortecimento $\zeta = 0,4\%$ não é possível verificar uma região mais provável para a respectiva frequência natural, ou seja, os valores possíveis para ω são praticamente todos os obtidos experimentalmente $6,75Hz \leq \omega \leq 6,80Hz$. Essa conclusão também pode ser aplicada ao 2º e 3º modo de vibração. No limite, a relação entre duas variáveis pode ser entendida como independente quando o gráfico da dispersão se aproximar de retas, ou elipses, bem acentuadas na vertical/horizontal e figuras planas como o círculo ou quadrado.

Por outro lado quando a relação entre duas variáveis gera uma dispersão que se aproxima de retas, ou elipses, inclinadas, fica evidente a condição de dependência entre as grandezas. Tanto o 5º quanto o 6º modo apresentam curvas de dispersão que sugerem que o par (ω, ζ) seja dependente, ou seja, para uma dada taxa de amortecimento existe uma região mais provável para obter a respectiva frequência natural e vice versa.

É importante ressaltar que as conclusões aqui formuladas são fruto de uma avaliação visual/conceitual dos resultados experimentais, ou seja, nenhum teste de hipóteses ou cálculo de distâncias euclidianas foi realizado.

Porém, mesmo que avaliações mais aprofundadas fossem realizadas, para cada um dos modos de vibração analisados, e indicassem, por exemplo, que as distribuições

de probabilidade de ω e ζ pudessem ser aproximadas por uma pdf normal Gaussiana, ainda assim não seria possível afirmar diretamente que $\boldsymbol{\theta} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ haja vista o comportamento não linear do mapeamento do vetor de parâmetros em seu subespaço solução, i.e., $\boldsymbol{\theta} \in D_{\theta}$.

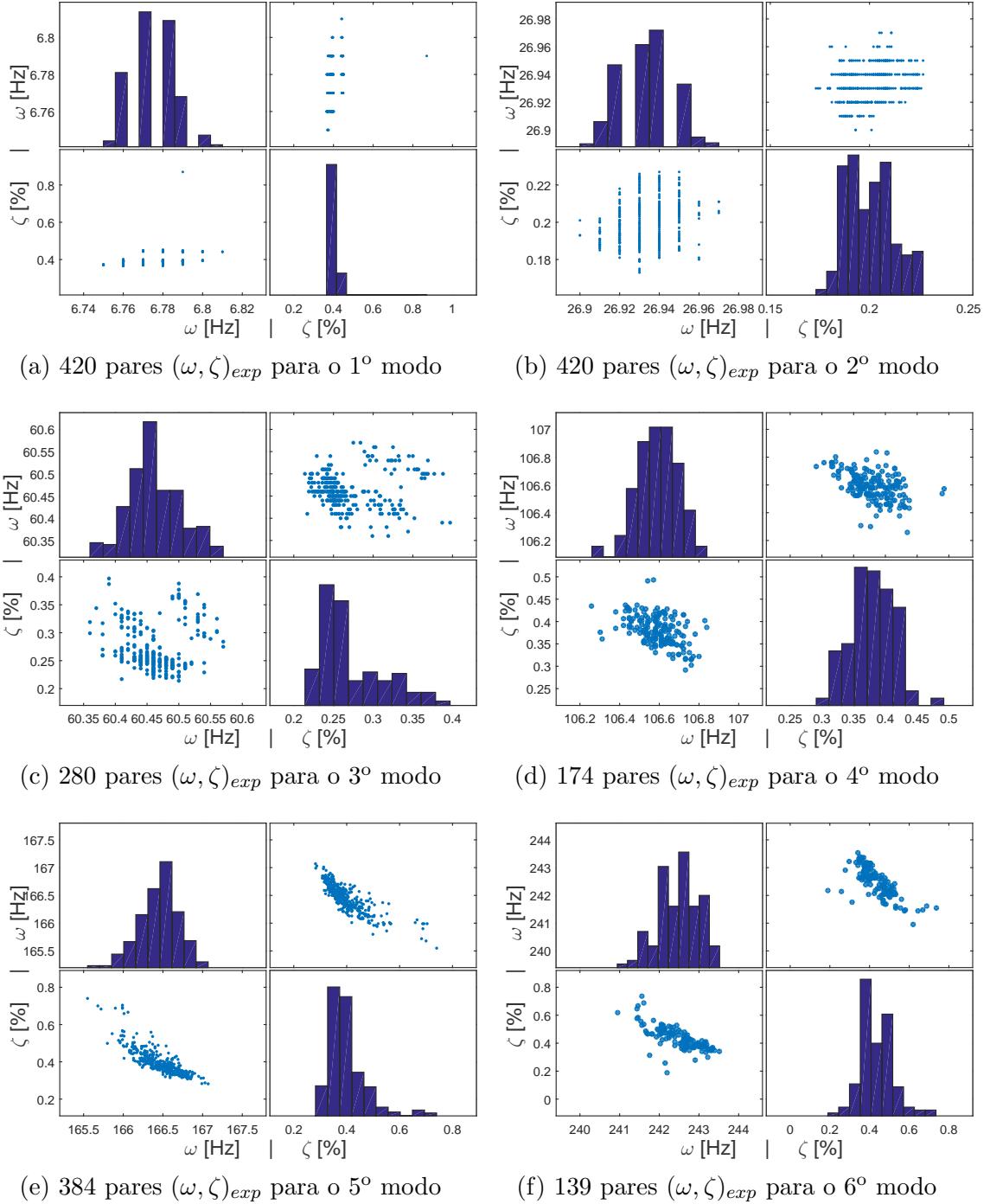


Figura 3.8: Dispersão dos polos experimentais estimados.

Ensaios com Dano

Após o pós-processamento dos sinais medidos nos ensaios e o devido tratamento estatístico, ver Item 3.3.1, a Tabela 3.3 apresenta os resultados das frequências naturais obtidas experimentalmente para a estrutura em situação íntegra, sem danos, e para os quatro cenários de dano simulados.

Nesta etapa buscou-se avaliar somente o grau de aproximação para as frequências naturais uma vez que, devido às modificações impostas à estrutura nos cenários criados, o amortecimento estrutural, *a priori*, não é mais governado pelo modelo proporcional proposto por Rayleigh.

A métrica adotada para avaliar a variação entre as frequências naturais no estado íntegro e danificado é dada por $dif = \left(1 - \frac{v^{num}}{v^{exp}}\right) \times 100\%$, onde v representa a variável em análise.

A análise da Tabela 3.3 permite verificar que todas as frequências naturais obtidas são inferiores às evidenciadas na situação íntegra. Esse comportamento era esperado, uma vez que, por exemplo, considerando um sistema dinâmico não amortecido com um grau de liberdade, as frequências naturais podem ser calculadas por $\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$. Portanto, seja em função do aumento da massa modal do sistema, ou a diminuição de sua rigidez, as frequências obtidas devem ser necessariamente inferiores às calculadas com suas propriedades iniciais.

Para um sistema com múltiplos graus de liberdade o conceito é análogo, porém a solução passa a ser calculada através do problema de autovalores e autovetores dado por $(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = \mathbf{0}$, onde a relação de proporcionalidade entre as frequências naturais e as matrizes globais de massa e rigidez é mantida.

Tabela 3.3: Frequências naturais para a estrutura íntegra e com dano. Unidades: ω [Hz] e dif [%].

Modo	Íntegra	Cenário A1		Cenário A2		Cenário B1		Cenário B2	
	ω	ω	dif	ω	dif	ω	dif	ω	dif
1º	6,78	6,59	2,7	6,71	0,9	6,50	4,1	6,66	1,7
2º	26,93	25,19	6,5	26,31	2,3	26,57	1,3	26,76	0,6
3º	60,46	57,16	5,5	59,14	2,2	59,16	2,2	59,84	1,0
4º	106,59	104,32	2,1	105,21	1,3	102,61	3,7	104,48	2,0
5º	166,46	165,25	0,7	165,78	0,4	165,46	0,6	165,87	0,4
6º	242,49	234,54	3,3	238,73	1,5	232,9	4,0	237,82	1,9

É possível verificar também que as maiores variações entre frequências naturais ocorreram nos cenários A1 e B1, uma vez que as magnitudes das massas impostas nesses casos são maiores do que as evidenciadas em A2 e B2, respectivamente.

De forma a facilitar a visualização da influência do dano simulado no comportamento estrutural, a FRF experimental, na posição AC1 dos acelerômetros, da estrutura íntegra foi comparada com a danificada para todos os cenários de dano simulados, Figura 3.9. As FRFs das demais posições dos acelerômetros são apresentadas no Apêndice A.

De maneira geral, a análise da Figura 3.9 permite afirmar que as massas impostas para simular danos estruturais não tiveram grande influência nas taxas de amortecimento modais, mesmo para os cenários onde as massas pontuais eram as maiores, $A1 \sim 9\%$ e $B1 \sim 5\%$ da massa total da viga bi-apoiada. Ou seja, o mesmo modelo de amortecimento utilizado para a situação íntegra é capaz também de simular os cenários com dano para o presente trabalho.

Já para as frequências naturais, o cenário A1 é o que produz as maiores variações entre as FRFs íntegra e danificada, Figura 3.9a, seguido por B1, Figura 3.9c. Essas variações em ω são evidenciadas principalmente nos modos de vibração com elevadas frequências naturais.

Por outro lado, a Figura 3.9b e 3.9d ilustram a baixa influência no comportamento dinâmico da estrutura nos cenários A2 e B2, onde as massas aplicadas representam, respectivamente, $\sim 3\%$ e $\sim 2\%$ da massa total da viga.

Todos esses resultados estão detalhados na Tabela 3.3.

É necessário ressaltar que quanto menor a diferença entre a resposta íntegra e danificada, maior a dificuldade em obter previsões computacionais acuradas no processo de identificação de dano.

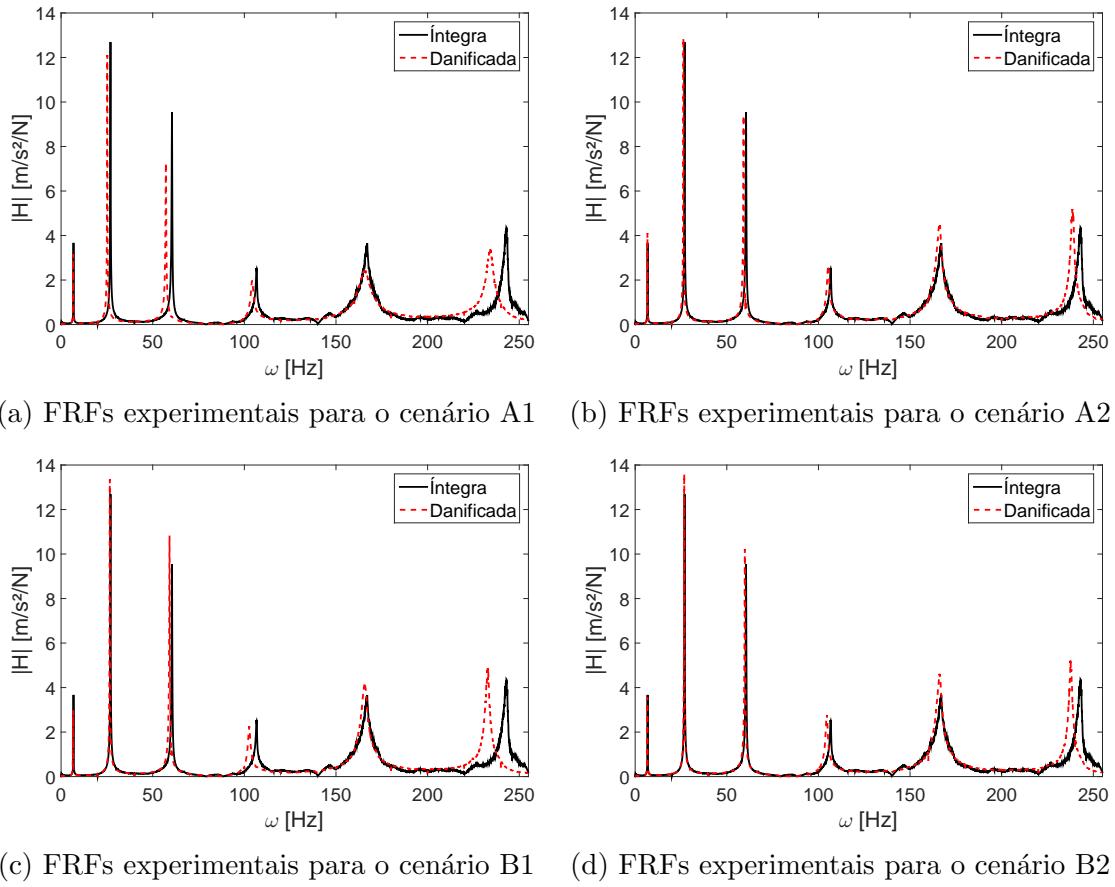


Figura 3.9: Comparação entre FRFs íntegra e danificada para a posição AC1 dos acelerômetros

Capítulo 4

Apresentação dos Resultados e Discussão

4.1 Introdução

Após realizar o procedimento experimental, Capítulo 3, o processo de *model updating* é iniciado. Conforme apresentado detalhadamente no fluxograma da Figura 1.1, o modelo computacional é calibrado, validado, e posteriormente, utilizado para identificação dos danos simulados.

Os resultados obtidos estão detalhados ao longo deste capítulo e divididos em três partes: no Item 4.2 são apresentados os resultados da calibração do modelo computacional, no Item 4.3 os modelos computacionais são validados e as incertezas do vetor de parâmetros são propagadas de acordo com as hipóteses adotadas, e por fim, os resultados obtidos para a identificação da posição e magnitude das massas que simulam os danos estruturais estão detalhados no Item 4.4.

A avaliação desses resultados segue uma lógica de comparação de acordo com as respostas fornecidas por cada hipótese de matriz de covariância utilizada. A hipótese 1, amplamente utilizada na literatura ($\Sigma_{\epsilon\epsilon}$ diagonal), é o ponto central para a investigação da função de verosimilhança.

4.2 Ajuste do Vetor θ

Na presente análise, o ajuste do vetor de parâmetros foi realizado a partir da minimização de uma função, denominada função custo, Eq. 2.13. Calbra-se o vetor θ através de uma abordagem determinística com o auxílio da função *lsqnonlin* do Matlab, $\theta \rightarrow \hat{\theta}$. A solução ótima do vetor de parâmetros é apresentada na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Solução ótima do vetor de parâmetros.

E [GPa]	α	β
76,7	3,14e-1	9,14e-6

Após o ajuste de $\boldsymbol{\theta}$, iniciou-se a etapa de propagação das incertezas relacionadas às suas variáveis: módulo de elasticidade E e os coeficientes do modelo proporcional de amortecimento α e β , Eq. 2.9. Após a análise da dispersão das previsões numéricas, teve início a avaliação da qualidade do modelo computacional proposto.

4.3 Validação do Modelo

Intervalos de confiança foram obtidos após a propagação das incertezas das variáveis que constituem o vetor $\boldsymbol{\theta}$. Através dessa abordagem probabilística foi possível fundamentar a tomada de decisão a respeito da qualidade do modelo computacional. Levando-se em consideração que um dos objetivos desta análise é a investigação da função de verosimilhança, buscou-se avaliar as dispersões do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$ e das previsões computacionais \mathbf{y}^m , de acordo com a hipótese adotada para a matriz de covariância.

Para avaliar a influência da incerteza de $\boldsymbol{\theta}$ nas previsões computacionais \mathbf{y}^m , foram comparados os dados experimentais e numéricos para a curva de amortecimento ($\omega \times \zeta$) e função de resposta em frequência $H_{pq}(\omega)$. Esses resultados são apresentados nos itens 4.3.1, 4.3.2 e 4.3.3 de acordo com as hipóteses 1, 2 e 3 da matriz de covariância, respectivamente.

Além disso, esses itens apresentam a dispersão dos resultados do vetor $\boldsymbol{\theta}$, das frequências naturais ω e das taxas de amortecimento ζ , i.e., das previsões computacionais \mathbf{y}^m .

De forma a não prolongar demasiadamente o presente Item, somente as funções de resposta em frequência para a posição AC1 dos acelerômetros são apresentadas. As demais FRFs obtidas para a validação do modelo, posições AC2 e AC3 dos acelerômetros, encontram-se no Apêndice A.

4.3.1 Hipótese 1 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$

Propagação das Incertezas

Conforme abordado no Item 2.4, essa hipótese adota que a matriz de covariância $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$ é diagonal, Eq. 2.20. Não há variância cruzada, ou seja, não existe correlação entre os diferentes elementos da matriz.

A partir da premissa de distribuição normal Gaussiana do vetor de parâmetros, $\boldsymbol{\theta} \sim \mathcal{N}(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \Sigma_{\boldsymbol{\theta}})$, e 1000 realizações de Monte Carlo, é possível propagar as incertezas associadas a $\boldsymbol{\theta}$, Figura 4.1, às frequências naturais, Figura 4.2, e às taxas de amortecimento, Figura 4.3.

De maneira análoga ao realizado no Item 3.3 a dispersão dos resultados é analisada com o auxílio da função *plotmatrix* do Matlab. Para maiores informações ver [23].

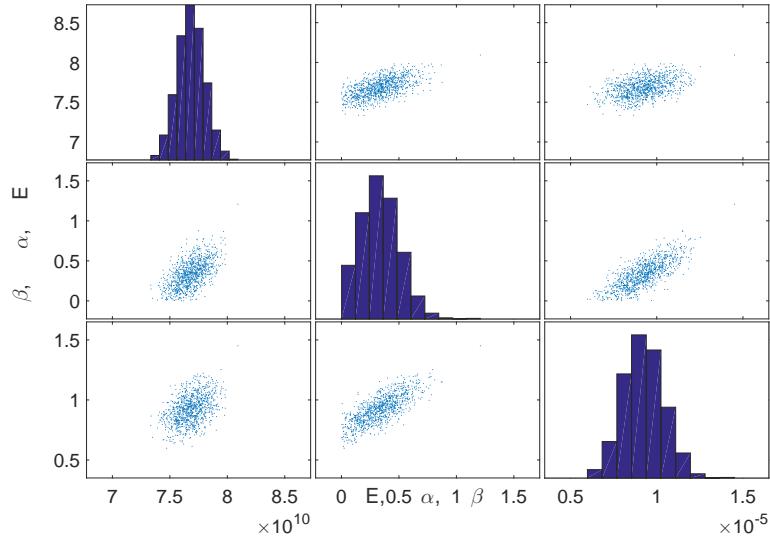


Figura 4.1: Dispersão do vetor de parâmetros para hipótese 1. Unidades: E em [Pa].

A análise da dispersão dos dados permite inferir sobre as relações entre as diversas variáveis presentes no estudo. Por exemplo, na Figura 4.1, onde encontram-se propagadas as incertezas relativas ao vetor de parâmetros, é possível inferir sobre a relação de dependência, entre os pares: (E, α) , (E, β) e (α, β) . O procedimento é análogo na análise das incertezas relacionadas às frequências naturais e taxas de amortecimento modal.

Para isso, é necessário retomar nesse momento o conceito de independência, [20], que é dado pela incapacidade de previsão de uma variável, em qualquer nível de acurácia, a partir das medições de uma segunda.

Da análise da Figura 4.1 é possível constatar que o par de variáveis (α, β) possui uma relação de dependência, ou seja, à medida que crescem os valores de α , elevam-se os valores de β . Essa conclusão é obtida pela análise do gráfico de dispersão situado na posição (3,2), ou (2,3) haja vista que são simétricos, da Figura 4.1.

Por outro lado, para os pares (E, α) e (E, β) , gráficos situados na posição (2,1) e (3,1), respectivamente, essa conclusão não é tão direta, e seria necessária a aplicação

de técnicas mais acuradas para afirmar sobre a dependência ou não entre essas variáveis. É interessante notar que o comportamento esperado, i.e., independência entre o módulo de elasticidade e os coeficientes do amortecimento proporcional, não ficou claro na presente análise.

Nota-se que apenas para α houve a necessidade de truncar a pdf para realização das simulações de Monte Carlo. Esse fato é evidenciado no histograma do respectivo coeficiente, posição (2,2) da Figura 4.1.

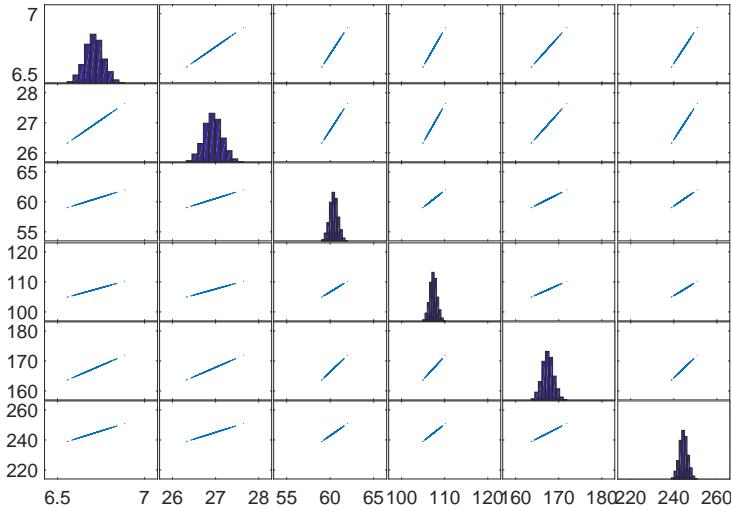


Figura 4.2: Dispersão das frequências naturais para hipótese 1. Unidades: ω em [Hz].

Ao analisar a Figura 4.2 fica evidente a relação de dependência. Em qualquer par de frequências naturais escolhido (ω_q, ω_z) , onde qa e z representam o número do modo de vibração, a relação de proporcionalidade é verificada. Chama-se a atenção para o fato de que a dispersão entre as diferentes frequências é aproximadamente uma reta inclinada. Isso ocorre em função da baixa variabilidade de ω .

Ao passo que a incerteza associada às variáveis em análise aumenta, o gráfico da dispersão distancia-se da reta e aproxima-se de uma elipse. No limite, onde as incertezas são muito elevadas, a relação de dependência deixa de existir e o gráfico tende a algo semelhante a uma circunferência.

As taxas de amortecimento modal também apresentam uma relação de dependência, Figura 4.3. Nota-se que ao passo que a distância entre as taxas de amortecimento avaliadas aumenta, por exemplo entre o 1º e 6º modos de vibração, os gráficos da dispersão tendem à elipses inclinadas, o que indica uma elevação na incerteza da obtenção de uma taxa de amortecimento a partir da medição da outra.

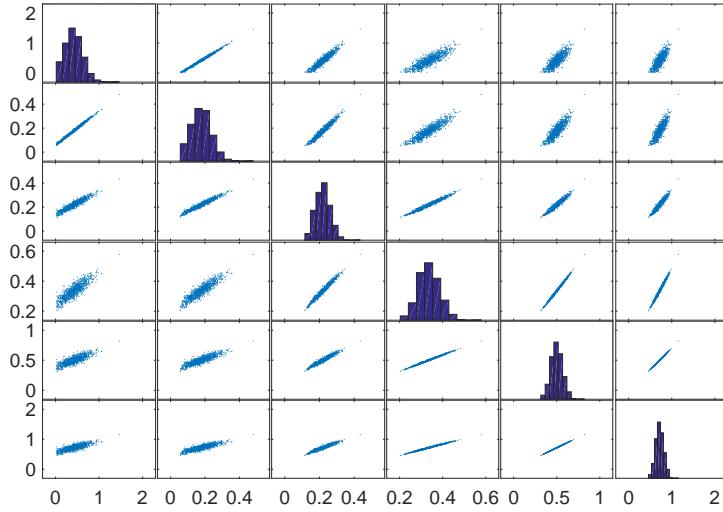


Figura 4.3: Dispersão das taxas de amortecimento para hipótese 1. Unidades: ζ em [%].

Avaliação das Predições Computacionais

A Figura 4.4 apresenta a curva de amortecimento e a Figura 4.5 a FRF na posição AC1 dos acelerômetros. As duas curvas foram obtidas considerando a hipótese 1 da matriz de covariância dos dados.

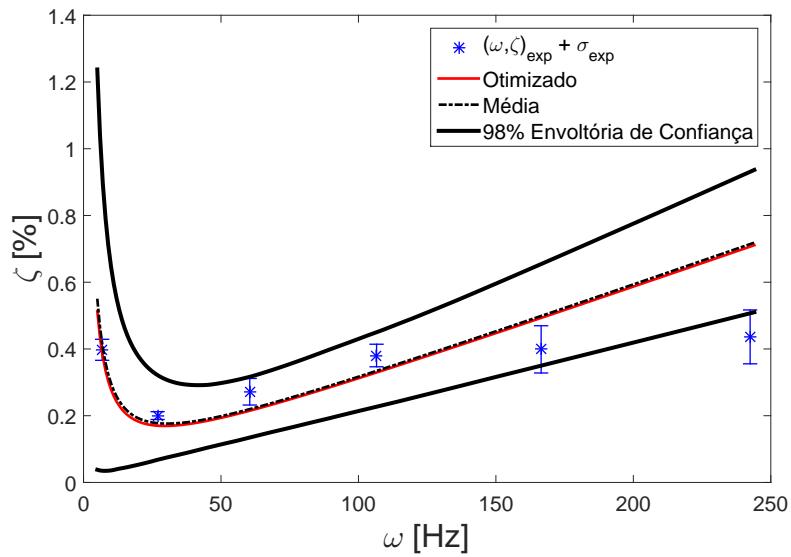


Figura 4.4: Curva de amortecimento na hipótese 1.

De acordo com a curva de amortecimento da Figura 4.4 é possível constatar que o modelo computacional obteve bons resultados para o processo de *model updating* até o quinto modo de vibração. A solução determinística, curva vermelha, se aproxima

do resultado médio experimental, asterisco (*) azul e o respectivo desvio de cada modo, barras verticais em azul, estão dentro da região de 98 % de confiança.

É possível acrescentar que, para este caso, a solução ótima converge para a solução média, curva preta pontilhada. Esse era um comportamento esperado haja vista a hipótese inicial formulada para o vetor de parâmetros, Eq. 2.9, i.e., pdf normal Gaussiana com média dada pela solução determinística e matriz de covariância conhecida. Porém, essa convergência não é verificada para todo e qualquer cenário, ver Item 4.3.3.

Entretanto, o modelo computacional não foi capaz de simular, dentro da região de confiança, os dados experimentais obtidos para o sexto modo de vibração. É interessante observar que do ponto de vista do comportamento global da viga as taxas de amortecimento variam entre [0,2 à 0,6] %, aparentemente convergindo para algo em torno de 0,4 % se forem observados os últimos três modos de vibração.

Para a viga de alumínio ensaiada, surge então um questionamento sobre a adequação do modelo de amortecimento proporcional em altas frequências, haja vista que esta formulação é crescente e os dados experimentais sugerem uma convergência das taxas de amortecimento.

Porém, é necessário notar que do ponto de vista da prática de projeto na engenharia civil a excitação do sexto modo é irrelevante e que as conclusões aqui alcançadas são fruto de simples observação da Figura 4.4. Para afirmativas contundentes, avaliações mais aprofundadas seriam necessárias, tais como análise de sensibilidade, emprego de outros modelos de amortecimento proporcional, etc.

Portanto, da análise da Figura 4.4, que representa o item (i) adotado para verificar a calibração do modelo computacional, é possível concluir que os resultados obtidos simulam o comportamento dinâmico da viga de alumínio, para os cinco primeiros modos de vibração, de forma satisfatória.

Passa-se agora para a análise do item (ii) de acordo com a Figura 4.5, que apresenta a FRF para a posição AC1 dos acelerômetros. Conforme dito anteriormente, as FRFs para as posições AC2 e AC3 encontram-se no Apêndice A.

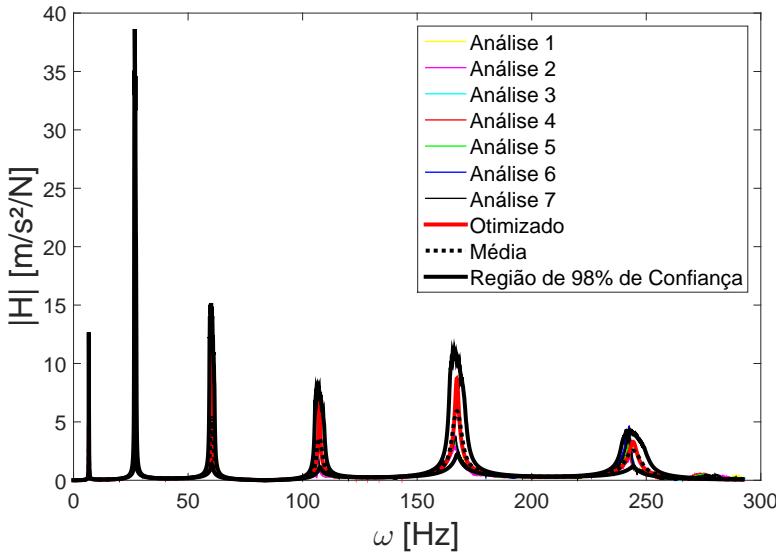


Figura 4.5: FRF no acelerômetro AC1 na hipótese 1.

A análise da Figura 4.5 evidencia o mesmo comportamento obtido para a curva de amortecimento, Figura 4.4, onde as FRFs dos sete ensaios experimentais realizados encontram-se no interior da região de 98 % de confiança. O comportamento da incerteza também é análogo, ou seja, quanto maiores as frequências avaliadas, maior é a região de confiança para as previsões do modelo computacional, tanto para a amplitude de $H(\omega)$, quanto para a janela de frequências na região de ressonância do respectivo modo.

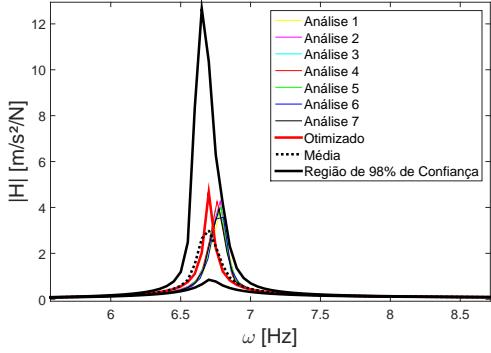
De forma a permitir uma visualização mais precisa, a Figura 4.6 apresenta em detalhe as regiões de ressonância para cada um dos seis modos de vibração analisados.

A análise da Figura 4.6a à 4.6f confirma a inclusão de todas as FRFs experimentais na região de confiança do modelo computacional, inclusive para o sexto modo de vibração, o que não ocorreria na análise da curva de amortecimento. Por outro lado, as soluções ótima (curva vermelha) e média (preta pontilhada) não convergem para o mesmo resultado como anteriormente, ou seja, na prescrição do amortecimento, Figura 4.4. Pelo contrário, essas soluções alternam-se como a melhor aproximação da FRF em cada um dos modos de vibração analisados. Por exemplo, o 1º e 3º modos são melhor aproximados pela solução ótima, ao passo que para o 2º e 4º a solução média é mais satisfatória.

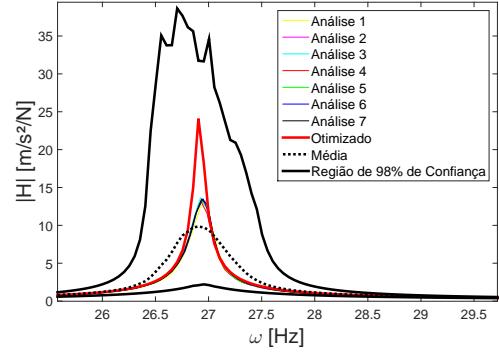
Nenhuma das duas soluções computacionais,i.e. ótima (curva vermelha) e média (preta pontilhada) conseguiu aproximar-se, com boa qualidade, dos resultados experimentais do 5º modo. Um dos possíveis motivos é o que diz respeito à localização da excitação com o martelo e da medição pelo acelerômetro AC1, que não privilegiam a aferição de tal modo.

É interessante notar que ao contrário do evidenciado na curva de amortecimento, Figura 4.6f, praticamente todas as FRF experimentais do 6º modo de vibração encontram-se no interior da região de 98 % de confiança. No entanto, não é possível concluir qual das duas soluções, a ótima ou a média, é a melhor. Isso também se deve ao fato da perda de acurácia do modelo computacional devido à baixa energia de excitação.

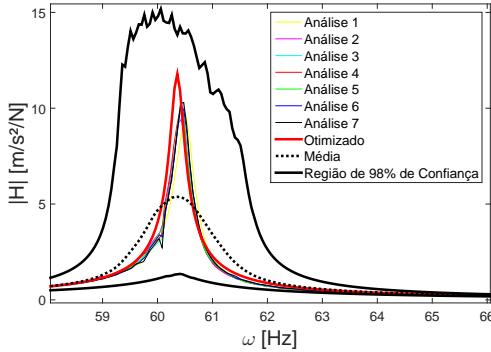
Portanto, haja vista a boa correlação entre os dados experimentais e computacionais, evidenciadas tanto na curva de amortecimento Figura 4.4, quanto nas FRFs Figuras 4.5 e 4.6, o modelo é considerado calibrado e apto para o processo de identificação de dano, Item 4.4. Essas conclusões são endossadas quando da análise das FRFs para as posições AC2, Figuras A.3 e A.5,e AC3, Figuras A.4 e A.6.



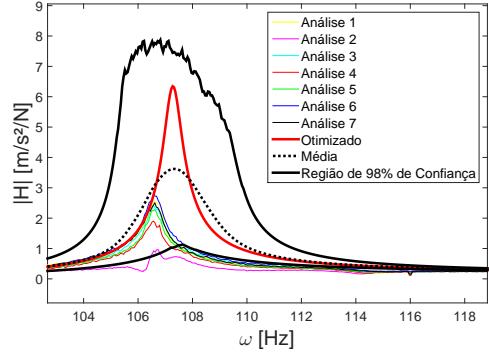
(a) Região de ressonância do 1º modo



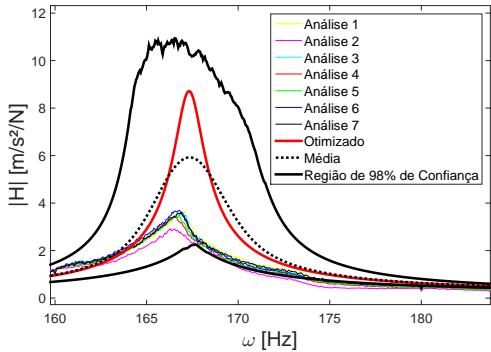
(b) Região de ressonância do 2º modo



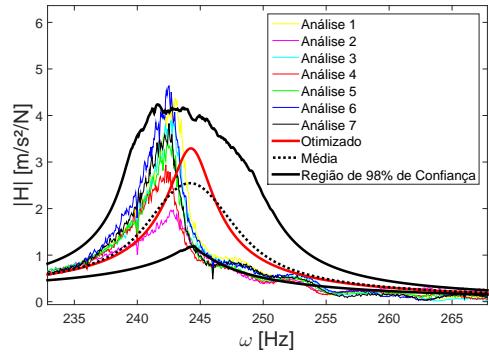
(c) Região de ressonância do 3º modo



(d) Região de ressonância do 4º modo



(e) Região de ressonância do 5º modo



(f) Região de ressonância do 6º modo

Figura 4.6: Regiões de ressonância da FRF no acelerômetro AC1 na hipótese 1.

4.3.2 Hipótese 2 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$

Propagação das Incertezas

A hipótese 2 adota que a matriz de covariância $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$ é completa, Eq. 2.21, conforme abordado no Item 2.4. Aproveitando a grande quantidade de ensaios, calculou-se a variância da massa completa de dados experimentais.

O mesmo procedimento utilizado na hipótese 1 é utilizado para propagar as incertezas para a hipótese 2, ou seja, a partir da premissa de distribuição normal Gaussiana do vetor de parâmetros e simulações de Monte Carlo, foi possível propagar

as incertezas associadas ao vetor θ , Figura 4.7, às frequências naturais, Figura 4.8, e às taxas de amortecimento, Figura 4.9.

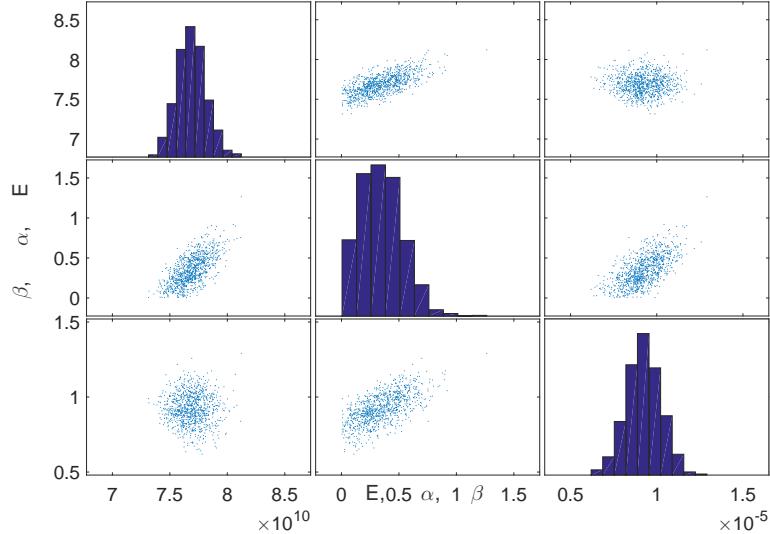


Figura 4.7: Dispersão do vetor de parâmetros para hipótese 2. Unidade: E[Pa].

A propagação das incertezas do vetor de parâmetros para a hipótese 2, Figura 4.7, mantém a relação de dependência entre (α, β) . Já a relação entre o módulo de elasticidade e os coeficientes do modelo de amortecimento ficaram mais evidentes. Para a hipótese 2, a dispersão associada ao par (E, β) indica uma independência, ou seja, não é possível prever E a partir das medições de β , e vice-versa, JOHNSON *et al.* [20]. Por outro lado, para o par (E, α) a dispersão sugere a relação de dependência entre as variáveis, o que não constitui um comportamento esperado para os dois parâmetros.

É necessário ressaltar que essas conclusões são apenas conceituais, obtidas através da observação das dispersões produzidas pela propagação das incertezas do vetor θ , haja vista que a análise das dependências entre as propriedades dinâmicas das estruturas não faz parte do objetivo central do presente trabalho.

Analogamente ao ocorrido na hipótese 1, nota-se que apenas para α houve a necessidade de truncar a pdf para realização das simulações de Monte Carlo. Esse fato é evidenciado no histograma do coeficiente, posição (2,2) da Figura 4.7.

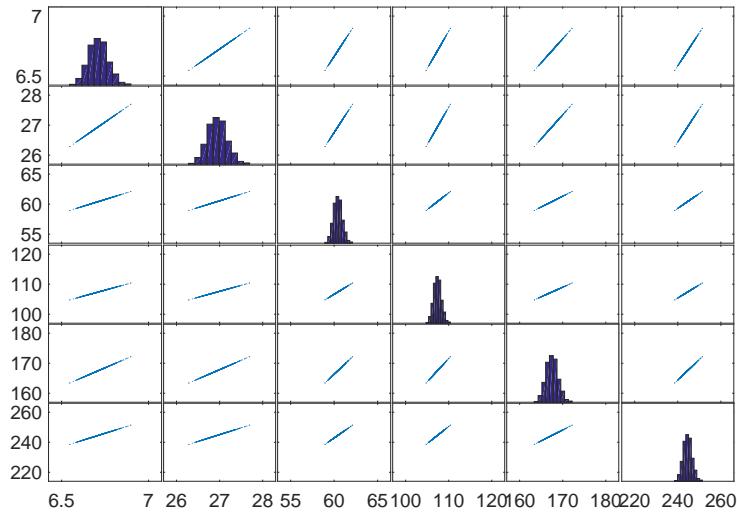


Figura 4.8: Dispersão das frequências naturais para hipótese 2. Unidade: [Hz]

Ao analisar a Figura 4.8 e 4.9 fica evidente a relação de dependência para as frequências naturais e as taxas de amortecimento, respectivamente.

Excluindo-se o a relação obtida na Figura 4.7 entre o módulo de elasticidade e os coeficientes do modelo de amortecimento proporcional, todas as conclusões verificadas para a hipótese 1 foram repetidas para a hipótese 2. Essa constatação é de grande relevância, uma vez que corrobora com a viabilidade da simplificação sugerida pela hipótese 1 que propõe uma aproximação da matriz de covariância em uma matriz diagonal.

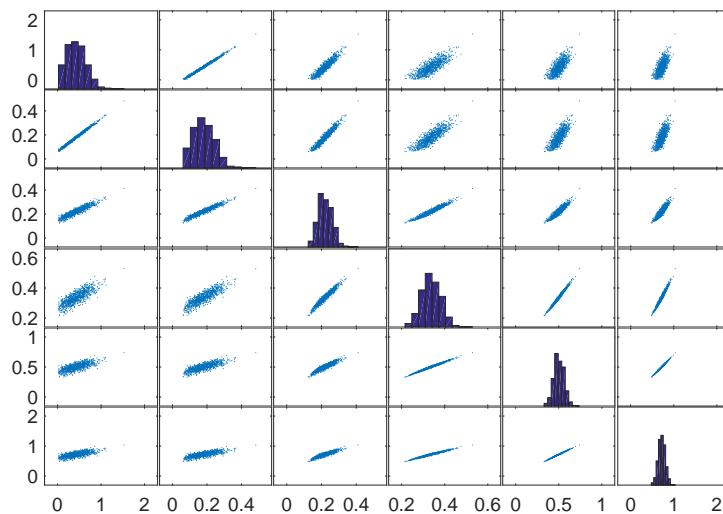


Figura 4.9: Dispersão das taxas de amortecimento para hipótese 2. Unidade: [%]

Avaliação das Predições Computacionais

A Figura 4.10 apresenta a curva de amortecimento estimada de acordo com a hipótese 2. É possível verificar o mesmo comportamento observado na curva obtida para a hipótese 1, Figura 4.4, a saber: a solução ótima converge para a solução média; as médias experimentais e seus desvios, até o quinto modo, estão dentro do intervalo de 98 % de confiança; e a solução determinística se aproxima dos valores médios dos ensaios também até o quinto modo.

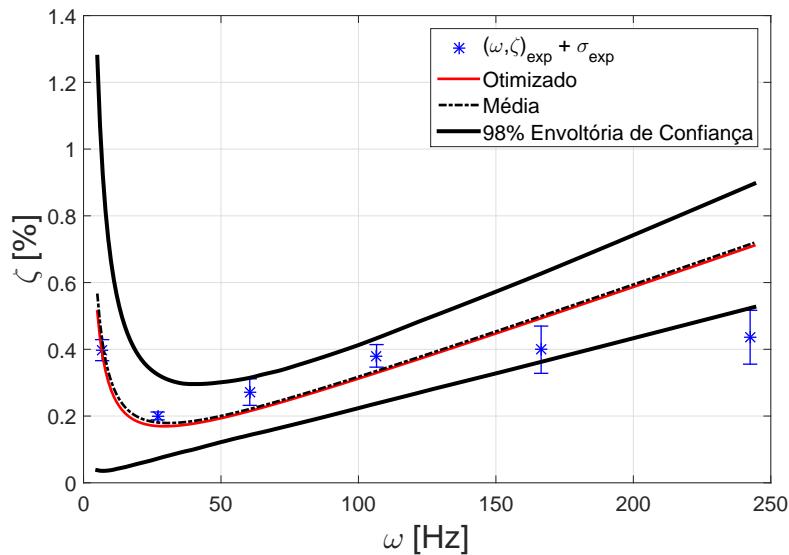


Figura 4.10: Curva de amortecimento na hipótese 2.

O questionamento sobre a adequação do modelo de amortecimento proporcional em altas frequências na presente análise, levantado anteriormente, continua válido, haja vista que esta formulação é crescente e os dados experimentais sugerem uma convergência das taxas de amortecimento.

Na realidade, uma análise comparativa entre a Figura 4.4 e 4.10 permite constatar a quase perfeita identidade entre as predições do modelo computacional para as curvas de amortecimento considerando a hipótese 1, $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$ diagonal, e a hipótese 2, $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$ completa.

Conclui-se então que as variâncias cruzadas são irrelevantes quando comparadas às variâncias diagonais, sendo possível portanto desconsiderá-las, na propagação das incertezas dos parâmetros de interesse, sem perda na qualidade das predições do modelo. Portanto, $\Sigma_{\epsilon\epsilon}^{diag} \sim \Sigma_{\epsilon\epsilon}^{comp}$, onde $\Sigma_{\epsilon\epsilon}^{diag}$ representa a matriz de covariância dada pela hipótese 1 (diagonal) e $\Sigma_{\epsilon\epsilon}^{comp}$ representa a covariância dada pela hipótese 2 (completa).

Essa conclusão é importante pelo fato de que, em termos gerais, a utilização de matrizes diagonais reduz o esforço computacional e permite uma série de sim-

plificações nos cálculos matriciais, além de, já do ponto de vista da propagação de incertezas, não impor a necessidade de grande massa de dados experimentais para o realizar o cálculo da matriz de covariância.

Passa-se agora à análise da FRF para a posição AC1 dos acelerômetros, Figura 4.11. Objetivando não prolongar o presente item, de maneira análoga ao realizado anteriormente, as FRFs para as posições AC2 e AC3 foram colocadas no Apêndice A.

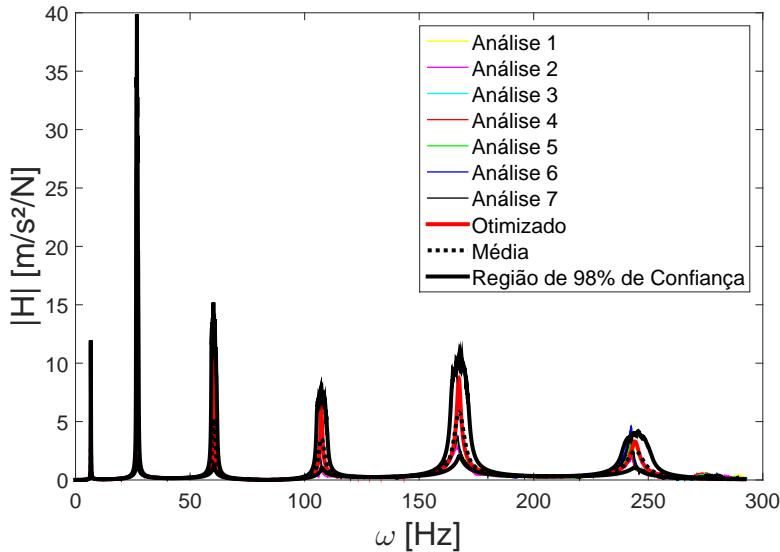
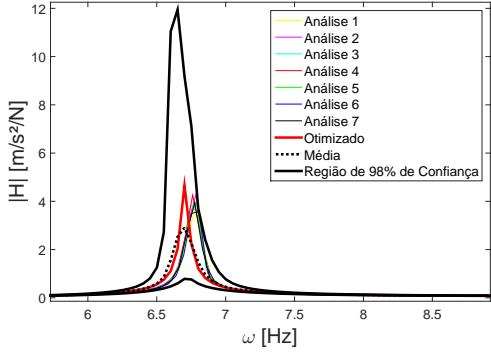


Figura 4.11: FRF no acelerômetro AC1 na hipótese 2.

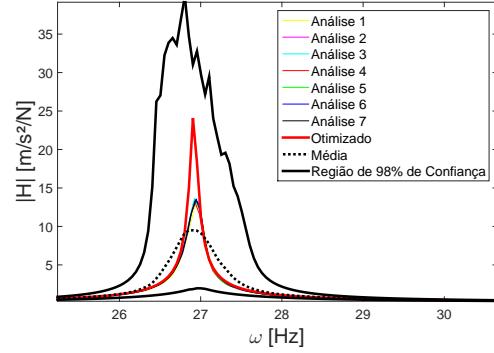
A análise da Figura 4.11 evidencia o mesmo comportamento obtido para a curva de amortecimento, Figura 4.10, onde as FRFs dos sete ensaios experimentais encontram-se no interior da região de 98 % de confiança. Quanto maiores as frequências avaliadas, mais alargada é a região de confiança para as predições do modelo computacional.

Essa conclusão já era esperada, uma vez que as matrizes de covariância são praticamente iguais e a propagação das incertezas para a FRF são obtidas a partir da definição $\boldsymbol{\theta} \sim \mathcal{N}(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \Sigma_{\boldsymbol{\theta}})$, onde $\Sigma_{\boldsymbol{\theta}} = \Sigma_{\epsilon\epsilon}^{diag} \iff \Sigma_{\boldsymbol{\theta}} = \Sigma_{\epsilon\epsilon}^{comp}$.

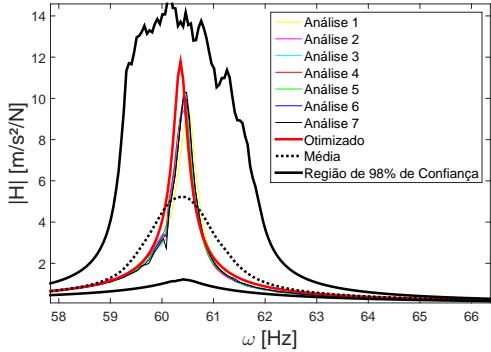
De forma a permitir uma visualização mais precisa, a Figura 4.6 apresenta em detalhe as regiões de ressonância para cada um dos seis modos de vibração analisados.



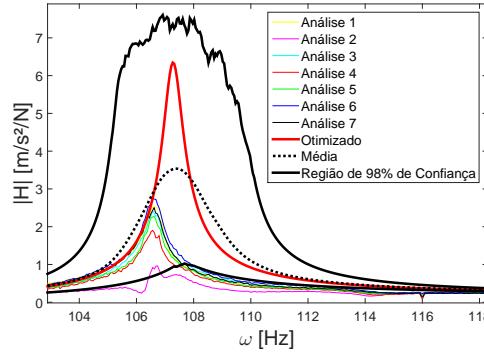
(a) Região de ressonância do 1º modo



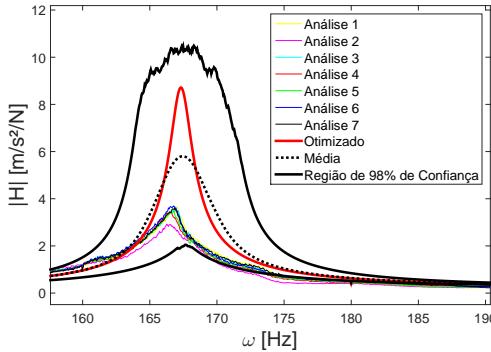
(b) Região de ressonância do 2º modo



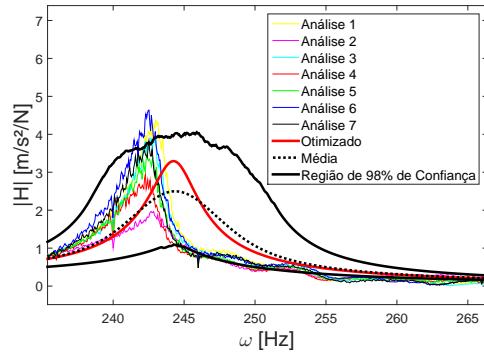
(c) Região de ressonância do 3º modo



(d) Região de ressonância do 4º modo



(e) Região de ressonância do 5º modo



(f) Região de ressonância do 6º modo

Figura 4.12: Regiões de ressonância da FRF no acelerômetro AC1 na hipótese 2.

A análise da Figura 4.12a à 4.12f confirma a inclusão de todas as FRFs experimentais na região de confiança do modelo computacional, inclusive para o sexto modo de vibração, assim como verificado para a hipótese 1.

Portanto, é possível afirmar que não há diferença representativa nas previsões do modelo computacional em função da escolha entre a hipótese 1 ou 2 para a matriz de covariância dos dados. Essa conclusão demonstra a viabilidade da formulação de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$ como uma matriz diagonal, assim como evidenciado no momento da propagação das incertezas do vetor de parâmetros.

4.3.3 Hipótese 3 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$

Propagação das Incertezas

A última hipótese para formulação da matriz de covariância, hipótese 3, considera que $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$ é função da solução determinística do ajuste computacional. De acordo com BECK *et al.* [19], a covariância pode ser formulada como uma matriz diagonal avaliada no ponto de ótimo obtido para o vetor de parâmetros. Portanto, $\Sigma_{\epsilon\epsilon}(\hat{\theta})$, Eq. 2.22.

Ao observar a Figura 4.13, que apresenta a propagação das incertezas para o vetor θ , é evidente a diferença da dispersão dos resultados em relação às outras duas hipóteses. A variabilidade nos coeficientes α e β foram de tal magnitude que impuseram um truncamento na pdf para as simulações de Monte Carlo que praticamente inviabilizam qualquer inferência sobre a relação de dependência, ou independência, entre as três variáveis. Pode se observar o mesmo padrão de comportamento para a propagação das incertezas das taxas de amortecimento, Figura 4.15.

Por outro lado, a propagação das incertezas das frequências naturais produziu gráficos de dispersão muito semelhantes aos das hipóteses 1 e 2, Figura 4.14. Isso pode ser explicado pelo fato de que as frequências dos modos de vibração são independentes das formulações de amortecimento estrutural, estando associadas à massa e rigidez. Portanto, esse comportamento já era esperado para ω .

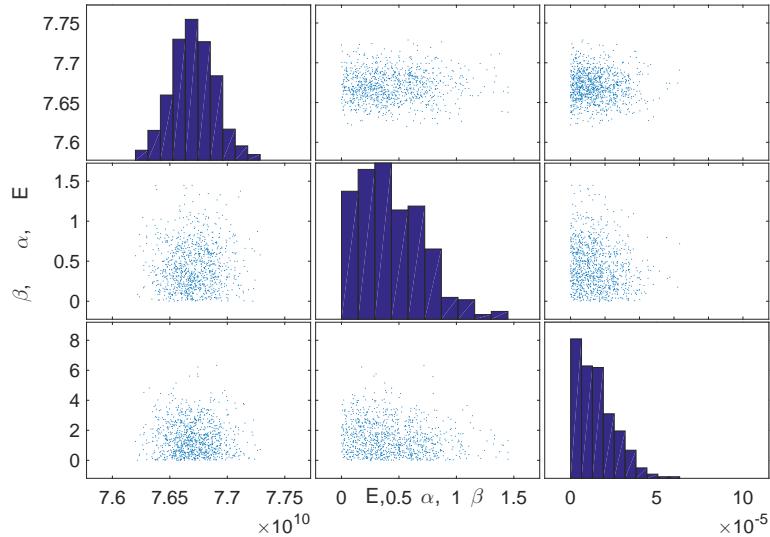


Figura 4.13: Dispersão do vetor de parâmetros para hipótese 3. Unidade: E[Pa].

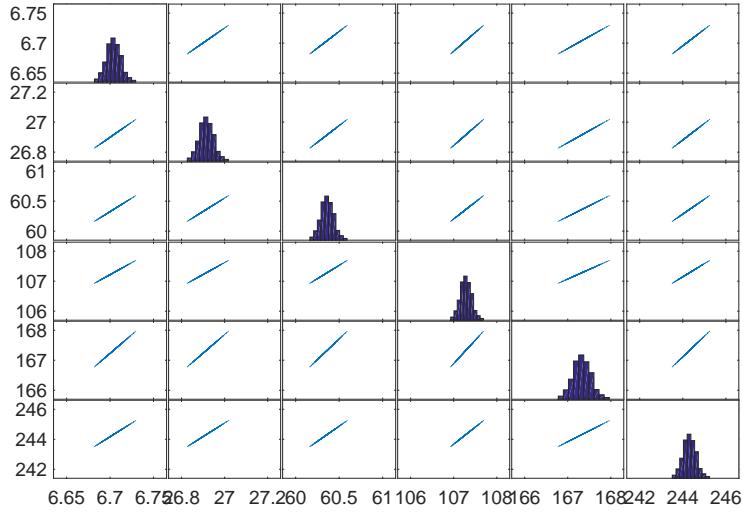


Figura 4.14: Dispersão das frequências naturais para hipótese 3. Unidade: [Hz]

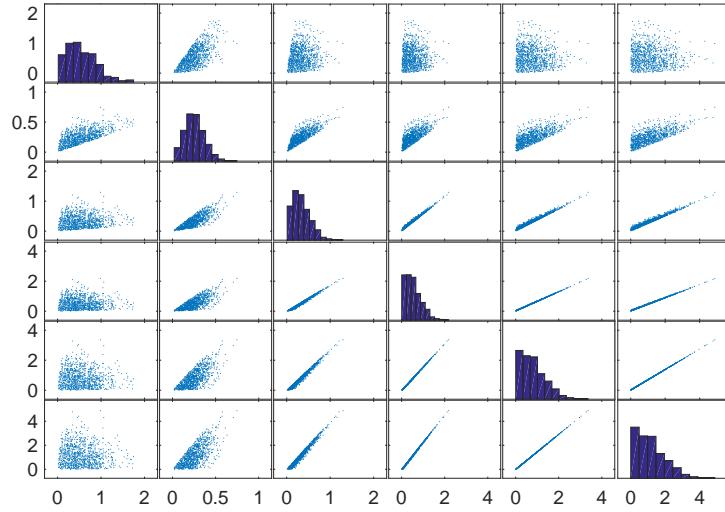


Figura 4.15: Dispersão das taxas de amortecimento para hipótese 3. Unidade: [%]

Então, pode-se afirmar que a hipótese 3 utilizada para a formulação da matriz de covariância, onde esta é avaliada no ponto de ótimo obtido para o vetor de parâmetros, $\Sigma_{\epsilon\epsilon}(\hat{\theta})$, não forneceu resultados satisfatórios nesta etapa da análise.

Apesar de o módulo de elasticidade ter mantido um grau de incerteza semelhante ao verificado nas hipóteses 1 e 2, os coeficientes de amortecimentos demonstraram alta variabilidade. Esse fato sugere, *a priori*, que a escolha da hipótese 3 para a matriz de covariância, não é eficiente nesta análise, uma vez que indica que o modelo computacional resultante possa produzir previsões de elevada incerteza, e

portanto, de baixa qualidade.

Avaliação das Predições Computacionais

A Figura 4.16 apresenta a curva de amortecimento estimada de acordo com a hipótese 3 que claramente possui grande diferença quando comparada com as curvas obtidas com as hipóteses anteriores. Apesar de todos os dados experimentais dos pólos, médias e respectivos desvios, estarem dentro da região de 98 % de confiança, as incertezas relacionadas às taxas de amortecimento não permitem fundamentar qualquer análise sobre as previsões do modelo computacional.

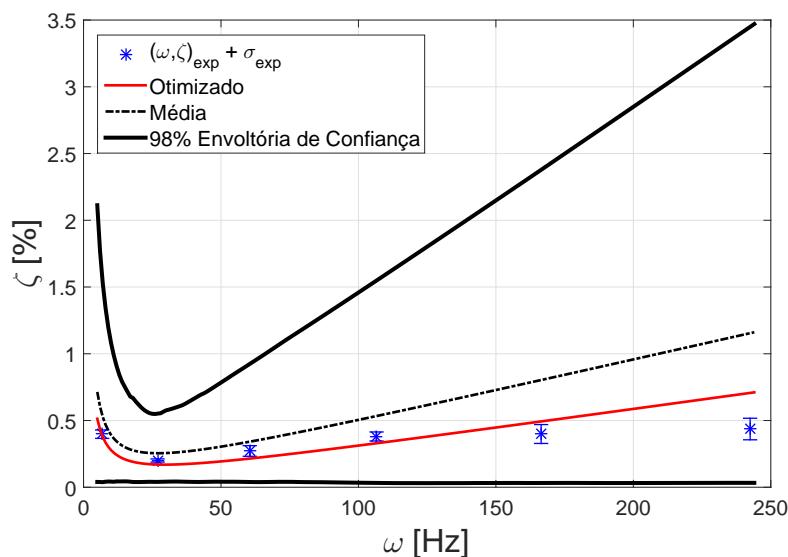


Figura 4.16: Curva de amortecimento na hipótese 3.

Por exemplo, a discussão levantada anteriormente sobre a formulação do modelo proporcional é prejudicada pela baixa qualidade na avaliação das incertezas do amortecimento.

A elaboração da região de confiança, neste caso, não aumentou o nível de informação para auxiliar na validação do modelo computacional. Pelo contrário, sua formulação aumenta, em muito, a possibilidade de variação das taxas de amortecimento conforme a frequência de interesse se eleva. Esse comportamento estava presente nas curvas obtidas com as hipóteses anteriores, Figura 4.4e 4.10, porém com expressiva redução na variabilidade da ζ .

É interessante notar que a solução ótima (curva vermelha) não converge para a solução média (curva preta pontilhada) como verificado anteriormente para as curvas de amortecimento obtidas pelas hipóteses 1 e 2. Isso pode ser explicado pela premissa fundamental adotada neste trabalho, i.e. $\boldsymbol{\theta} \sim \mathcal{N}(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \Sigma_{\boldsymbol{\theta}})$.

Sabendo que o vetor de parâmetros é composto por variáveis estritamente positivas e que a pdf Gaussiana é uma função simétrica em torno do seu valor médio, o truncamento imposto às realizações de Monte Carlo, $\theta_{MC} > \mathbf{0}$, desloca a solução média para cima, uma vez que valores negativos não podem ser sorteados na simulação numérica. A Figura 4.16 demonstra claramente esse comportamento.

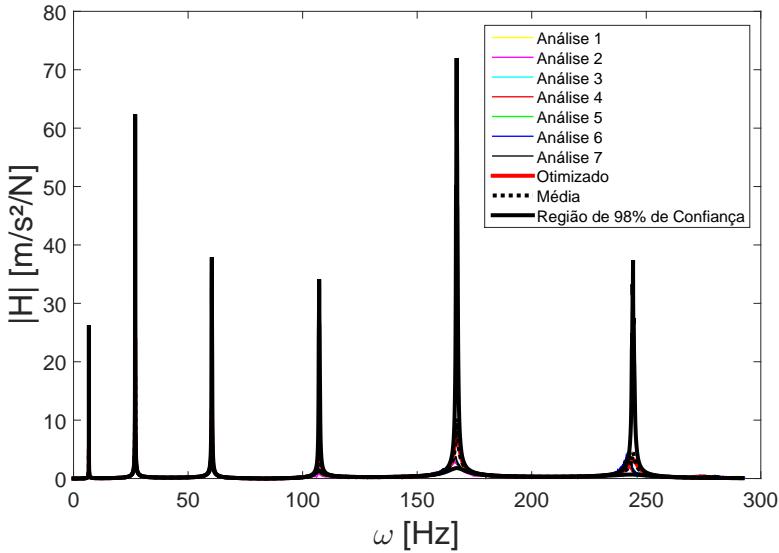


Figura 4.17: FRF no acelerômetro AC1 na hipótese 3.

A Figura 4.17 apresenta o impacto que a hipótese 3 da covariância produz na FRF para a posição AC1 dos acelerômetros. Devido à alta variabilidade de ζ , verificada na curva de amortecimento, as amplitudes de $H(\omega)$ na ressonância dos modos de vibração são muito superiores às obtidas experimentalmente.

De forma a permitir uma visualização mais precisa, a Figura 4.18 apresenta em detalhe as regiões de ressonância para cada um dos seis modos de vibração analisados.

De acordo com a análise das figuras 4.18a à 4.18f, é possível verificar que as predições computacionais para as amplitudes de $H(\omega)$ não apresentam nenhum grau de correlação com nenhuma das FRFs experimentais obtidas nos sete ensaios.

Portanto, após a análise da curva de amortecimento, Figura 4.16 e a FRF na posição AC1, Figura 4.18, fica claro que, para a presente análise, a hipótese de cálculo da matriz de correlação no ponto de ótimo, i.e. hipótese 3, não produziu resultados satisfatórios na investigação das incertezas relativas ao vetor de parâmetros, não sendo uma premissa eficiente para o posterior desenvolvimento de um modelo computacional.

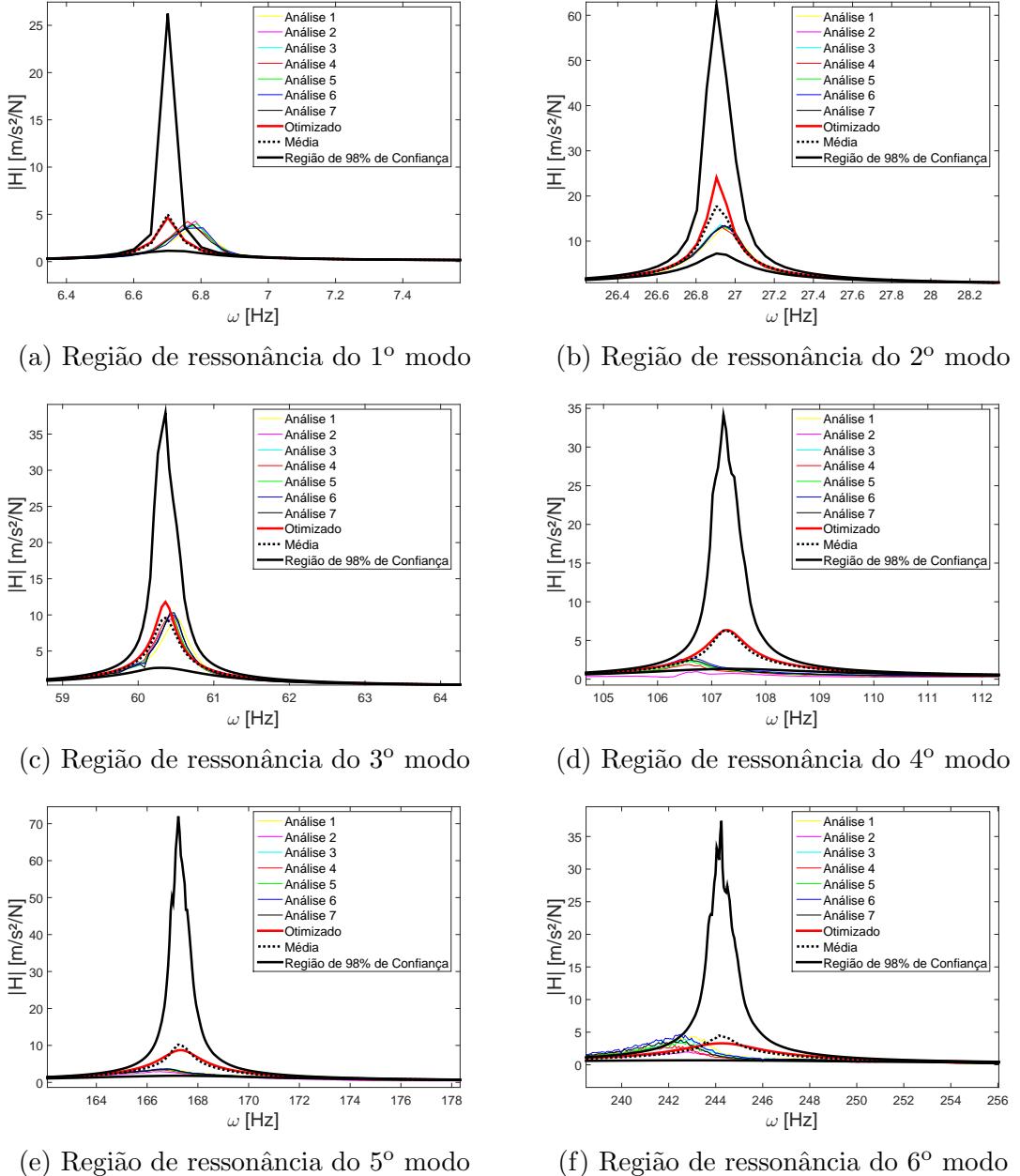


Figura 4.18: Regiões de ressonância da FRF no acelerômetro AC1 na hipótese 3.

4.4 Identificação de Dano

Após a calibração e validação, o modelo computacional foi utilizado para identificar danos. No presente trabalho esses danos estruturais são simulados a partir da aplicação de massas ao longo da estrutura e divididos em quatro cenários. Para maiores detalhes ver Capítulo 3.

Essa etapa da análise consiste na otimização de um novo vetor de parâmetros em função das variáveis que serão ajustadas, mantendo-se fixo o vetor $\boldsymbol{\theta}$ na posição dada pela solução determinística. Portanto, tem-se que $\boldsymbol{\eta} = [X_{massa} \ M_{massa}]^T$, onde

busca-se $\boldsymbol{\eta} \rightarrow \hat{\boldsymbol{\eta}}$ dado $\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}$.

Conforme detalhado no Capítulo 2 a identificação de dano foi realizada no ambiente Matlab utilizando o algoritmo enxame de partículas, [14], com implementações em seu código, propostas por CLERC *et al.* [15], para auxiliar na convergência.

De forma a avaliar a qualidade do processo de identificação dos cenários de dano, ver Tabela 3.1, foram comparados os dados experimentais e a predição computacional para a posição e magnitude da massa imposta à estrutura, assim como o grau de correlação entre as funções de resposta em frequência $H_{pq}(\omega)$.

É válido ressaltar que nesta etapa não foram realizadas simulações de Monte Carlo para verificar a dispersão da posição ou magnitude da massa em cada cenário, assim como análises de sensibilidade do número de populações e de iterações a serem executadas durante a otimização. Buscou-se somente a investigação da qualidade da predição computacional do dano a partir do modelo validado, verificando a variabilidade da posição e magnitude através de rodadas consecutivas do algoritmo. Conforme exposto no Item 4.4 o processo de otimização considerou a simetria da estrutura.

Portanto, a solução determinística obtida é avaliada de acordo com o grau de proximidade em relação aos dados experimentais comparando-se as previsões computacionais do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\eta}$ com os reais cenários de dano simulado, assim como as respectivas FRFs.

A métrica adotada para avaliar a variação entre as posição e magnitude das massas e as previsões computacionais é dada por $diff = \left(1 - \frac{v^{num}}{v^{exp}}\right) \times 100\%$, onde v representa a variável em análise.

De forma a não prolongar demasiadamente o presente Item, somente as funções de resposta em frequência para a posição AC1 dos acelerômetros são apresentadas. As demais FRFs, obtidas para as posições AC2 e AC3 dos acelerômetros, encontram-se no Apêndice A, organizadas da seguinte forma: cenário A1 no Item A.5; A2 no Item A.6; B1 no Item A.7; e o cenário B2 no Item A.8.

4.4.1 Ajuste do Votor $\boldsymbol{\eta}$

Considerando as propriedades estocásticas do algoritmo enxame de partículas, o processo de otimização foi realizado 10 vezes para cada cenário criado. Buscou-se assim obter informações preliminares a respeito da eficiência do algoritmo em cada caso, através da investigação das variações da posição e massa obtidas e avaliação da presença de falsas previsões computacionais. Em função de tratar-se de um problema simples, o tempo gasto computacionalmente é ínfimo e não foi considerado nesse estudo.

A Tabela 4.2 apresenta os resultados obtidos para o vetor $\boldsymbol{\eta}$ após o tratamento

estatístico. Verificam-se que as melhores aproximações ocorreram nos cenários de dano simulado onde a magnitude das massas era maior, A1 e B1. A diferença entre os dados experimentais e a médias dos resultados numéricos foi inferior à 3 %.

Tabela 4.2: Solução determinística do vetor η . Unidades: X [mm] e M [g].

Cenário	Dado	Posição		Magnitude	
		X	dif	M	dif
A1	exp	300		150	
	comp	302 ± 33	0,6 %	146 ± 10^{-2}	2,7 %
A2	exp	300		49,6	
	comp	199 ± 27	33,7 %	$44,1 \pm 10^{-2}$	11,1 %
B1	exp	859		94,5	
	comp	861 ± 29	0,2 %	$94,2 \pm 10^{-3}$	0,3 %
B2	exp	859		36,9	
	comp	907*	5,6 %	39,3*	7,3 %

* Valor obtido uma única vez em 10 tentativas

Observando a variação das previsões computacionais, nota-se que a posição tem desvio padrão de aproximadamente 30 mm, ao passo que para a magnitude a variação é desprezível. Isso pode ser explicado em função do processo de discretização em elementos finitos. De acordo com a ilustração contida na Figura 4.19, existe uma região próxima dos nós, correspondente à metade dos elementos de barra adjacentes, onde a posição sorteada no enxame de partículas é substituída pela posição do nó mais próximo. Ou seja, as incertezas na posição da massa dentro dessa região são completamente ignoradas no processo de otimização. Sabendo que os elementos finitos possuem um comprimento aproximadamente igual, essa variação é mantida constante ao longo do processo.

Por outro lado, uma vez que são realizadas 50 iterações por rodada do algoritmo, a magnitude da massa é progressivamente diminuída até atingir um valor onde não seja mais possível minimizar a função custo utilizada. Como não há nenhuma restrição para M , o enxame de partículas consegue obter reduções no erro a partir de pequenas variações na magnitude da massa.

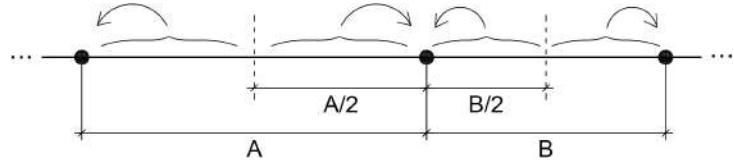


Figura 4.19: Ilustração da posição X em função da discretização pelo MEF.

É importante ressaltar que apesar de a Tabela 4.2 indicar uma predição computacional satisfatória para o cenário B2, inferior à 8 % de diferença com o dado experimental, esse valor foi obtido somente uma vez em 10 rodadas consecutivas do algoritmo. Para esse caso específico, onde a magnitude da massa é de aproximadamente 2 % da massa total da viga, o enxame de partículas forneceu uma falsa predição. Em 9 das 10 otimizações realizadas o resultado obtido foi de $X = 1361$ mm $M = 32,5$ g.

De forma a fazer uma investigação preliminar sobre outros possíveis falsos positivos, são apresentadas as curvas de nível do funcional em cada cenário de dano simulado. No presente item são apresentadas as curvas de nível para o cenário A1, Figura 4.20 e B2 4.21, por se tratarem dos cenários com a maior e menor magnitude de massa, respectivamente. As curvas para os casos A2 e B1 são semelhantes à obtida para B2 e não foram apresentadas.

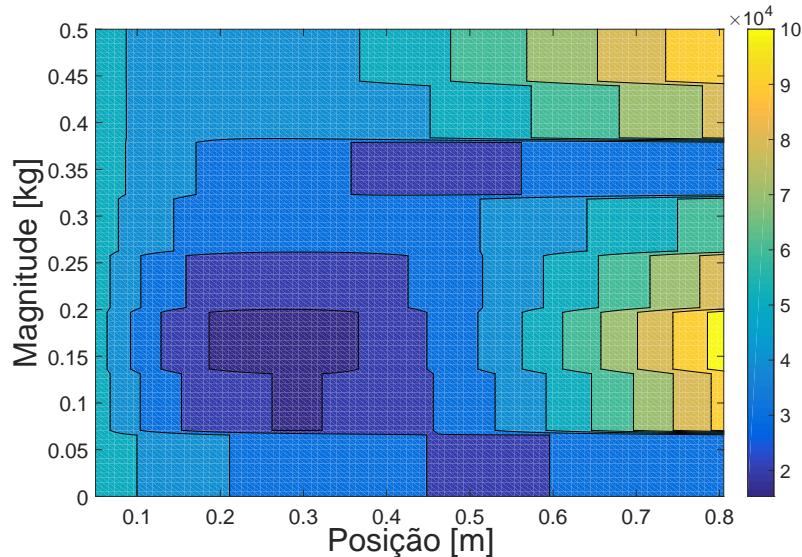


Figura 4.20: Curvas de nível do funcional $S(\eta)$ no cenário A1

Para o cenário A1, a Figura 4.20 ilustra uma curva de nível onde a região de mínimo é bem definida $\{0,2 \leq X \leq 0,4\}$ m e $\{0,1 \leq M \leq 0,2\}$ kg, o que está coerente com a resposta ótima fornecida pelo enxame de partículas, ver Tabela 4.2, e

com os dados experimentais. Esse comportamento bem definido, porém, não ocorre para as curvas de nível dos demais cenários.

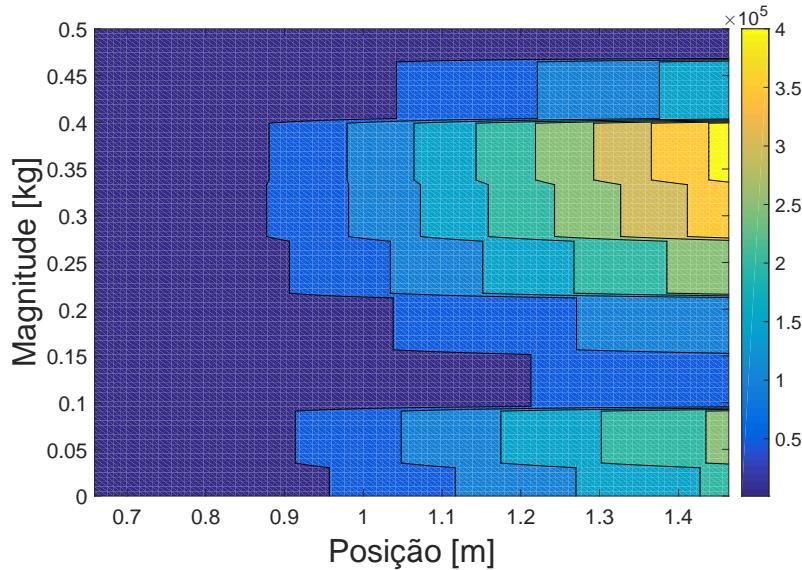


Figura 4.21: Curvas de nível do funcional $S(\eta)$ no cenário B2

Para os demais cenários, a variável posição permite inferir sobre uma provável região de mínimo, ou seja, entre $[0,1 - 0,3]$ m para A2 e entre $[0,7 - 1,0]$ m para os cenários B1 e B2. Porém, a variável magnitude da massa, eixo vertical, não é capaz de aumentar o nível de informação dessa região para seu espaço solução $[0 - 0,5]$ kg. Isso indica que, nessa região, a variação da magnitude da massa influencia muito pouco no processo de minimização da função custo para esses três cenários. A Figura 4.22 ilustra essa situação a partir da superfície 3D do funcional do cenário A2.

É válido ressaltar que o cálculo dessas curvas de nível possuem diversas incertezas do ponto de vista da posição de mínimos. Por exemplo, o falso positivo encontrado para o cenário B2, indicado na Tabela 4.2, $X = 1361$ mm $M = 32,5$ g não é acusado na Figura 4.21 nem como provável região de mínimo.

Os mínimos globais encontrados durante a otimização pelo enxame de partículas não foram retratados nas curvas calculadas para os cenários A2, B1 e B2 em função da inviabilidade computacional de aplicar pequenos incrementos de forma à obter uma curva mais acurada.

Portanto, é possível afirmar que para o presente trabalho, a avaliação da eficácia da identificação do dano através do estudo do funcional, seja por curvas de nível ou pelo gráfico 3D, não se mostrou eficiente. O algoritmo forneceu respostas numéricas muito próximas aos cenários de dano simulados que não foram evidenciadas no estudo da função custo.

É importante ressaltar que do ponto de vista da engenharia de projeto, a presença de danos de pequena ordem são praticamente de impossível identificação, haja vista a presença de uma série de incertezas que estão associadas ao processo de otimização, Capítulo 1.

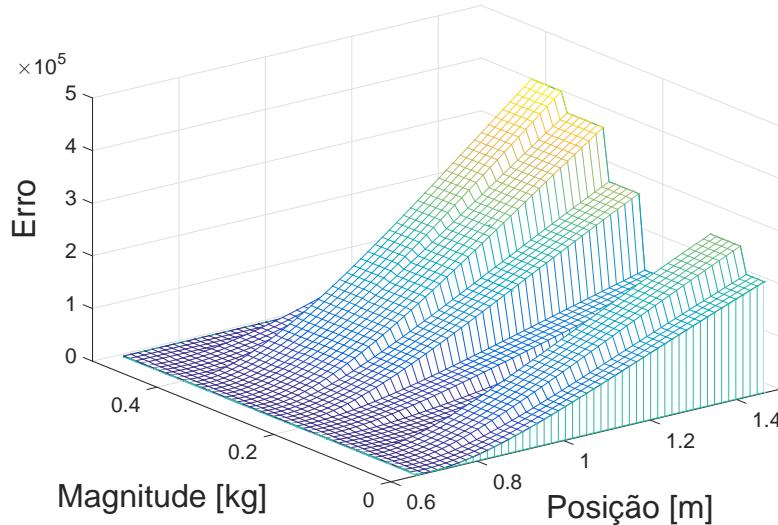


Figura 4.22: Superfície 3D do funcional no cenário B2.

4.4.2 Avaliação das Predições Computacionais

As funções de resposta em frequência do modelo computacional foram comparadas com as obtidas experimentalmente de forma a validar a modelagem numérica para o problema de identificação dos danos simulados. As FRFs estimadas para a posição AC1 dos acelerômetros são apresentadas como se segue: Figura 4.23 para o cenário A1, 4.24 para A2, 4.25 para o B1 e por fim, 4.26 para o cenário B2.

Conforme procedimento adotado anteriormente, as demais FRFs das posições AC2 e AC3 dos acelerômetros encontram-se no Apêndice A, mais precisamente do Item A.5 para o cenário A1 até o Item A.8 para o B2, seguindo a mesma sequência informada acima.

De forma geral, todas as predições computacionais da FRF produziram boas aproximações para a frequência natural dos modos de vibração. Pequenas variações foram verificadas para o 3º, 4º e 5º modo no cenário A1 e para o 6º modo no cenário B2. Por outro lado, as taxas de amortecimento estimadas pelo modelo computacional não apresentaram a mesma acurácia da frequência, levando à amplitudes bem diferentes às verificadas experimentalmente.

Observa-se que, salvo algumas exceções, as amplitudes das curvas numéricas (linha contínua preta) são maiores que as obtidas na solução ótima (linha vermelha

pontilhada), o que indica uma predição computacional inferior para as taxas de amortecimento quando comparadas com às experimentais.

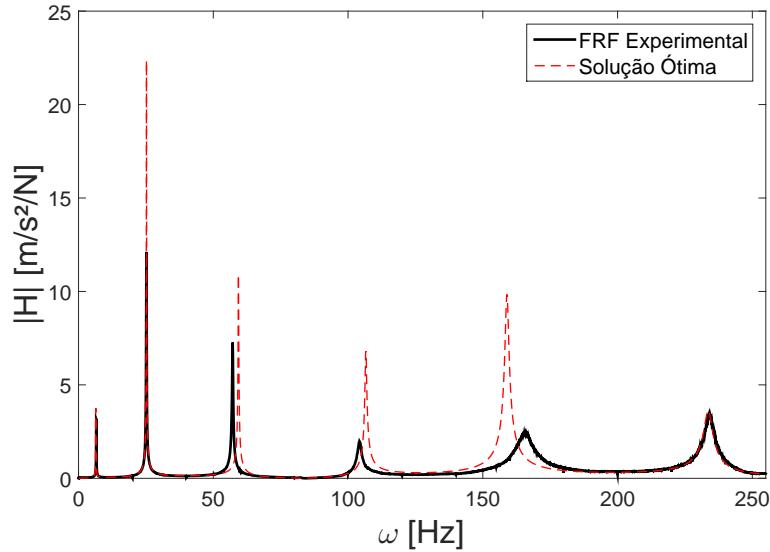


Figura 4.23: FRF no acelerômetro AC1 no cenário A1 de dano.

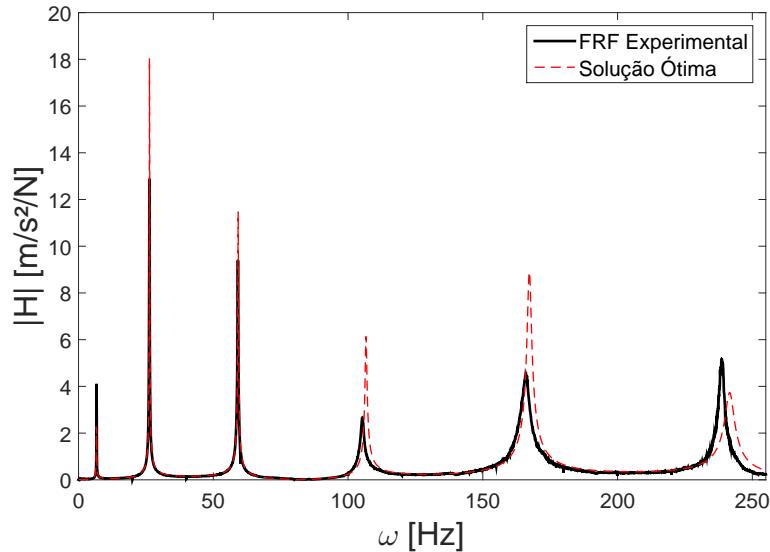


Figura 4.24: FRF no acelerômetro AC1 no cenário A2 de dano.

Esse comportamento não satisfatório para as estimativas das taxas de amortecimento já era esperado, uma vez que a premissa de amortecimento proporcional foi adotada para todas as análises do presente trabalho, inclusive na etapa de identificação dos danos simulados.

É intuitivo notar que um pequeno ajuste do modelo de amortecimento, como por exemplo a substituição da hipótese de amortecimento proporcional para uma

premissa geral não proporcional, por exemplo, possa fornecer previsões numéricas mais acuradas para a FRF.

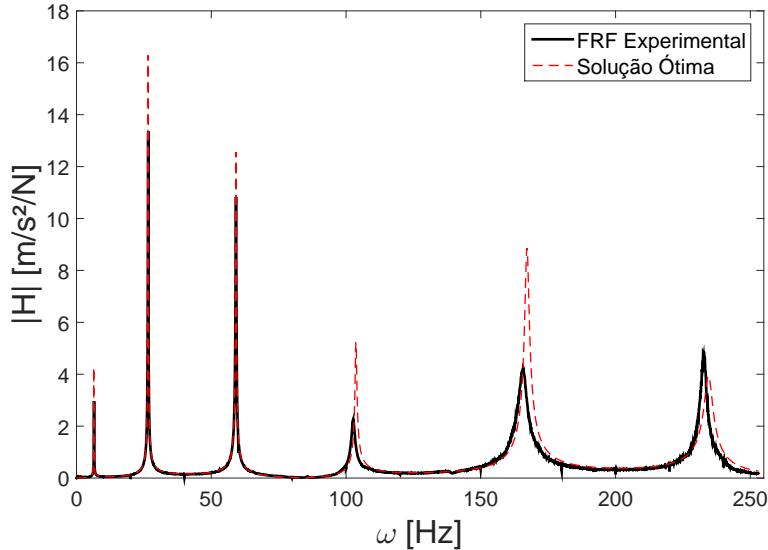


Figura 4.25: FRF no acelerômetro AC1 no cenário B1 de dano.

Conforme exposto na Tabela 4.2, o processo de otimização no cenário B2 resultou em duas possíveis soluções, a solução acurada, i.e. solução que é compatível com o cenário de dano simulado real e um falso positivo. Nota-se que as FRFs obtidas nessa identificação são bem semelhantes, Figura 4.26.

Aplicou-se então a métrica APCC, ver detalhes no Item 4.4, para avaliar o grau de correlação entre as FRF estimadas para solução acurada e a falsa predição. A Figura 4.27 apresenta os resultados para a posição AC1 dos acelerômetros. Os cálculos para as posições AC2 e AC3 estão disponíveis no Item 4.4.

O APCC evidencia variações entre as FRFs numéricas nos picos de ressonância de todos os modos de vibração avaliados. Diferenças entre as amplitudes das funções estimadas e pequenas defasagens na frequência natural são alguns dos motivos que produzem tais variações. As baixas correlações obtidas fora das regiões de ressonância modal foram desprezadas na presente análise.

A partir dos resultados fornecidos pelo APCC é possível sugerir que outra formulação da função custo talvez seja capaz de evitar a falsa predição. Por exemplo, a minimização da FRF, ou da forma modal, provavelmente resultaria em uma única solução para essa otimização. Porém, somente com estudos mais profundos seria possível afirmar qual das duas soluções seria obtida.

Portanto, fica claro a necessidade de melhorar a metodologia da otimização determinística no processo de identificação de danos. Análises de sensibilidade, outras formulações para a função custo, algoritmos mais robustos ou até mesmo a in-

trodução da Teoria da Probabilidade são ferramentas utilizadas para melhorar as previsões computacionais e assim tornar os modelos numéricos mais confiáveis.

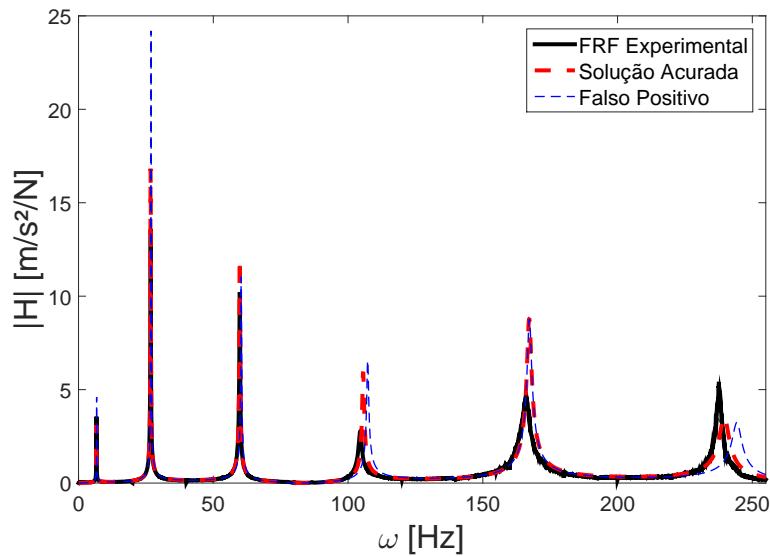


Figura 4.26: FRF no acelerômetro AC1 no cenário B2 de dano.

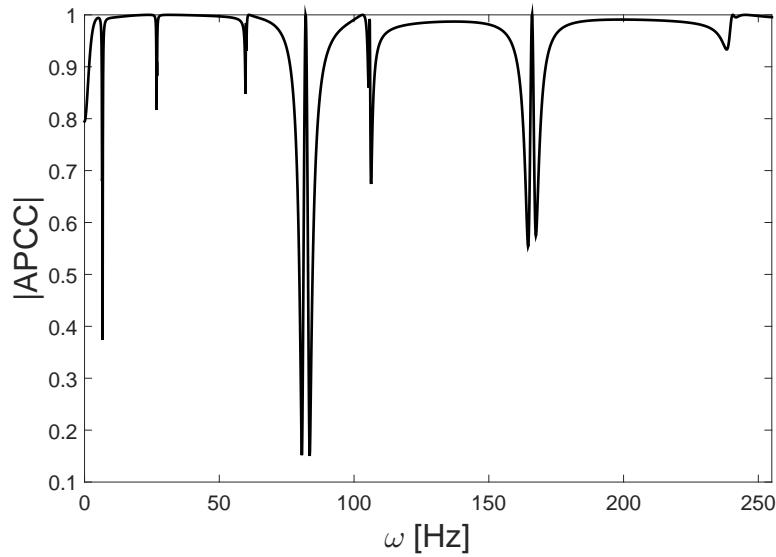


Figura 4.27: APCC entre as FRFs computacionais no acelerômetro AC1 no cenário B2 de dano.

Capítulo 5

Conclusão e Considerações Finais

No presente trabalho objetivou-se aplicar uma estratégia simples de estimação de parâmetros e propagação de incertezas para avaliar a acurácia do modelo computacional criado para simular o comportamento dinâmico de uma viga bi-apoiada. A partir de uma grande quantidade de dados experimentais obtidos nos ensaios realizados, ver detalhes no Capítulo 3, foram estudadas diferentes hipóteses para o cálculo da matriz de covariância e seus impactos no modelo computacional. Ou seja, uma breve avaliação da função de verosimilhança e sua influência nas previsões numéricas. Por fim, o modelo calibrado foi utilizado para a identificação de danos, que foram simulados a partir da aplicação de massas pontuais ao longo da estrutura.

A partir dos resultados obtidos na calibração, Item 4.2 e validação, Item 4.3, do modelo computacional é possível concluir que:

- (i) Foi possível inferir sobre a incerteza associada ao vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$, mesmo em um processo de otimização determinística, a partir da estimativa da sua matriz de covariância.
- (ii) Todos os sete ensaios experimentais realizados na viga bi-apoiada foram contemplados na região de 98 % de confiança para as curvas de amortecimento e para as FRFs em todas as posições de acelerômetros utilizados. Portanto, o modelo computacional foi capaz de simular satisfatoriamente o comportamento dinâmico da estrutura.
- (iii) As previsões computacionais obtidas a partir da premissa de covariância diagonal, hipótese 1, são aproximadamente idênticas às obtidas para a matriz de covariância calculada através de um grande número de realizações experimentais, hipótese 2. Essa conclusão fundamenta a viabilidade da utilização dessa hipótese simplificadora, i.e. matriz de covariâncias diagonal.
- (iv) A hipótese de matriz de covariância calculada na posição de ótimo do vetor de parâmetros, hipótese 3, não se mostrou acurada para aplicações de engenharia,

haja vista a grande dispersão dos resultados produzidos e a elevada incerteza obtida para o vetor de parâmetros.

Para o processo de identificação dos danos simulados, Item 4.4.2 é possível concluir que:

- (v) A utilização do enxame de partículas se mostrou mais eficiente que a função *lsqnonlin* do Matlab, haja vista sua estratégia estocástica de otimização, especialmente para identificação da posição do dano simulado.
- (vi) Apesar de os cenários criados resultarem em pequena influência no comportamento dinâmico da viga, foi possível identificar a posição e magnitude das massas pontuais utilizadas para simular os danos para os cenários A1, A2 e B1, onde as massas representam, respectivamente, 9 %, 3 % e 5 % da massa total da viga.
- (vii) O modelo computacional produziu duas respostas possíveis para o cenário mais crítico B2, com massa de $\sim 2\%$ da massa total da viga, onde uma representa a solução acurada e a outra um falso positivo. Em 10 rodadas do algoritmo a solução acurada foi obtida somente 1 vez. Isso indica uma maior probabilidade de obter a falsa predição, uma vez que o erro associado à essa resposta é ligeiramente menor do que para a solução acurada.
- (viii) A análise das previsões da FRF para os cenários de dano simulado mostraram boa aproximação nas frequências naturais dos modos de vibração, o que não foi verificado com o mesmo grau de acurácia para as taxas de amortecimento.
- (ix) Ficou evidente que a investigação das FRFs computacionais em situação de dano é capaz de aumentar o nível de informação para discernir múltiplos resultados possíveis no processo de identificação dos danos simulados.

De forma a aprofundar a análise do presente trabalho, ainda do ponto de vista da otimização determinística, sugere-se:

- uma nova formulação para função custo, por exemplo através da minimização da FRF ou minimização da forma modal, tanto para o processo de validação do modelo computacional, quanto para a etapa de identificação dos danos simulados.
- aplicação de outros modelos de amortecimento proporcional, assim como o modelo não proporcional, para simulação do comportamento dinâmico da estrutura.
- inferência sobre as incertezas relativas à posição e magnitude das massas obtidas como solução pelo algoritmo enxame de partículas.

Referências Bibliográficas

- [1] SIMOEN, E., ROECK, G. D., LOMBAERT, G. “Dealing with uncertainty in model updating for damage assessment: A review”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 56, pp. 123–149, nov. 2015.
- [2] PAPOULIS, A. *Probability & Statistics*. 1 ed. , Prentice-Hall International, Inc, 1990.
- [3] R.FARRAR, WORDEN, K. “An Introduction to Structural Health Monitoring”, *Philosophical Transactions of The Royal Society A*, v. 42, pp. 303–315, dez. 2006.
- [4] MOTTERSHEAD, J. E., FRISWELL, M. I. “Model Updating In Structural Dynamics: A Survey”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 167, pp. 347–375, maio 1993.
- [5] ASTROM, K. J., EYKHOFF, P. “System Identification: A Survey”, *Automatica*, v. 7, pp. 123–162, 1971.
- [6] STREJC, V. “Least Squares Parameter Estimation”, *Automatica*, v. 16, pp. 535–550, mar. 1980.
- [7] ASTROM, K. J. “Maximum Likelihood and Prediction Error Methods”, *Automatica*, v. 16, pp. 551–574, mar 1980.
- [8] BEHMANESH, I., MOAVENI, B. “Accounting for Environmental Variability, Modeling Errors, and Parameter Estimation Uncertainties in Structural Identification”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 374, pp. 92–110, abr. 2016.
- [9] MATLAB. “The MathWorks Inc.” Disponível em: <\https://www.mathworks.com>.
- [10] CALFEM. “CALFEM, A Finite Element Toolbox v 3.4”. Disponível em: <\https://sourceforge.net/projects/calfem>.

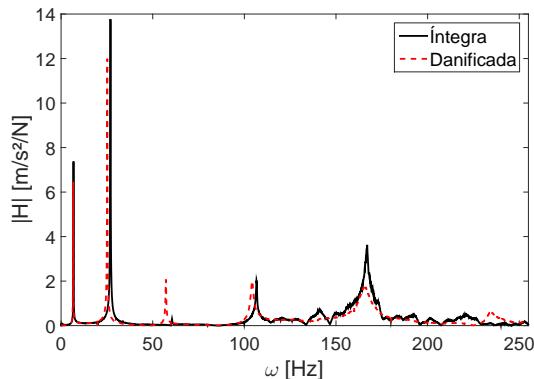
- [11] DE ANDRADE, R. F. M. *Desenvolvimento de um Sistema para Determinação Experimental de Funções de Resposta em Frequência para Excitações Simples e Múltiplas*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1997.
- [12] BUCHER, H. F. *Metodologias para a Aplicação de Técnicas Tempo-Frequência em Dinâmica Estrutural e ao Método dos Elementos de Contorno*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2001.
- [13] LSQNONLIN. “Lsqnonlin MathWorks”. Disponível em: <\https://www.mathworks.com/help/optim/ug/lsqnonlin.html>.
- [14] KIRANYAZ, S., INCE, T., GABBOUJ, M. *Multidimensional particle swarm optimization for machine learning and pattern recognition*. 4a ed. Berlim, Heidelberg, Springer, 2014.
- [15] CLERC, M., KENNEDY, J. “The particle swarm - explosion, stability and convergence in a multidimensional complex space”, *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, v. 6, pp. 58, dez. 2002.
- [16] CLOUGH, R. W., PENZIEN, J. *Dynamics of Structures*. 3 ed. , Computers & Structures, Inc., 1995.
- [17] GÉRADIN, M., RIXEN, D. J. *Mechanical Vibrations, Theory and Application to Structural Dynamics*. 3 ed. Chichester, UK, John Wiley & Sons Ltd, 2015.
- [18] ASTER, R., BORCHERS, B., THURBER, C. *Parameter Estimation and Inverse Problems*. 1 ed. , Academic Press, 2004.
- [19] BECK, J. V., ARNOLD, K. J. *Parameter Estimation in Engineering and Science*. John Wiley & Sons, 1976.
- [20] JOHNSON, R. A., WICHERN, D. W. *Applied Multivariate Statistical Analysis*. 6a ed. , Pearson, Prentice Hall, 2007.
- [21] GRINSTEAD, C. M., SNELL, J. L. *Introduction to Probability*. 2 ed. , American Mathematical Society, 2003.
- [22] RMVNRND. “Truncated Multivariate Normal Distribution MathWorks”. Disponível em: <\http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/34402-truncated-multivariate-normal>.
- [23] PLOTMATRIX. “Plotmatrix MathWorks”. Disponível em: <\https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/plotmatrix.html>.

- [24] PRCTILE. “Prctile MathWorks”. Disponível em: <\https://www.mathworks.com/help/stats/prctile.html>.
- [25] RAND. “Uniformly Distributed Random Numbers MathWorks”. Disponível em: <\https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/rand.html>.
- [26] CASTELLO, D. A., MATT, C. F. T. “A Validation Metrics Based Model Calibration Applied on Stranded Cables”, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Science & Engineering*, v. XXXIII, n. 4, pp. 417–427, oct 2011.
- [27] BENDAT, J. S., PIERSOL, A. G. *Random Data, Analysis and Measurement Procedures*. 2a ed. New York, Wiley, 1986.

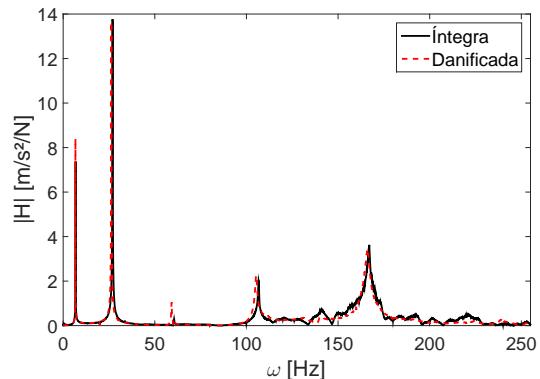
Apêndice A

Funções de Resposta em Frequência

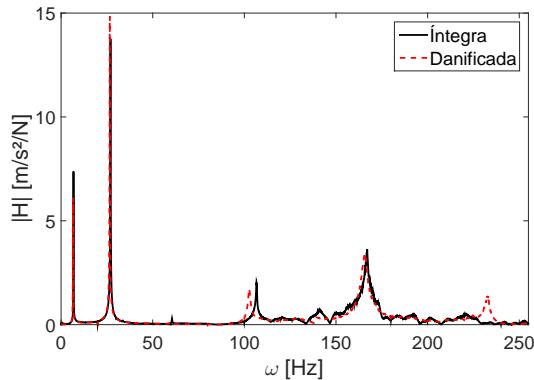
A.1 FRFs Experimentais Íntegra X Danificada



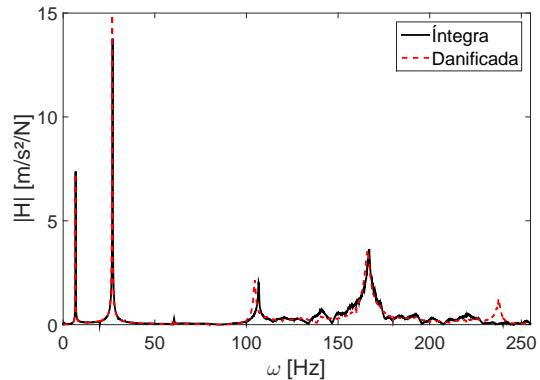
(a) FRFs experimentais para o cenário A1



(b) FRFs experimentais para o cenário A2



(c) FRFs experimentais para o cenário B1



(d) FRFs experimentais para o cenário B2

Figura A.1: Comparação entre FRFs íntegra e danificada para a posição AC2 dos acelerômetros

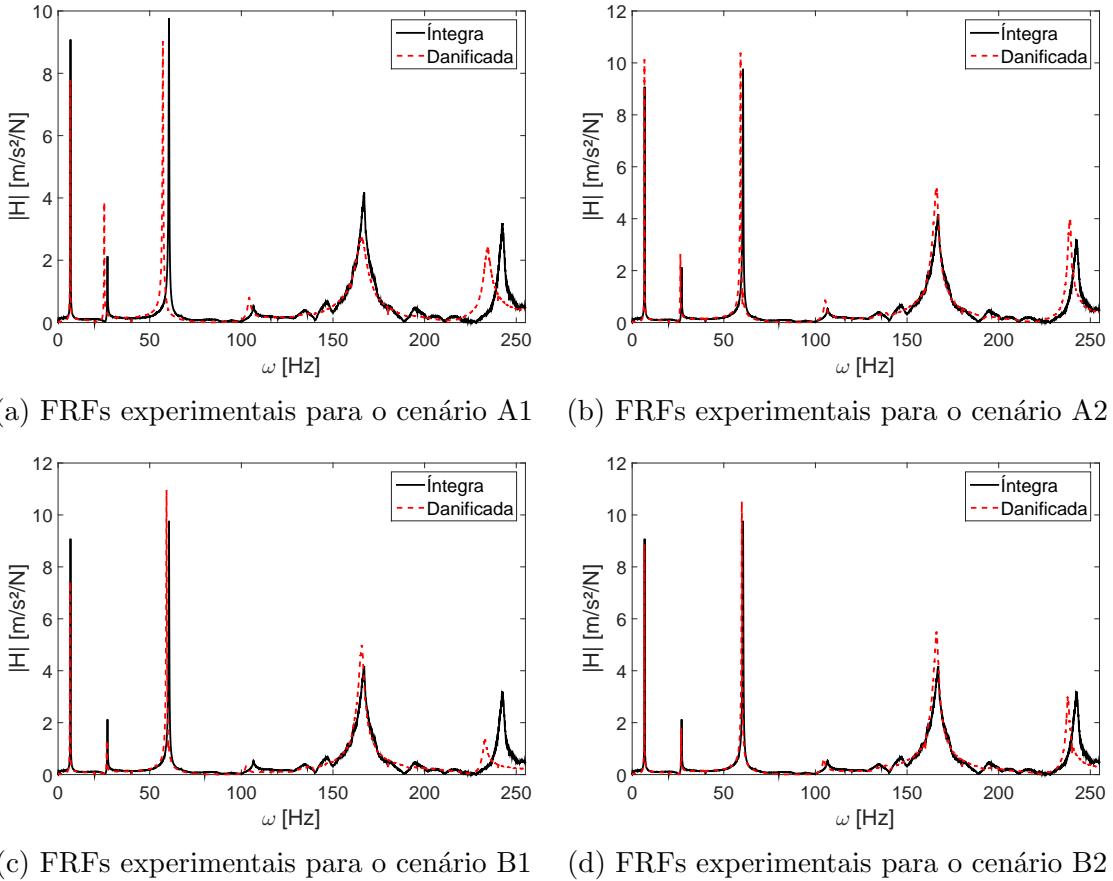


Figura A.2: Comparação entre FRFs íntegra e danificada para a posição AC3 dos acelerômetros

A.2 FRFs na Hipótese 1 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$

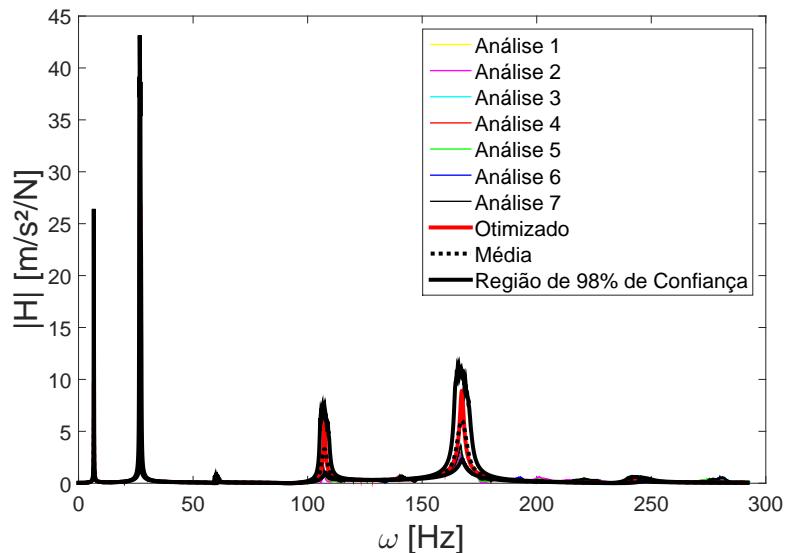


Figura A.3: FRF no acelerômetro AC2 na hipótese 1 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$.

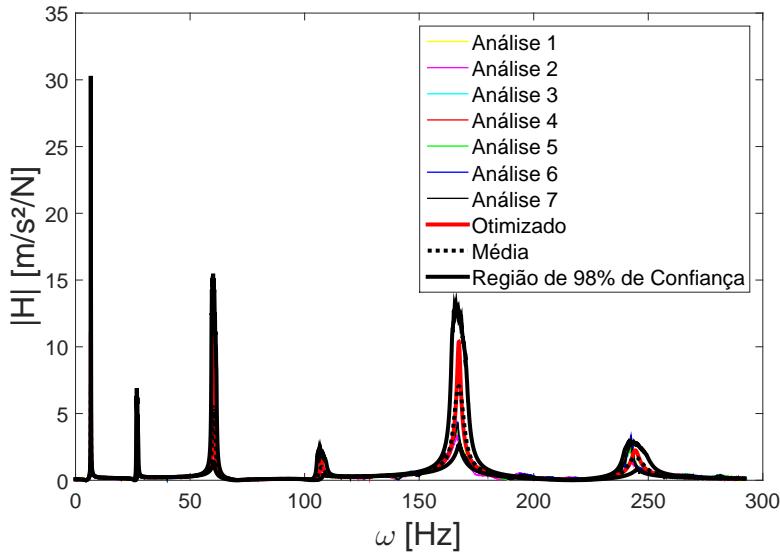


Figura A.4: FRF no acelerômetro AC3 na hipótese 1 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$.

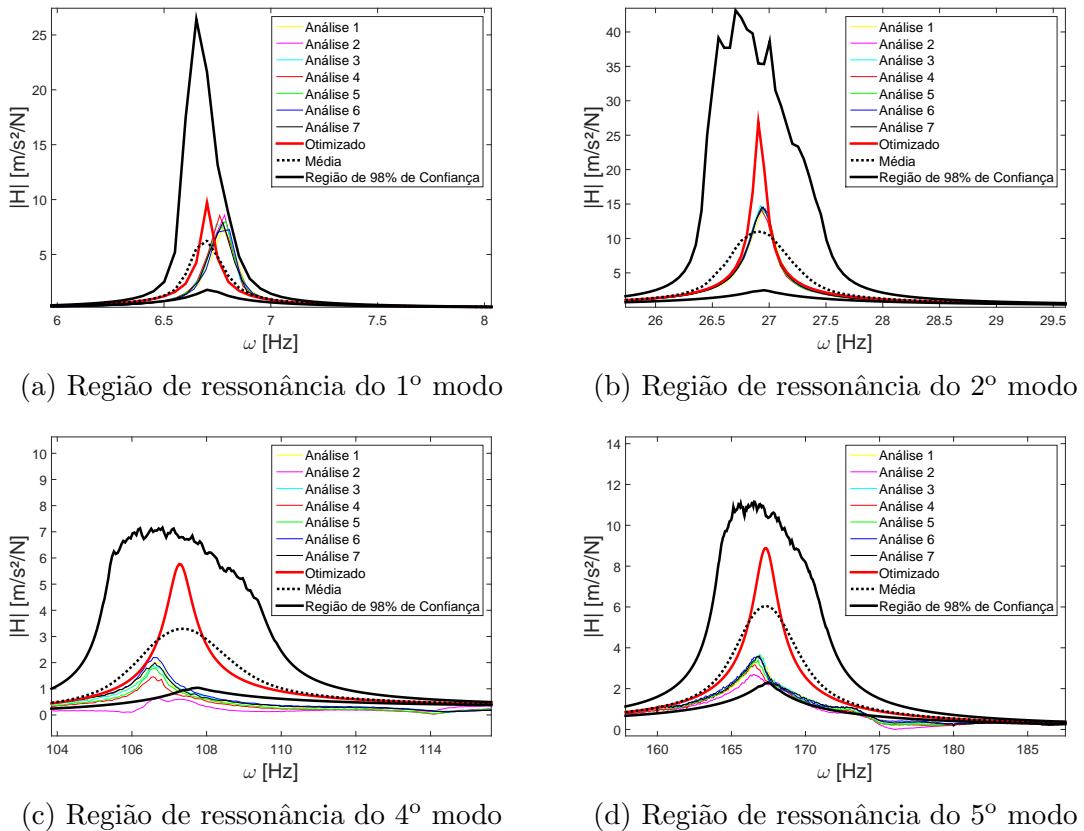
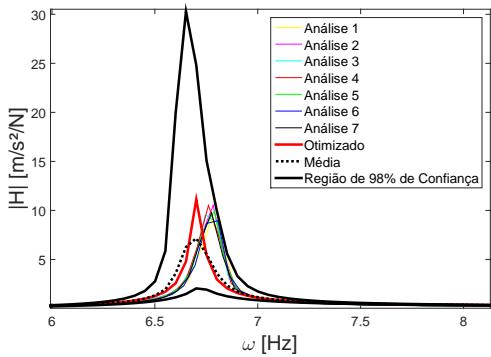
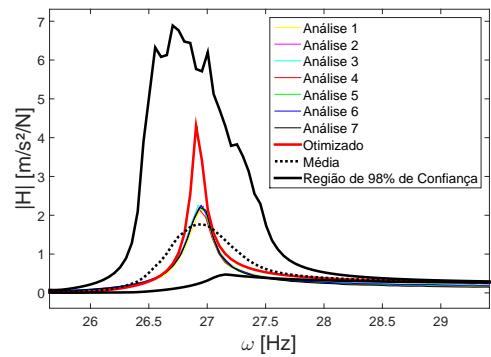


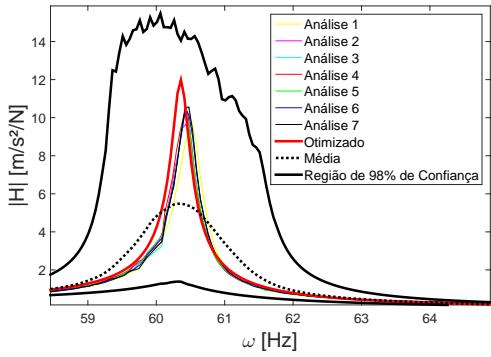
Figura A.5: Regiões de ressonância da FRF no acelerômetro AC2 na hipótese 1 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$.



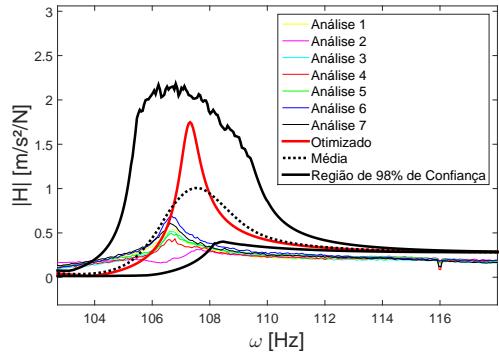
(a) Região de ressonância do 1º modo



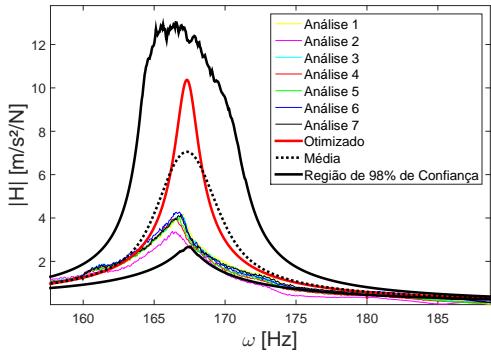
(b) Região de ressonância do 2º modo



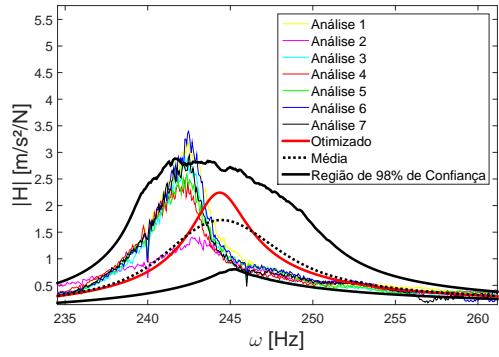
(c) Região de ressonância do 3º modo



(d) Região de ressonância do 4º modo



(e) Região de ressonância do 5º modo



(f) Região de ressonância do 6º modo

Figura A.6: Regiões de ressonância da FRF no acelerômetro AC3 na hipótese 1 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$.

A.3 FRFs na Hipótese 2 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$

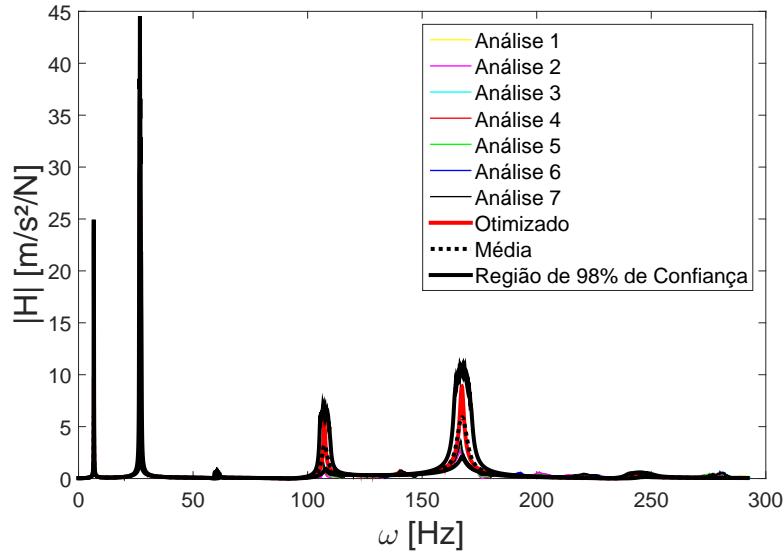


Figura A.7: FRF no acelerômetro AC2 na hipótese 2 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$.

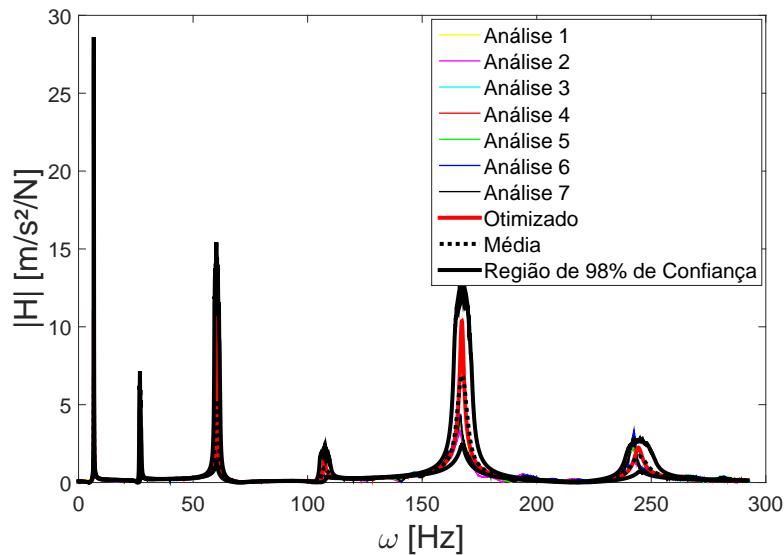
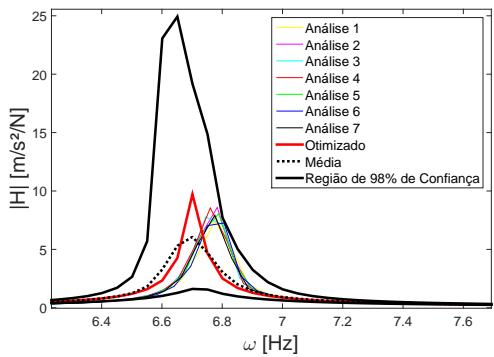
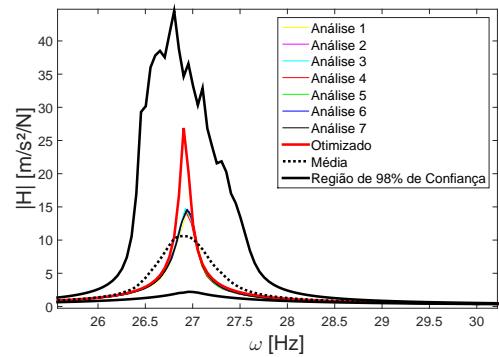


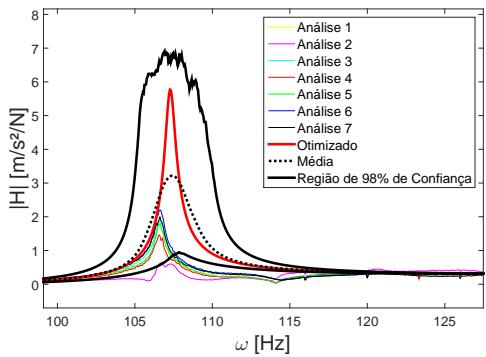
Figura A.8: FRF no acelerômetro AC3 na hipótese 2 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$.



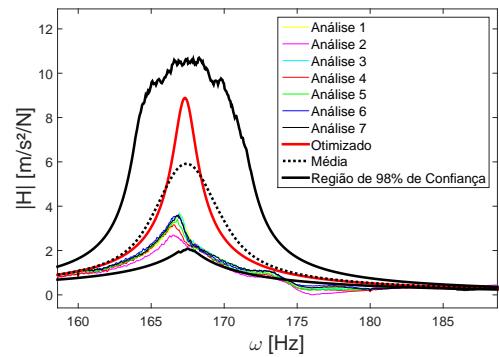
(a) Região de ressonância do 1º modo



(b) Região de ressonância do 2º modo

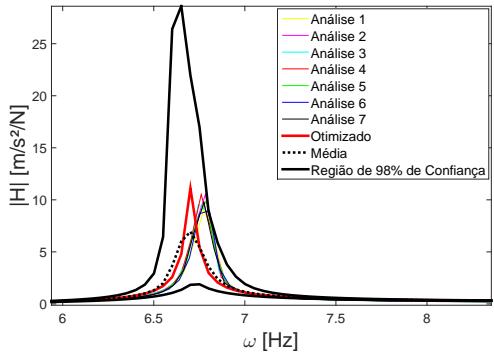


(c) Região de ressonância do 4º modo

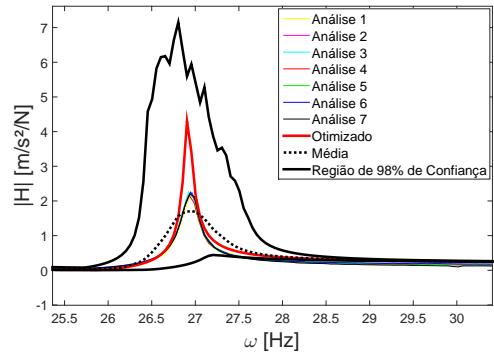


(d) Região de ressonância do 5º modo

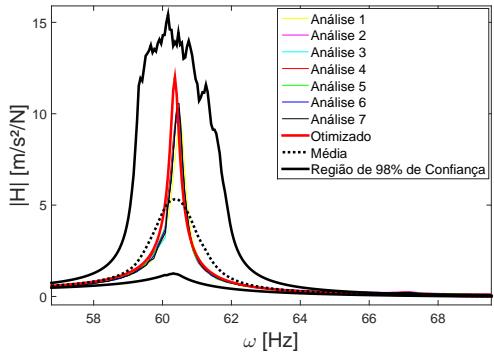
Figura A.9: Regiões de ressonância da FRF no acelerômetro AC2 na hipótese 2 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$.



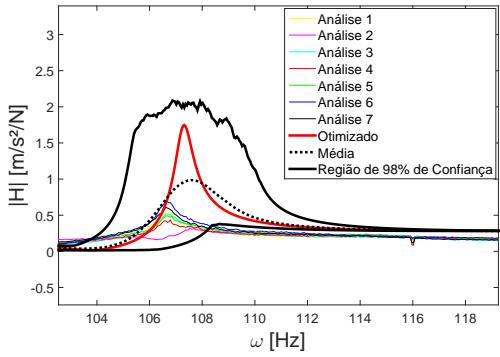
(a) Região de ressonância do 1º modo



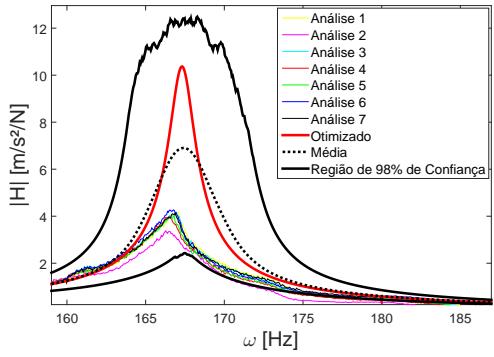
(b) Região de ressonância do 2º modo



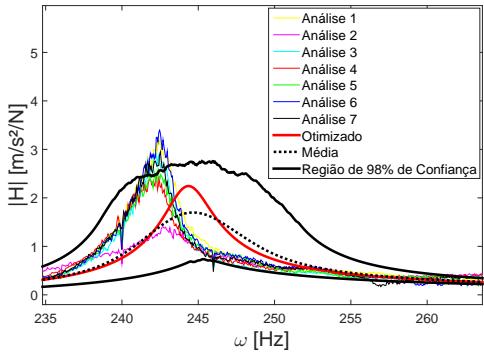
(c) Região de ressonância do 3º modo



(d) Região de ressonância do 4º modo



(e) Região de ressonância do 5º modo



(f) Região de ressonância do 6º modo

Figura A.10: Regiões de ressonância da FRF no acelerômetro AC3 na hipótese 2 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$.

A.4 FRFs na Hipótese 3 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$

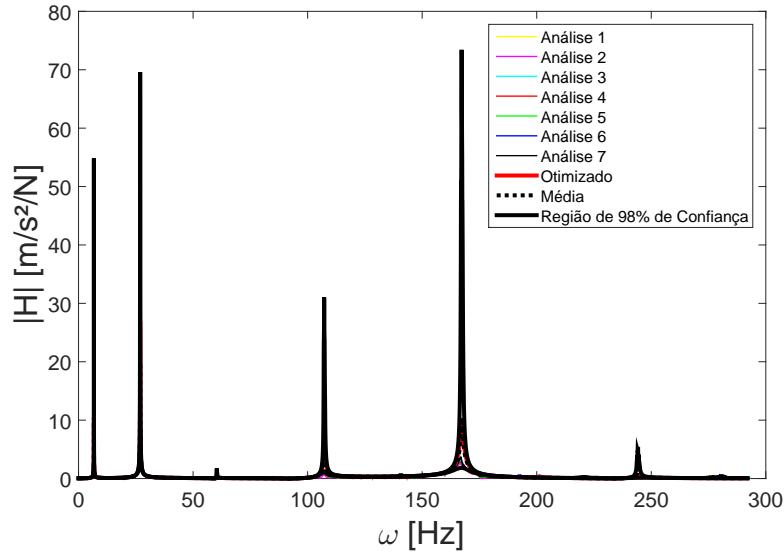


Figura A.11: FRF no acelerômetro AC2 na hipótese 3 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$.

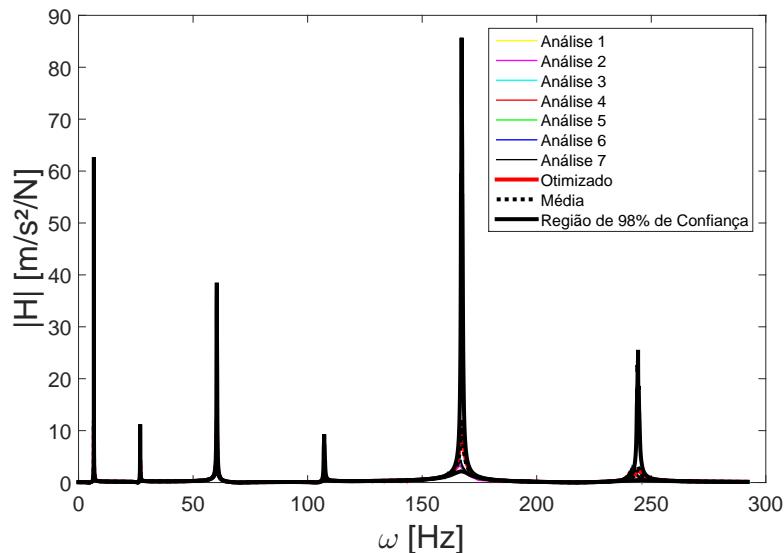
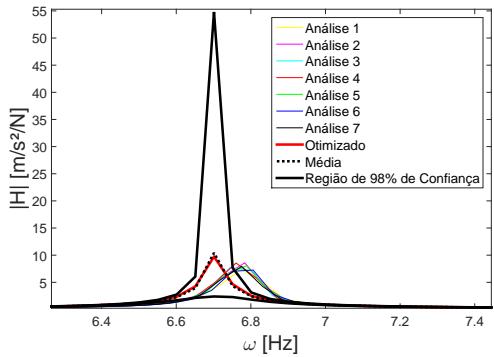
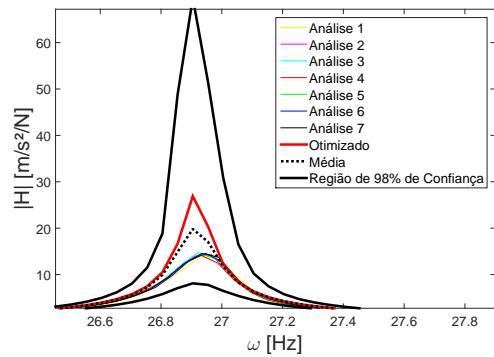


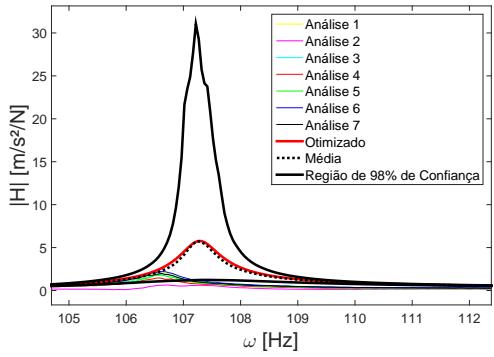
Figura A.12: FRF no acelerômetro AC3 na hipótese 3 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$.



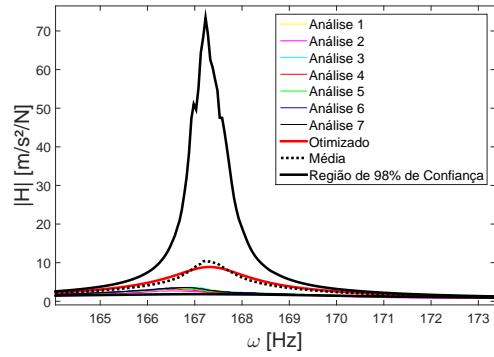
(a) Região de ressonância do 1º modo



(b) Região de ressonância do 2º modo

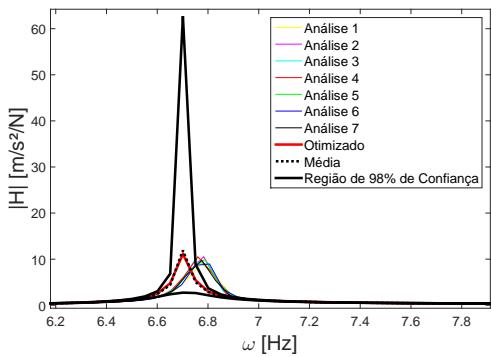


(c) Região de ressonância do 4º modo

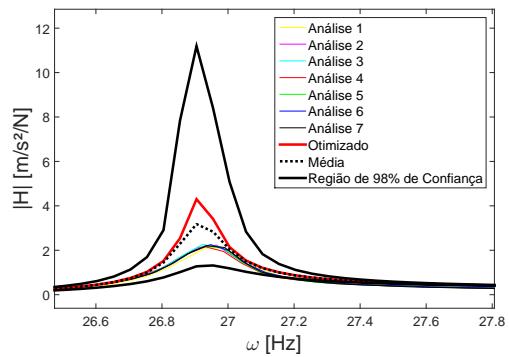


(d) Região de ressonância do 5º modo

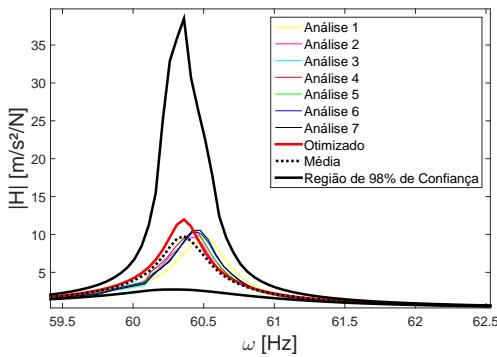
Figura A.13: Regiões de ressonância da FRF no acelerômetro AC2 na hipótese 3 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$.



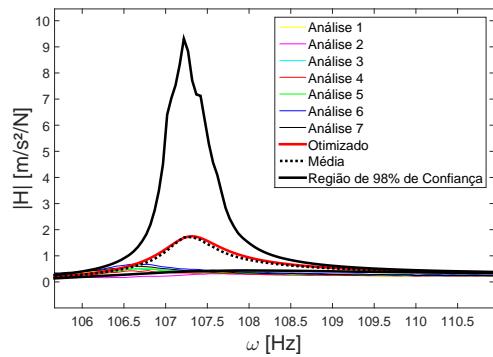
(a) Região de ressonância do 1º modo



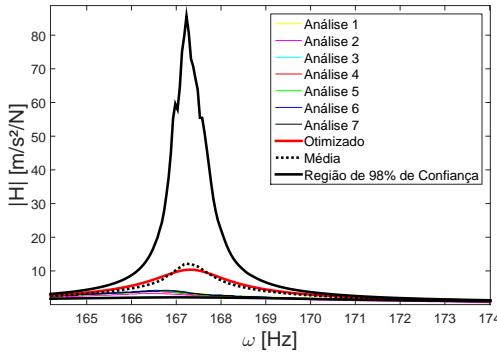
(b) Região de ressonância do 2º modo



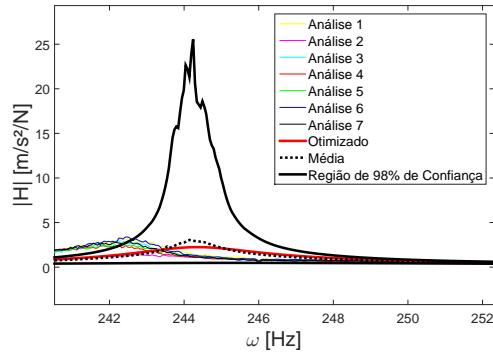
(c) Região de ressonância do 3º modo



(d) Região de ressonância do 4º modo



(e) Região de ressonância do 5º modo



(f) Região de ressonância do 6º modo

Figura A.14: Regiões de ressonância da FRF no acelerômetro AC3 na hipótese 3 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$.

A.5 FRFs no Cenário A1 de Dano

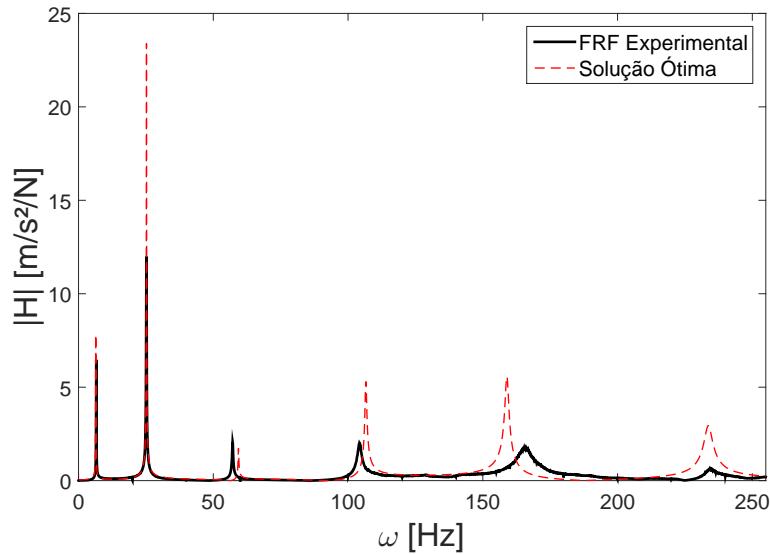


Figura A.15: FRF no acelerômetro AC2 no cenário A1 de dano.

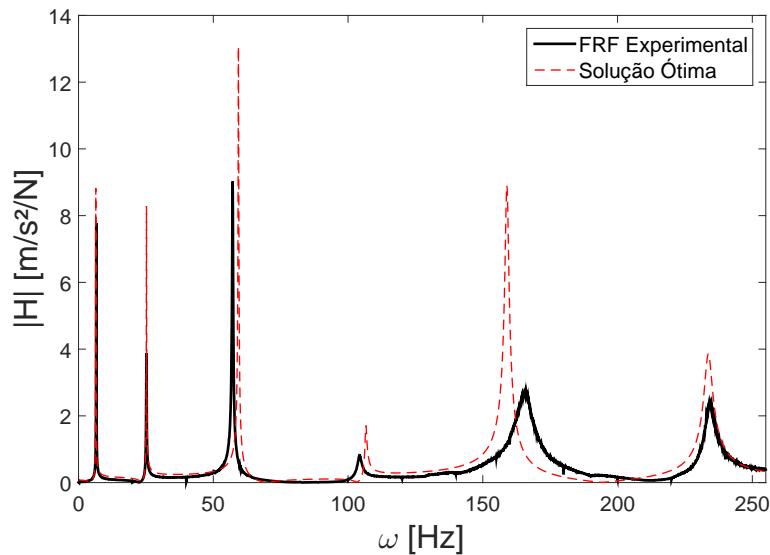


Figura A.16: FRF no acelerômetro AC3 no cenário A1 de dano.

A.6 FRFs no Cenário A2 de Dano

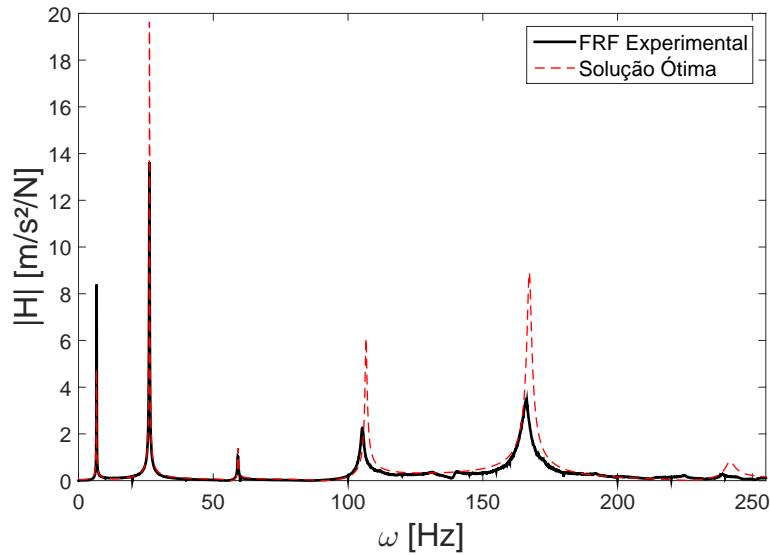


Figura A.17: FRF no acelerômetro AC2 no cenário A2 de dano.

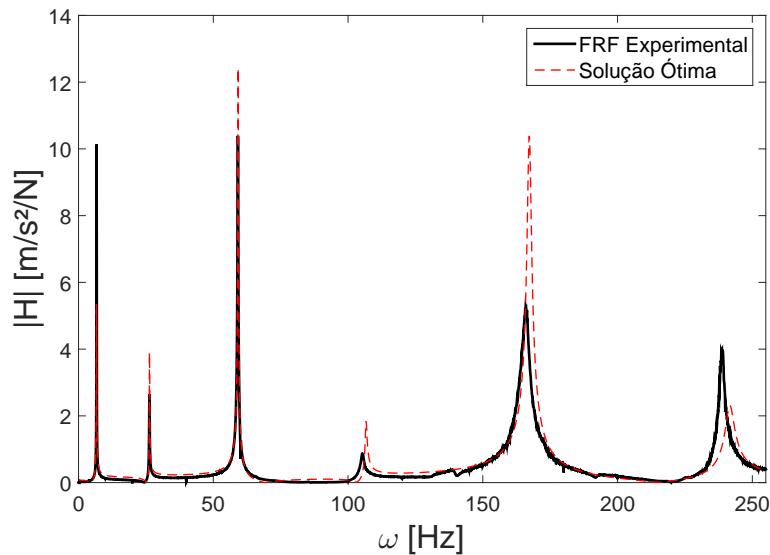


Figura A.18: FRF no acelerômetro AC3 no cenário A2 de dano.

A.7 FRFs no Cenário B1 de Dano

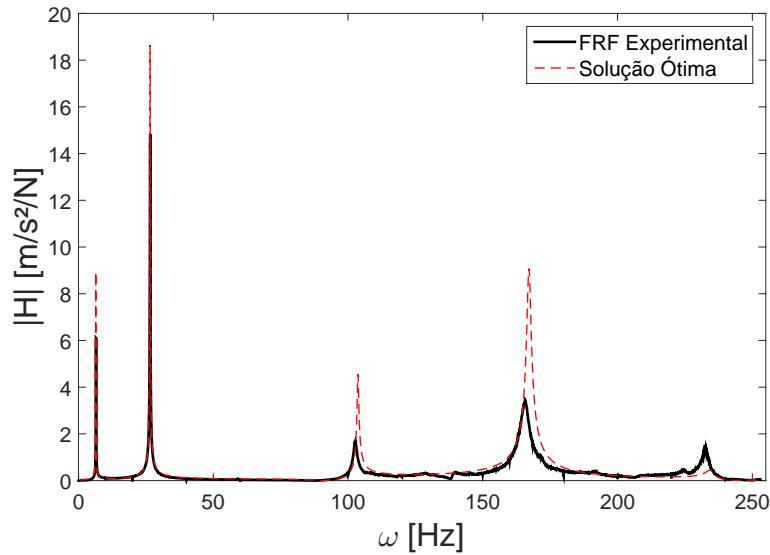


Figura A.19: FRF no acelerômetro AC2 no cenário B1 de dano.

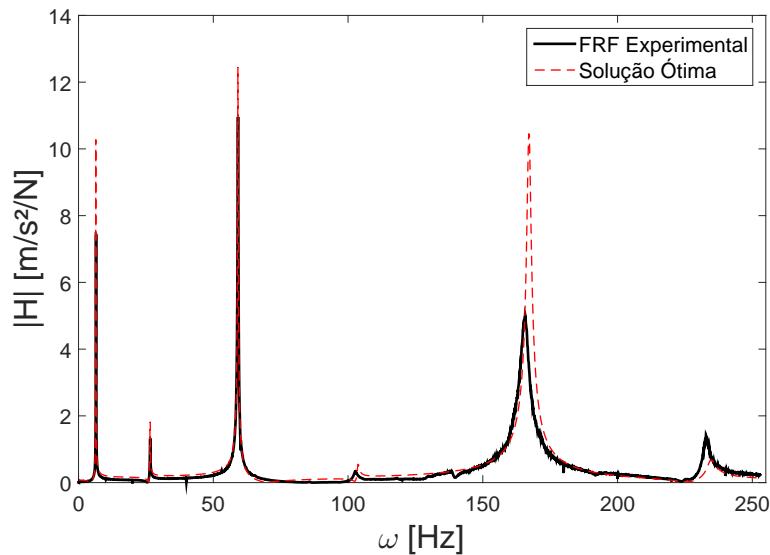


Figura A.20: FRF no acelerômetro AC3 no cenário B1 de dano.

A.8 FRFs no Cenário B2 de Dano

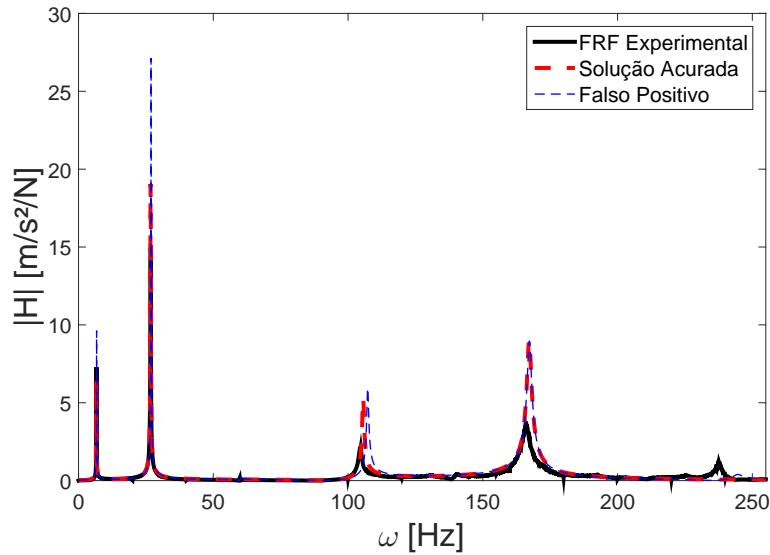


Figura A.21: FRF no acelerômetro AC2 no cenário B2 de dano.

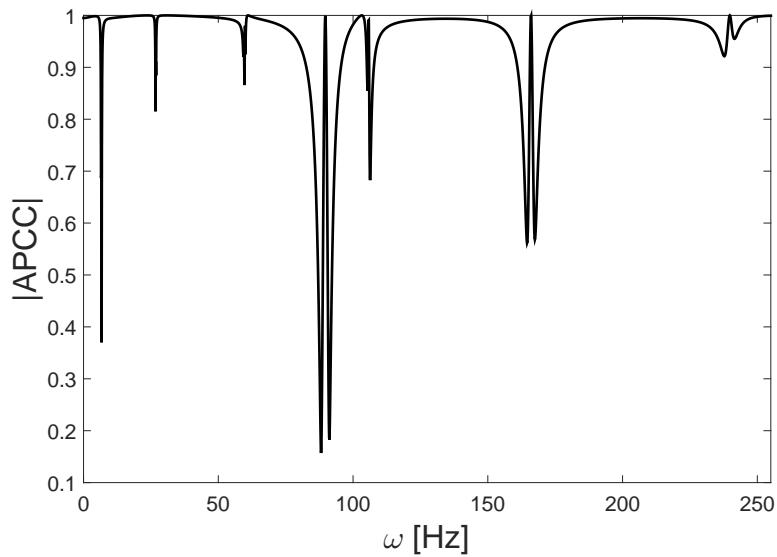


Figura A.22: APCC entre as FRFs computacionais no acelerômetro AC2 no cenário B2 de dano.

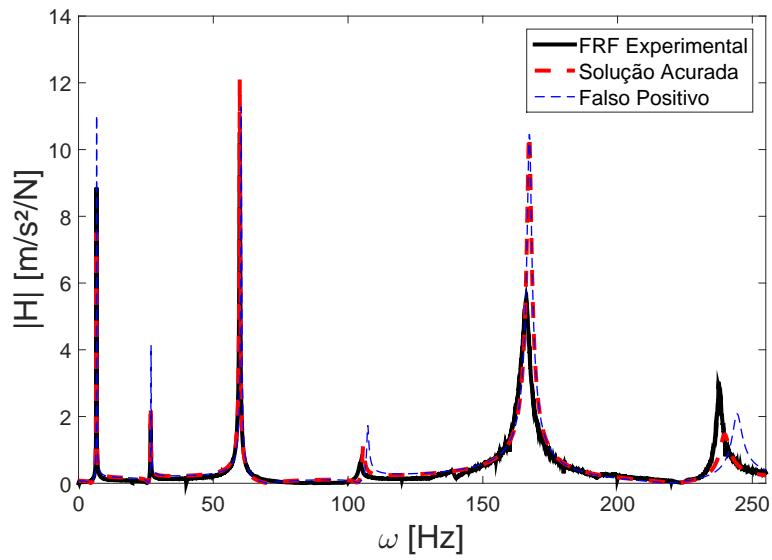


Figura A.23: FRF no acelerômetro AC3 no cenário B2 de dano.

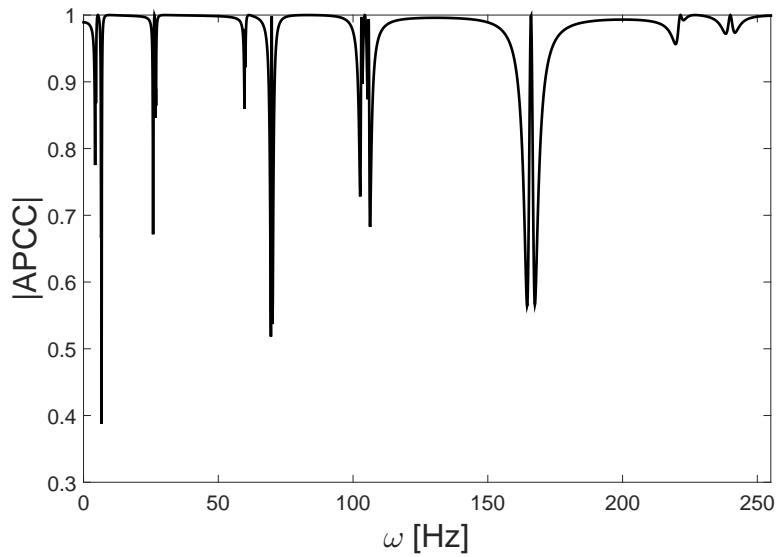


Figura A.24: APCC entre as FRFs computacionais no acelerômetro AC3 no cenário B2 de dano.