



Universidade Federal  
do Rio de Janeiro  

---

Escola Politécnica

LAJE PROTENDIDA  
MODELAGEM E VERIFICAÇÕES

Julio Fernando Pacher Majul

Projeto de Graduação apresentado ao curso de Engenharia Civil da Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Engenheiro.

Orientador (es): Benjamin Ernani Diaz  
Cláudia Ribeiro Eboli

Rio de Janeiro

Junho de 2011

LAJE PROTENDIDA  
MODELAGEM E VERIFICAÇÕES

Julio Fernando Pacher Majul

PROJETO DE GRADUAÇÃO SUBMETIDO AO CORPO DE DOCENTE DO CURSO DE ENGENHARIA CIVIL DA ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE ENGENHEIRO CIVIL.

Examinada por

---

Dr. Benjamin Ernani Diaz  
Prof. Emérito, Dr. Ing., da EP/UFRJ  
(Orientador)

---

Prof. Cláudia Ribeiro Eboli  
Professora Associada, D. Sc., da EP/UFRJ  
(Co-orientador)

---

Prof. Sergio Hampshire de Carvalho Santos  
Prof. Associado, D. Sc., da EP/UFRJ

---

Prof. Arthur V. Da Costa e Silva  
Prof. Assistente da EP/UFRJ

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL  
JUNHO de 2011

Pacher Majul, Julio Fernando

Laje Protendida – Modelagem e Verificações/ Julio Fernando Pacher Majul. Rio de Janeiro: UFRJ/ Escola Politécnica, 2011.

VII, 69 p.: il., 29,7 cm.

Orientador (es): Benjamin Ernani Diaz, Cláudia Ribeiro Eboli

Projeto de Graduação – UFRJ/ Escola Politécnica/ Curso de Engenharia Civil, 2011.

Referências Bibliográficas: p. 43

1. Modelagem em elementos finitos de uma laje protendida para análise linear elástica. I – Diaz, Benjamin Ernani; Eboli, Cláudia Ribeiro. II – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Escola Politécnica, Curso de Engenharia Civil. III – Título.

## **AGRADECIMENTOS**

Em primeiro lugar agradeço a Deus por estar sempre ao meu lado nas horas que mais precisei, nos momentos difíceis, nos momentos de angústia e nos momentos de felicidade. Agradeço também a Ele por ter me dado a família que tenho.

Agradeço aos meus pais, minha mãe Clarice e meu pai Adolfo, pois sem eles e sem a oportunidade que eles me deram de ter uma boa educação, um bom estudo, não estaria onde estou hoje. Nas horas em que pensei desistir da faculdade e de tudo, jogar tudo para o alto, eles sempre estiveram ao meu lado, me apoiando e dando força para poder continuar lutando pelos meus objetivos sem perder a Fé e sem perder o rumo.

Aos meus irmãos José, Alfredo, Nicolás e a minha cunhada Natália por também estarem sempre me apoiando e acreditando que eu sou capaz de conseguir aquilo pelo que luto.

Aos meus amigos: Patrícia, Jefferson, Thiago, Diego, Pedro, Rodrigo, Silvia, Érika, Rodrigo, Camila, Rafael, Daniele, PH, Baia e todos aqueles que sempre me apoiaram para nunca desistir e sempre persistir, pois afinal, sem eles muitas coisas desandariam no percurso chamado Faculdade.

Ao meu Professor e orientador Ernani Diaz pelos ensinamentos, pelo apoio, pela força e pela paciência ao longo da elaboração do meu projeto final.

A minha super e querida professora Cláudia Eboli, pelo apoio, pela força e pela ajuda, pois ela sempre estava disposta a me ajudar em tudo o que eu precisava, nunca se negou e nunca disse não às coisas que eu pedia ou precisava, sempre me recebia com a maior disposição para tirar dúvidas e sempre tinha ouvidos para, inclusive, escutar desabafos.

Ao meu professor e ex-chefe Arthur pelos ensinamentos que obtive dele sem os quais muitas coisas seriam diferentes hoje em dia.

Aos funcionários da secretaria do DME pela ajuda e apoio durante todo o curso.

A todos o único que tenho a dizer é: **MUITO OBRIGADO POR TUDO!!!**

Resumo do Projeto de Graduação apresentado à Escola Politécnica/UFRJ como parte dos requisitos necessários para obtenção do Grau de Engenheiro Civil.

Laje Protendida.  
Modelagem e Verificações.

Julio Fernando Pacher Majul.

Junho de 2011.

Orientador (es): Benjamin Ernani Diaz  
Cláudia Ribeiro Eboli

Curso: Engenharia Civil.

No presente trabalho será apresentada a modelagem de uma laje protendida em elementos finitos para análise linear elástica em um programa estrutural comercial. Serão analisadas seções críticas em estados limites de solicitações normais, punção e fissuração.

Abstracts of Undergraduate Project presented to POLI / UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Engineer.

Prestressed Concrete Flat Slab  
Modeling and Checking

Julio Fernando Pacher Majul

June 2011

Advisors: Benjamin Ernani Diaz  
Cláudia Ribeiro Eboli

Course: Civil Engineering

The modelling of a prestressed slab in finite elements for linear structural analysis with the help of a commercial program is presented. Critical sections will be analyzed for ultimate limit states related to bending - axial design and shear design, as well as, for serviceability limit states regarding cracking checking.

## Sumário

<b>Capítulo 1 - Introdução</b> .....	<b>1</b>
<b>Capítulo 2 – Descrição do Projeto</b> .....	<b>2</b>
2.1 Fôrmas .....	2
2.2 Materiais .....	3
2.3 Ações .....	8
2.3.1 Ações permanentes .....	8
2.3.2 Ações variáveis .....	9
<b>Capítulo 3 – Análise Linear Elástica</b> .....	<b>10</b>
3.1 Malha em Elementos Finitos .....	10
3.2 Propriedades dos materiais .....	12
3.3 Carregamentos .....	12
3.3.1 Combinação no ELU .....	12
3.3.2 Combinação no ELS .....	13
3.3.3 Ação dos cabos da direção X ( $p_{xx}$ ) .....	13
3.3.4 Ação dos cabos da direção Y ( $p_{yy}$ ) .....	20
<b>Capítulo 4 – Verificações nos Estados Limites</b> .....	<b>26</b>
4.1 Estado Limite Último de Solicitações Normais .....	26
4.2 Estado Limite Último de Punção .....	34
4.3 Estado Limite de Verificação de Fissuras.....	37
4.4 Determinação das flechas da laje .....	39
<b>Capítulo 5 – Conclusão</b> .....	<b>40</b>
<b>Referências Bibliográficas</b> .....	<b>43</b>
<b>Anexo A</b> .....	<b>44</b>
<b>Anexo B</b> .....	<b>64</b>

## 1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho será apresentada a modelagem para análise elástica e verificações de seções críticas nos estados limites referentes a solicitações normais, punção e fissuração, de uma laje protendida com sistema aderente.

A escolha do tema Lajes Protendidas surgiu devida à necessidade de atender às solicitações do meu pai, pois lhe ofereceram a representação deste tipo de sistema de construção no Paraguai. Com isto decidi aprofundar meus conhecimentos neste tipo de solução estrutural. Tomei como projeto base o livro *Design Fundamentals of Post-Tensioned Concrete Floors* do *Post-Tensioning Institute*.

O trabalho é desenvolvido em 5 capítulos. No capítulo 2, será apresentado o projeto do pavimento estudado, definindo-se os materiais utilizados, os desenhos de fôrma e os desenhos de distribuição dos cabos. Serão relacionadas as propriedades do aço e do cabo de protensão adotadas e algumas recomendações pertinentes da Norma NBR 6118:2003.

No capítulo 3, será apresentado o modelo em elementos finitos utilizado na análise elástica com auxílio do programa SAP 2000. Serão apresentados aspectos referentes à definição dos apoios, modelagem dos capitéis, modelagem dos cabos de protensão, etc.

No capítulo 4, serão feitas verificações nos estados limites últimos de solicitações normais e de punção e estado limite de abertura de fissuras, para as situações críticas.

As conclusões e sugestões para novas pesquisas serão apresentadas no capítulo 5.



## 2. DESCRIÇÃO DO PROJETO

### 2.1. Fôrmas

A laje considerada tem 26 cm de espessura e capitéis de 50 cm de espessura. As dimensões em planta são as apresentadas na figura 2.1. Está apoiada em 16 pilares e em 5 paredes, com distância entre eixos de apoios variando de 9m a 10m ,no sentido do eixo X, e de 8.5m a 11m no sentido do eixo Y.

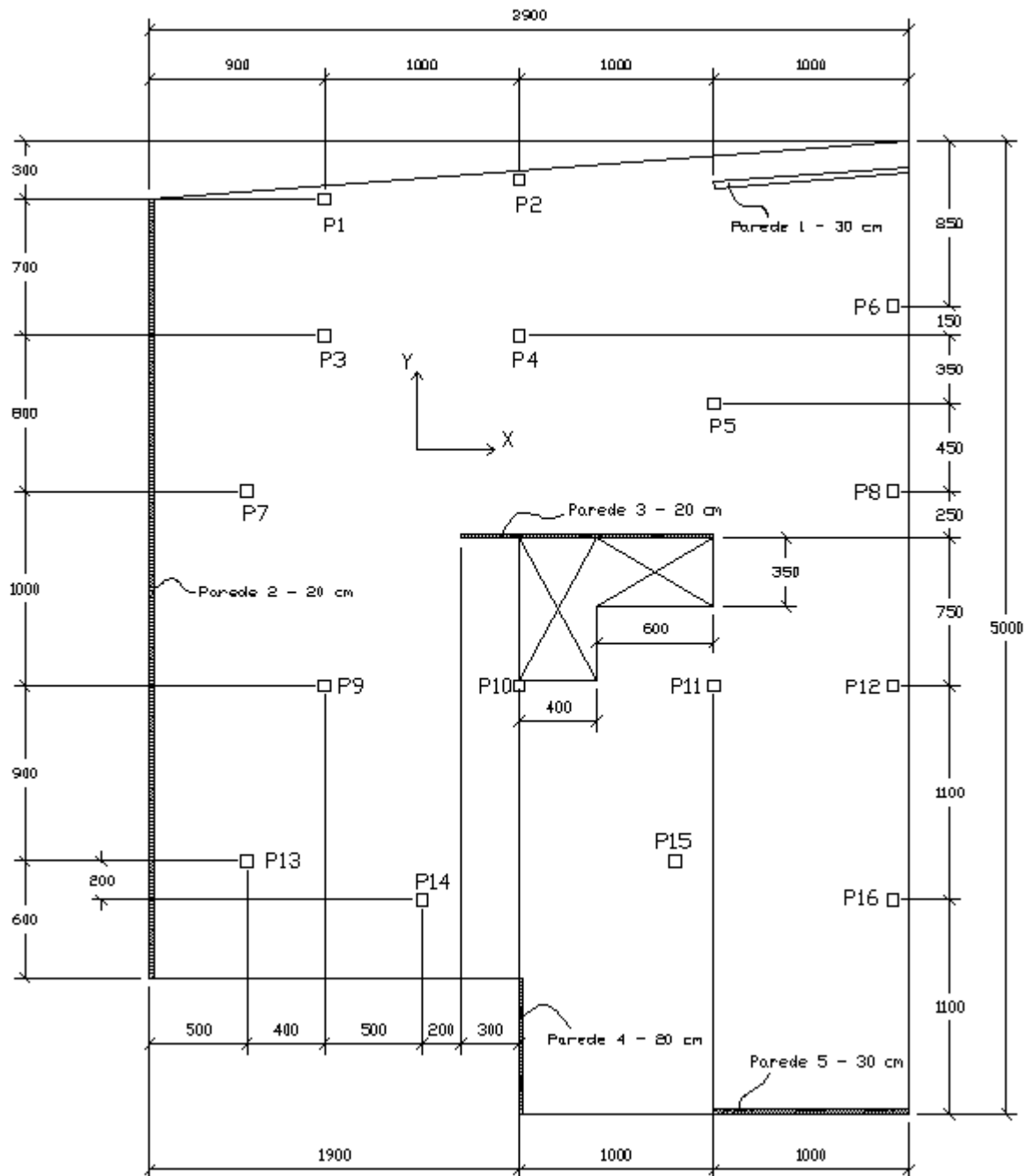


Figura 2.1 – Planta de fôrma (dimensões em cm).

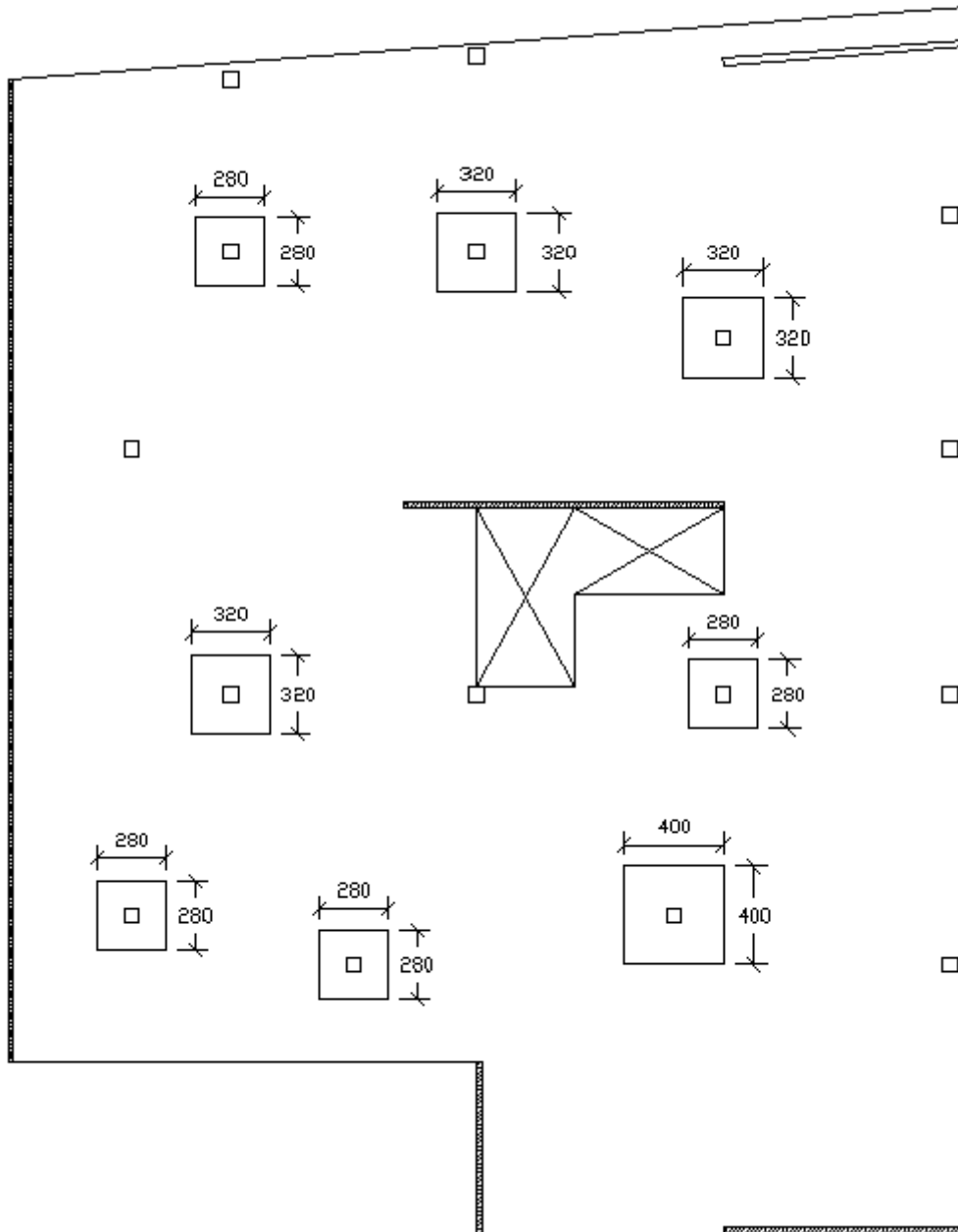


Figura 2.2 – Dimensões dos capitéis nos apoios (dimensões em cm).

## 2.2. Materiais

- *Concreto*

O concreto adotado foi o da classe C35.

- *Aços*

O aço da armadura passiva utilizada é o aço CA – 50.

O aço da armadura ativa adotado é o CP190 - RB

**Tabela 2.1** - Propriedades das cordoalhas de 7 fios – Aço CP190 RB.

Tipo de cordoalha	Ø 12,7 mm
Área mínima (mm <sup>2</sup> )	98,6
Área aproximada média (mm <sup>2</sup> )	101,4
Massa nominal (kg/m)	0,775
Carga de ruptura (kN)	187,3
Tensão característica de ruptura – $f_{ptk}$ (MPa)	1900
Tensão característica convencional de escoamento – $f_{pyk}$ (MPa)	1710
Módulo de elasticidade (GPa)	196

Foram usadas cordoalhas aderentes com as propriedades apresentadas na tabela 2.1. Na protensão aderente para a laje utilizam-se bainhas corrugadas, de preferência chatas, sendo os cabos injetados com calda de cimento.

- *Força de protensão por cordoalha no ELU*

$$P_{ELU} = \frac{0,9 * f_{ptk}}{\gamma_s} * \text{área}_{\text{cordoalha}}$$

Esta força de acordo com a Norma NBR 6118 é 146 kN.

- *Força de protensão máxima na ancoragem e força para  $t = \infty$  em serviço*

A força inicial na ancoragem por cordoalha é segundo a NBR 6118:

$$P_{\text{ancoragem}} = 0,74 * f_{ptk} * \text{área}_{\text{mín}}$$

Considerando uma perda por atrito com um coeficiente de atrito entre cabo e bainha igual a  $\mu = 0,20$  temos:

$$\Delta P(x) = P_i * (1 - e^{-(\mu \sum \alpha + kx)})$$

A força inicial estimada para  $t = 0$  é  $P_i = 127 \text{ kN}$ .

A força de protensão para  $t = \infty$  será dada por:

$$P_{\infty} = 0,85 * P_i \cong 108 \text{ kN}$$

Onde:

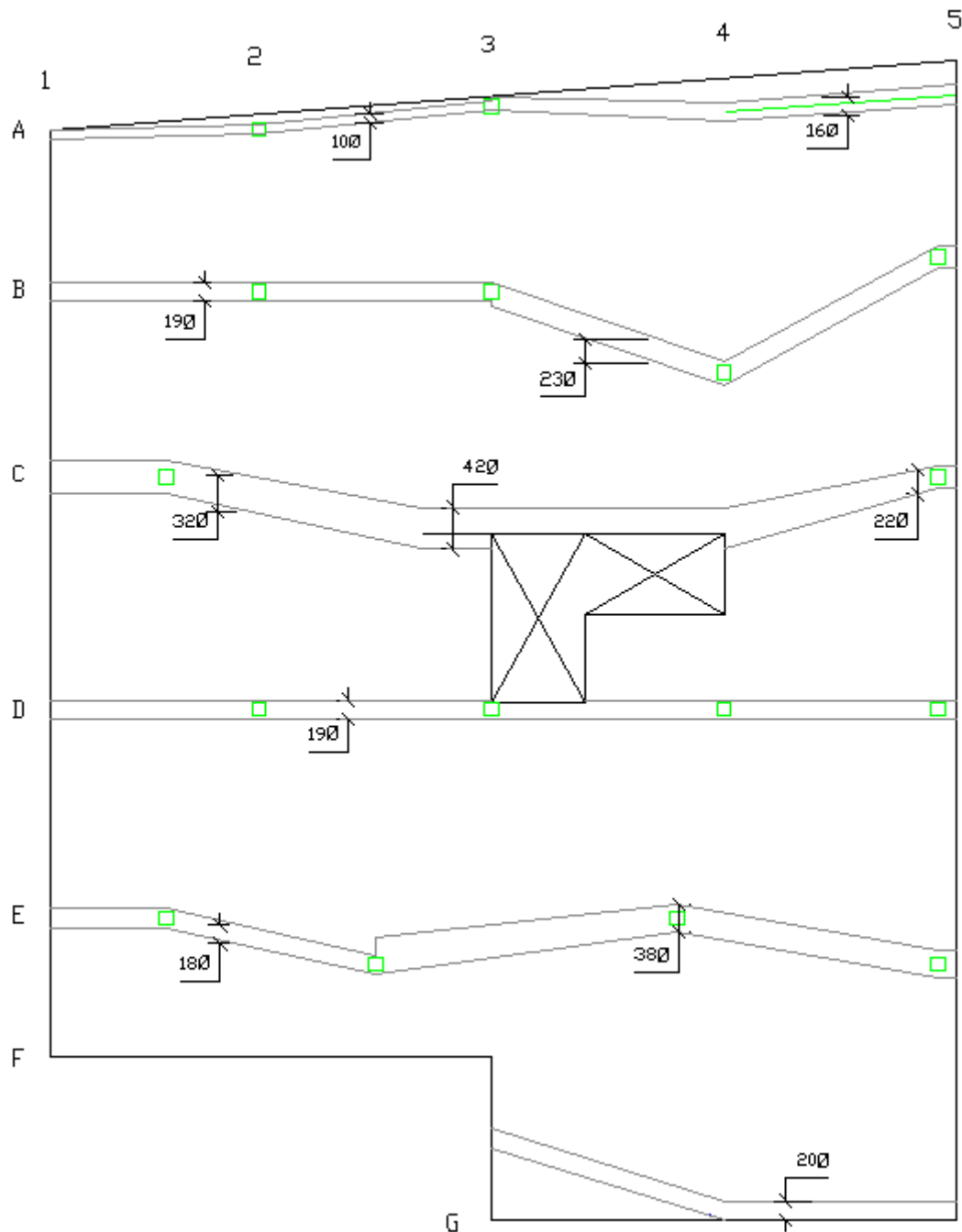
$\gamma_s$  - Coeficiente de segurança da resistência do aço;

$\sum \alpha$  - é a soma dos ângulos de desvio, em radianos.

➤ *Distribuição dos cabos*

- *Cabos na direção X*

As 158 cordoalhas da direção X estão localizadas nas faixas sobre os apoios, conforme apresentado na figura 2.3.

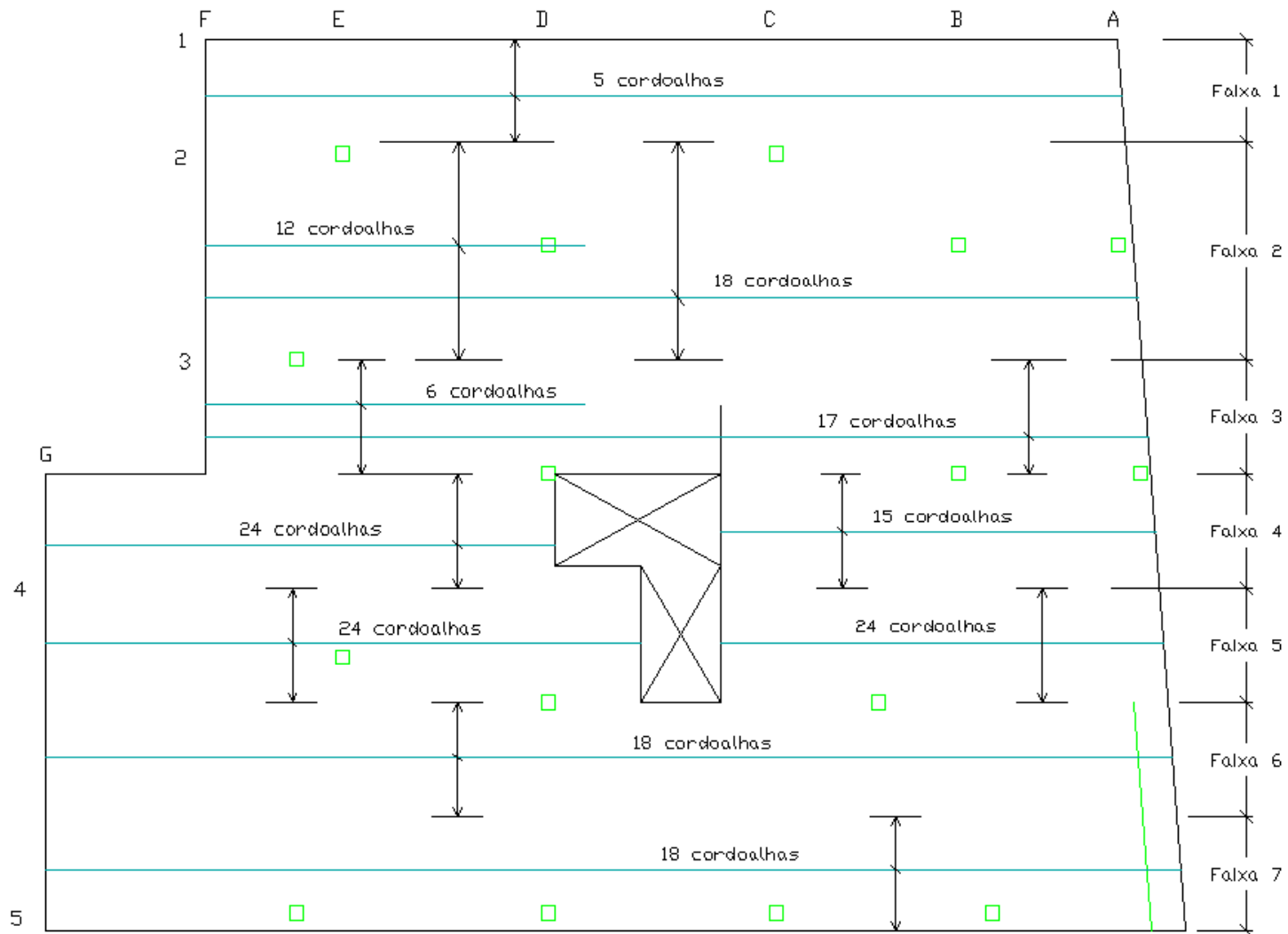


**Figura 2.3** – Quantidade de cordoalhas nas faixas.

As ancoragens no eixo 1 são centradas em relação ao plano médio da laje e tem ângulo de saída positivo e variável, conforme será mostrado no capítulo 3. Nas extremidades do eixo 5, as ancoragens são horizontais e centradas. As ancoragens no interior do painel são ancoragens mortas, horizontais e com excentricidade máxima perto à face superior.

- *Cabos na direção Y*

As cordoalhas da direção Y estão distribuídas nas 7 faixas conforme apresentadas na figura 2.4.



**Figura 2.4 – Disposição dos cabos distribuídos na direção y.**

As ancoragens nos eixos F e G são centradas e horizontais. No eixo A, vale o mesmo, com exceção daquelas nas faixas 6 e 7, que têm ângulo negativo de saída.

As ações permanentes da protensão, carga equivalente e efeitos de extremidade são apresentados no capítulo 3.

## 2.3. Ações

As cargas utilizadas são as da publicação de Bijan O. Aalami & Alla Bommer.

### 2.3.1. Ações permanentes

A carga permanente consiste em:

- Peso próprio da laje ( $\gamma_c * h_l$  onde  $h_l$  – espessura da laje = 26 cm e  $\gamma_c$  – peso específico do concreto =  $25 \frac{kN}{m^3}$ );
- Carga permanente de revestimento e outros equipamentos instalados na laje com valor de  $0.7 \text{ kN/m}^2$ ;
- Carga permanente de divisórias (paredes) igual a  $1 \text{ kN/m}^2$ ;
- Carga permanente total de 250 kN atuando em uma área efetiva com dimensões de  $190 \times 360 \text{ cm}^2$ , conforme ilustra a figura 2.5.

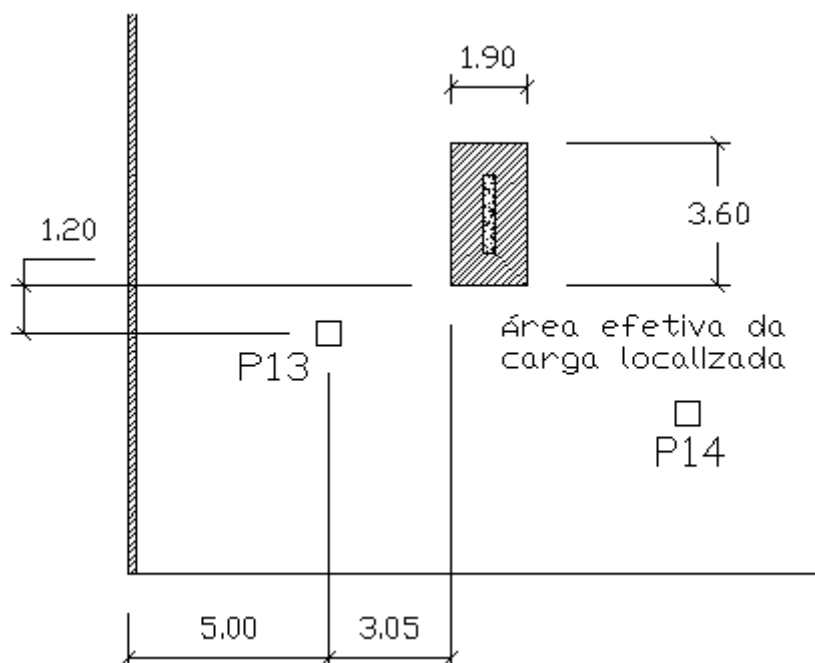


Figura 2.5 – Posição da área efetiva para cargas concentradas localizadas.

### 2.3.2. Ações variáveis

As ações variáveis consideradas são:

- Carga acidental distribuída de  $2.34 \text{ kN/m}^2$ ;
- Carga acidental total de  $100 \text{ kN}$  atuando na mesma área mostrada na figura 2.5.



### 3. ANÁLISE LINEAR ELÁSTICA

#### 3.1. Malha em Elementos Finitos

A análise linear elástica foi feita com o auxílio do programa estrutural comercial SAP 2000. O plano médio da laje foi modelado em uma malha com elementos de casca de 20 cm x 20 cm com efeito de membrana e de flexão. A malha de 42755 elementos foi gerada com o auxílio do programa Autocad e exportada para o programa de análise.

Para a região dos capitéis foram elaborados 3 modelos. No primeiro modelo foi feito um engrossamento simétrico da laje nas regiões que formam os capitéis. No segundo modelo os elementos, que estão na região dos capitéis, foram replicados no sentido negativo do eixo z, formando-se assim, duas lajes com espessura total de 50 cm. Nos nós destas 2 lajes foram colocados *links* (barras rígidas sem consideração de pesos adicionais) para uni-las estruturalmente. Finalmente no terceiro modelo, o qual foi utilizado para as verificações, foi feito um deslocamento do plano médio da laje, no sentido negativo do eixo z, dos elementos que formam os capitéis e aumentada a espessura da laje para 50 cm. Todos os dimensionamentos foram feitos com o terceiro modelo.

- Apoios

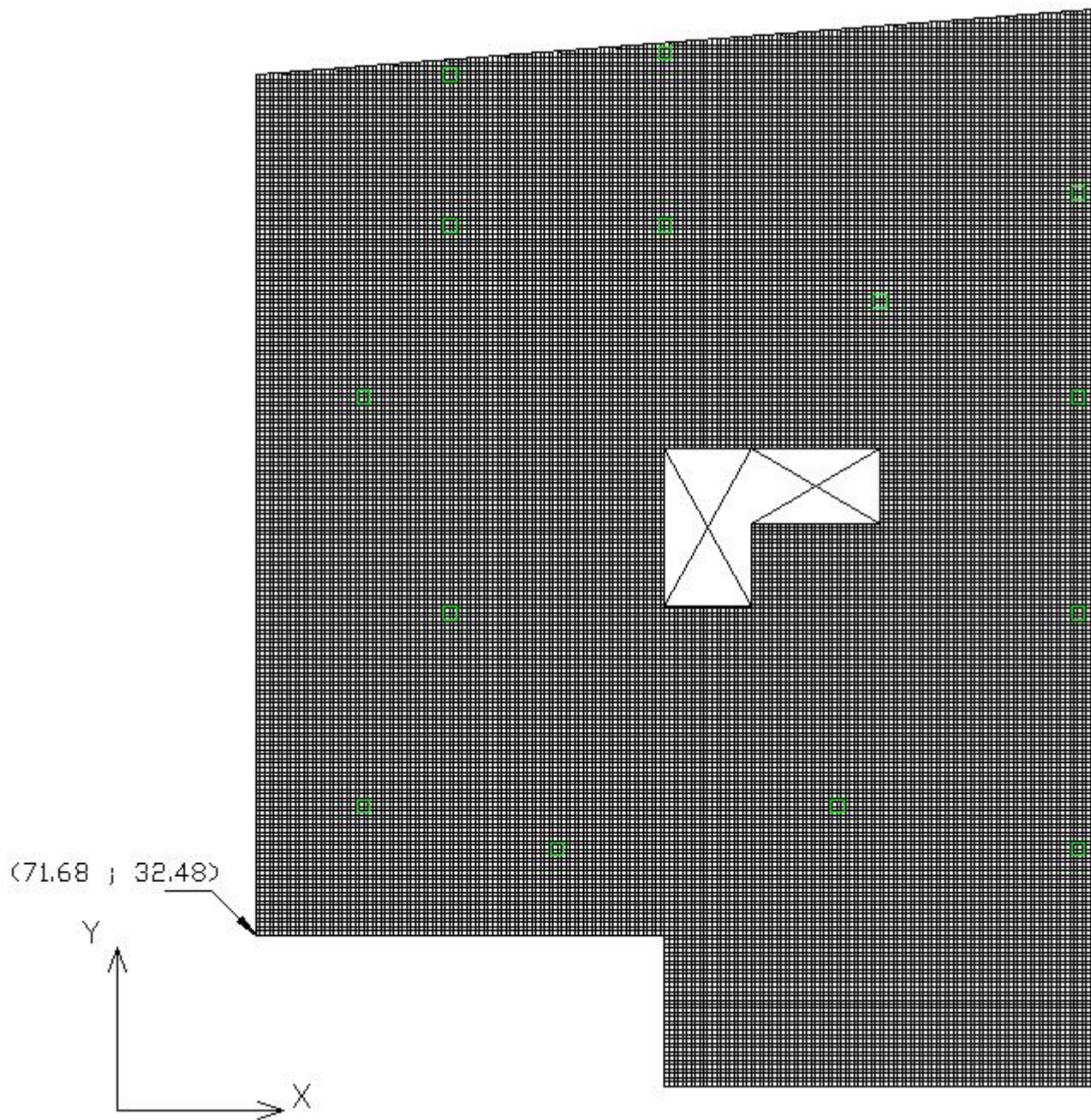
As paredes e pilares foram modelados como apoios pontuais, restringindo-se o deslocamento z dos nós mais próximos do eixo destes, conforme mostra a tabela 3.1.

**Tabela 3.1 – Localização dos apoios**

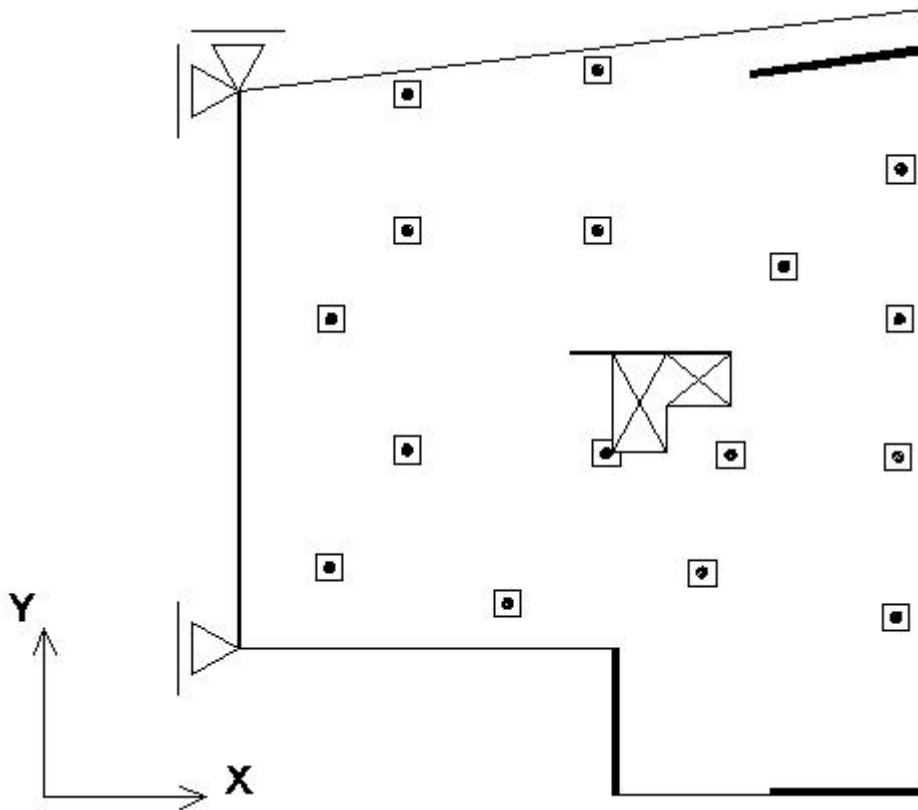
	P1	P2	P3	P4	P5	P6
x (m)	80.68	90.68	80.68	90.68	100.7	109.88
y (m)	72.48	73.68	65.48	65.48	62.08	67.48
	P7	P8	P9	P10	P11	P12
x (m)	76.68	109.88	80.68	90.68	100.7	109.68
y (m)	57.48	57.48	47.48	47.68	47.68	47.68
		P13	P14	P15	P16	
x (m)		76.68	85.68	98.68	109.9	
y (m)		38.48	36.48	38.48	36.48	
	Eixo da parede 1					
y (m)	73.39					
	Eixo da parede 2		Eixo da parede 3			
x (m)	71.88		y (m)	55.18		
	Eixo da parede 4		Eixo da parede 5			
x (m)	90.78		y (m)	25.58		

Em todos os pilares, foi considerada uma área enrijecida de 40 x 40 cm<sup>2</sup>, prescrevendo-se a espessura de 2 m e peso específico nulo.

Para eliminar os deslocamentos de corpo rígido, foram considerados apoios pontuais restringindo as translações em X e Y, conforme mostra a figura 3.2.



**Figura 3.1** – Malha de elementos finitos.



**Figura 3.2** – Área enrijecida em torno dos apoios e restrições do deslocamento de corpo rígido (sem escala)

### 3.2. Propriedades dos materiais

- Propriedades do concreto

As propriedades do concreto, de acordo com a NBR 6118, são as seguintes:

- *Peso específico* 25 kN/m<sup>3</sup>;
- *Coefficiente de dilatação térmica* 10<sup>-5</sup> /K;
- *Módulo de Elasticidade*  $E_{CS}$ ;
- *Coefficiente de Poisson* 0,2.

### 3.3. Carregamentos

#### 3.3.1. Combinações no ELU

- Carregamento g:

*Peso Próprio + Parede + Revestimento + Carga Concentrada Permanente*

- Carregamento q:

### *Cargas Concentradas Acidentais + Sobrecargas*

- Carregamento de protensão para  $t = \infty$ :

$p_{xx}$  – ação dos cabos da direção X;

$p_{yy}$  – ação dos cabos da direção Y.

Os carregamentos  $p_{xx}$  e  $p_{yy}$  são descritos no item 3.3.3 e 3.3.4.

A combinação no ELU é:

$$Comb_1 = 1,4 * E_g + 1,4 * E_q + 0,9 * Ep_{xx} + 0,9 * Ep_{yy}$$

#### 3.3.2. Combinação no ELS

$$Comb_2 = E_g + E_q + Ep_{xx} + Ep_{yy}$$

Não foram considerados os fatores de redução para a verificação de fissuração conforme a NBR 6118.

#### 3.3.3. Ação dos cabos da direção X ( $p_{xx}$ )

Cada cabo é formado de trechos parabólicos, positivos e negativos, de flecha  $f$  e comprimento  $l_p$ .

O ponto de inflexão entre 2 trechos foi tomado a uma distância do eixo do apoio igual a 15% do vão ( $0,15 * l$ ).

A carga distribuída equivalente a cada grupo de cabos das faixas apresentadas na figura 3.3 é obtida por:

$$q = \frac{8 * n * P * f}{l_p^2 * b}$$

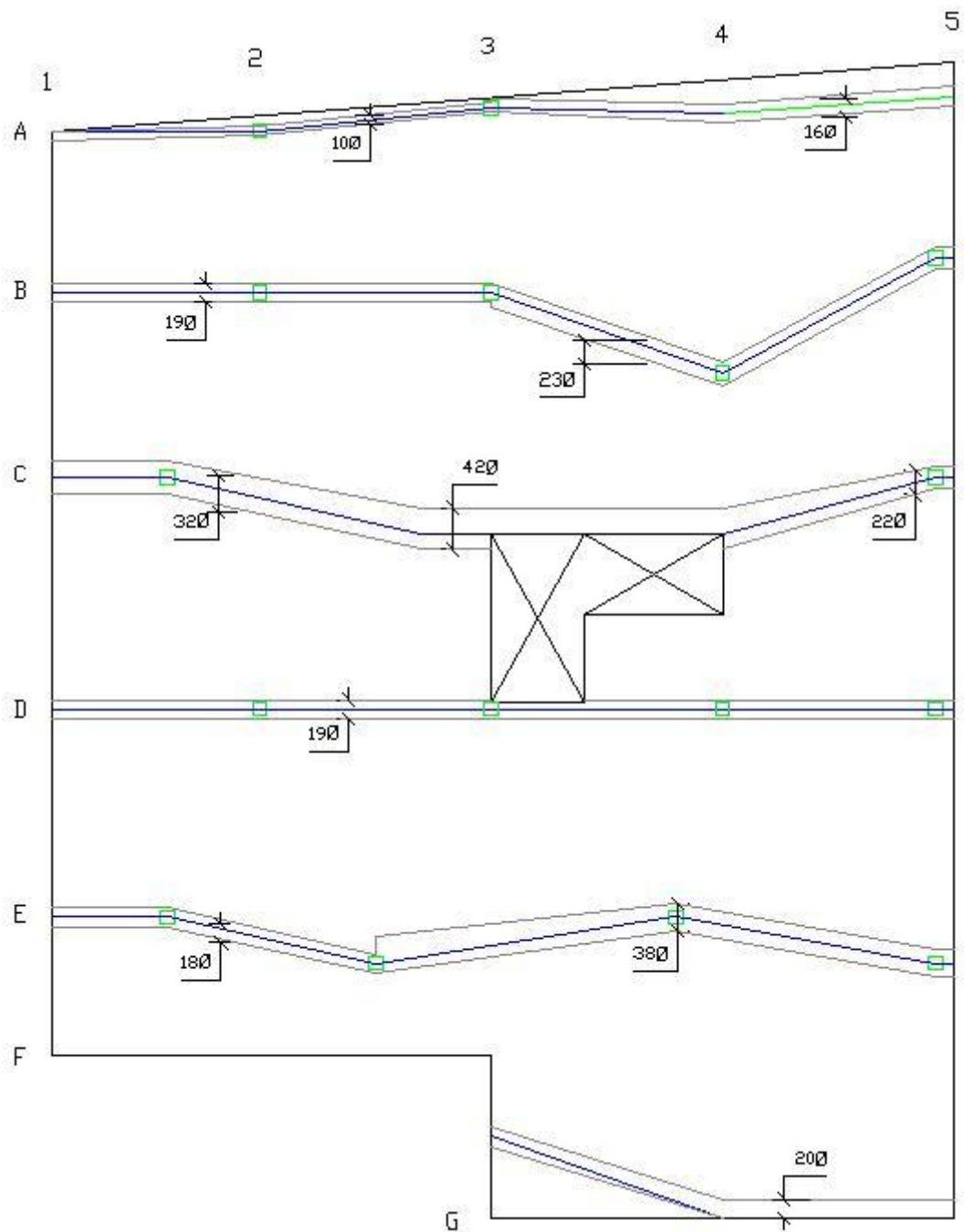
Onde:

$P \cong 108$  kN – força da cordoalha para  $t = \infty$ ;

$n$  - número de cabos na faixa;

$l_p$  - comprimento da parábola;

$b$  - largura da faixa em que foi aplicada a carga.



**Figura 3.3 – Faixa de cabos na direção X.**

Os sinais das cargas distribuídas e concentradas, forças e momentos, seguem a convenção de sinais dos eixos globais, com o eixo z para cima.

FAIXA A - Carga distribuída equivalente									
Trecho da parábola	A1	vão 1	A2	vão 2	A3	vão 3	A4	vão 4	A5
n	10	10	10	10	16	16	16	16	16
b (m)	0.4	0.4	0.4	0.4	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8
f (m)	-	0.12	0.045	0.145	0.045	0.145	0.014	-	-
$L_p$ (m)	-	7.65	2.85	7	3	7	1.5	7.5	-
q (kN/m <sup>2</sup> )	-	44.291	-119.67	63.92	-86.4	51.1347	-107.5	-	-

No traçado dos cabos, os trechos parabólicos contíguos possuem descontinuidades na tangente no ponto comum. Para corrigir este efeito, serão aplicadas cargas concentradas nos pontos de inflexão, em sentido contrário.

O ideal, desde o início, seria eliminar estas forças adicionais. Na publicação de Alexandre A. Emerick são apresentadas fórmulas para determinar as flechas dos traçados dos cabos sem estas forças adicionais.

Para os cabos da faixa A temos:

Correção no ponto de inflexão															
Trecho parabólico	A1			vão 1			A2			vão 2			A3		
	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F
z (m)	0	0	0	0	-0.095	0.05	0.05	0.095	0.04	0.04	-0.095	0.05	0.05	0.095	0.05
sin $\alpha$				0.056		-0.0693	-0.067		0.074	0.079		-0.081	-0.06		0.06
P *sin $\alpha$ (kN)				-64.64		-79.673	76.67		84.74	-90.36		-93.64	69		110.4
$\Delta P$ (kN)						-3.01			-5.62			-24.64			-42.06

Correção no ponto de inflexão													
Trecho parabólico	vão 3			A4			vão 4			A5			
	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F	
z (m)	0.05	-0.095	0.05	0.05	0.087	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	
sin $\alpha$	0.0829		-0.0829	-0.069		0.00867	0		0	0		0	
P *sin $\alpha$ (kN)	-152.46		-152.46	126.3		15.9467	0		0	0		0	
$\Delta P$ (kN)			-26.11			15.95			0			0	

Onde:

$z$  - excentricidade do cabo;

$z_I$  - ponto inicial do trecho parabólico;

$z_M$  - ponto médio do trecho parabólico;

$z_F$  - ponto final do trecho parabólico;

$\Delta P$  - forças adicionais nos pontos de inflexão.

O ângulo (em radianos) no ponto inicial e final de cada cabo foram obtidos da seguinte equação:

$$\alpha \cong \sin \alpha = \frac{2 * \left[ \frac{(z_I + z_F)}{2} + z_M \right] + \frac{(z_I + z_F)}{2} + z_P}{\frac{l_p}{2}}$$

Simplificando a equação acima obtemos:

$$\alpha \cong \sin \alpha = \frac{3 * (z_I + z_F) + 4 * z_M + 2 * z_P}{l_p}$$

Onde:

$\alpha$  – ângulo da tangente nos pontos extremos da parábola;

$z_p$  – cota no ponto de inflexão considerado.

As tabelas das demais faixas de cabos sobre os apoios encontram-se no anexo A.

➤ *Efeitos de extremidades*

A ancoragem no eixo 1 é centrada com o plano médio da laje e tem ângulo de saída positivo, o que implica em uma força inclinada em relação à horizontal. Essa força foi decomposta em uma força horizontal e vertical para a aplicação como forças de extremidade.

As forças foram calculadas como se segue:

$$F_x = \left( \frac{n * P}{b_{elem}} \right) * \cos \alpha$$

$$F_z = \left( \frac{n * P}{b_{elem}} \right) * \sin \alpha$$

Onde:

$F_x$  - força aplicada na direção x;

$F_z$  - força aplicada na direção z;

$n$  - número de cabos na faixa;

$P$  - força de protensão por cabo para  $t = \infty \cong 108 \text{ kN}$ ;

$b_{elem}$  - largura do elemento (0,20 m);

$\alpha$  - ângulo de saída na ancoragem.

Tais forças foram aplicadas como forças nodais, isto é, cada nó recebe metade da carga no bordo do elemento com largura de 0,20 m.

Força inclinada na ancoragem do eixo 1					
Ângulo	3.229	graus	0.056357	rad	
Força total horizontal	60.833	kN			
Número de elementos	2				
Força vertical nos nós	30.4165	kN	Metade	15.20825	kN
Força horizontal	540	kN	Metade	270	kN

Força na ancoragem do eixo 5					
Força total nos cabos	1728	kN			
Quantidade de elementos	4				
Força horizontal	432	kN	Metade	216	kN
Momento total	164.16	kNm			
Momento nos nós	41.04	kNm	Metade	20.52	kNm

A figura 3.4 mostra os carregamentos no SAP 2000, definidas por forças por unidades de área.



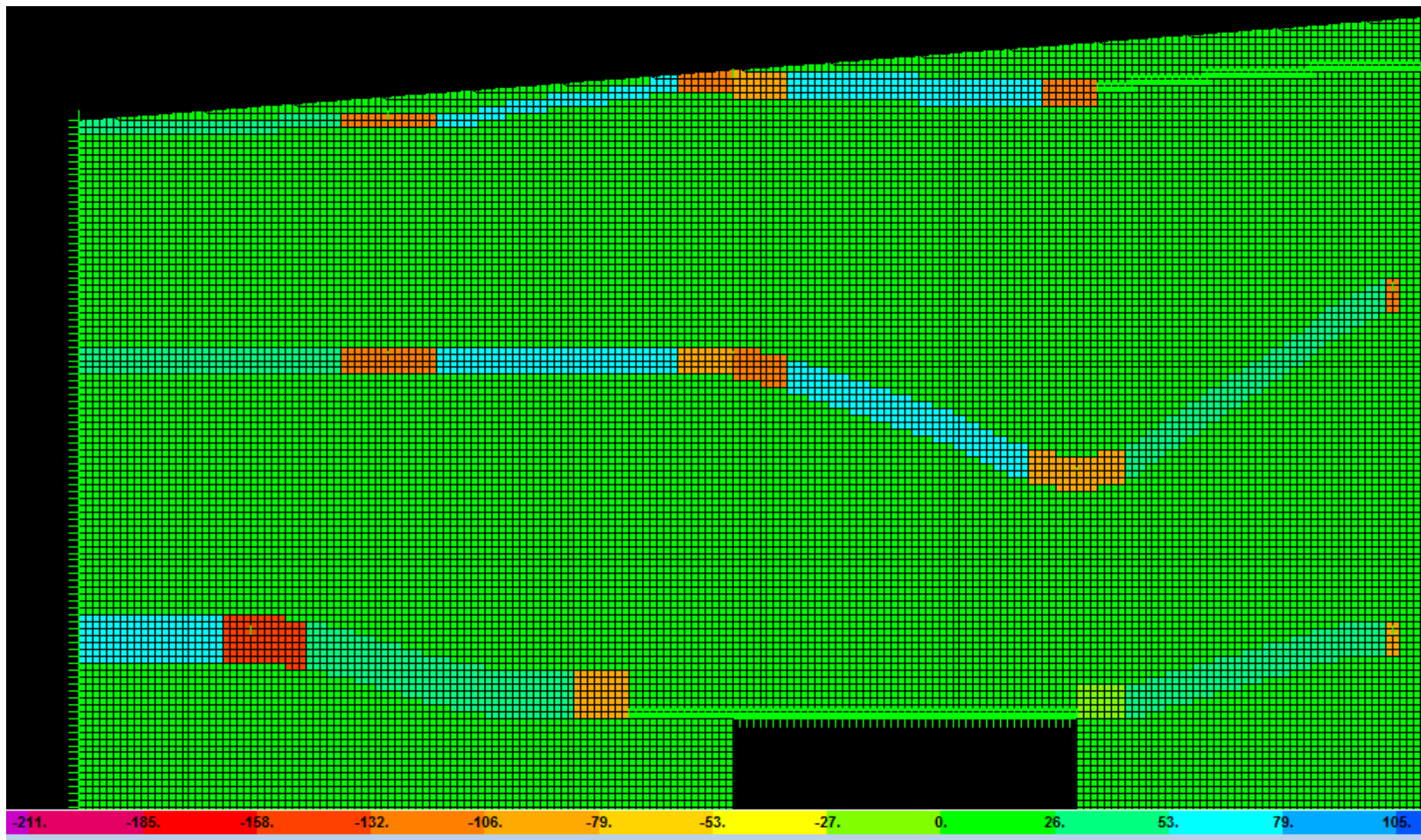


Figura 3.4 – Cargas equivalentes dos cabos da direção X (parte 1).

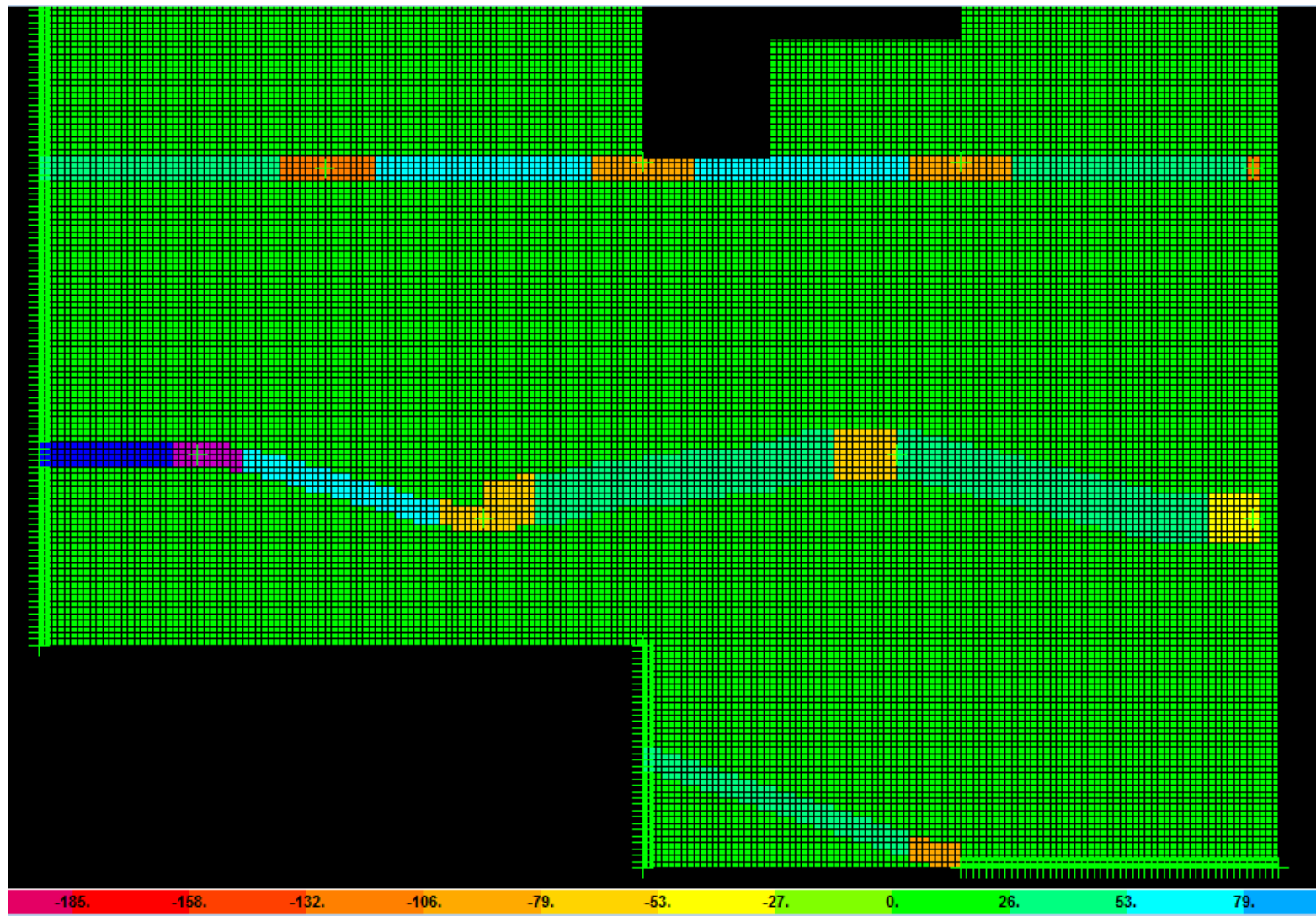


Figura 3.5 – Cargas equivalentes dos cabos da direção X (parte 2).

#### 3.3.4. Ação dos cabos da direção Y ( $p_{yy}$ )

Para esta direção os cabos serão considerados uniformemente distribuídos.

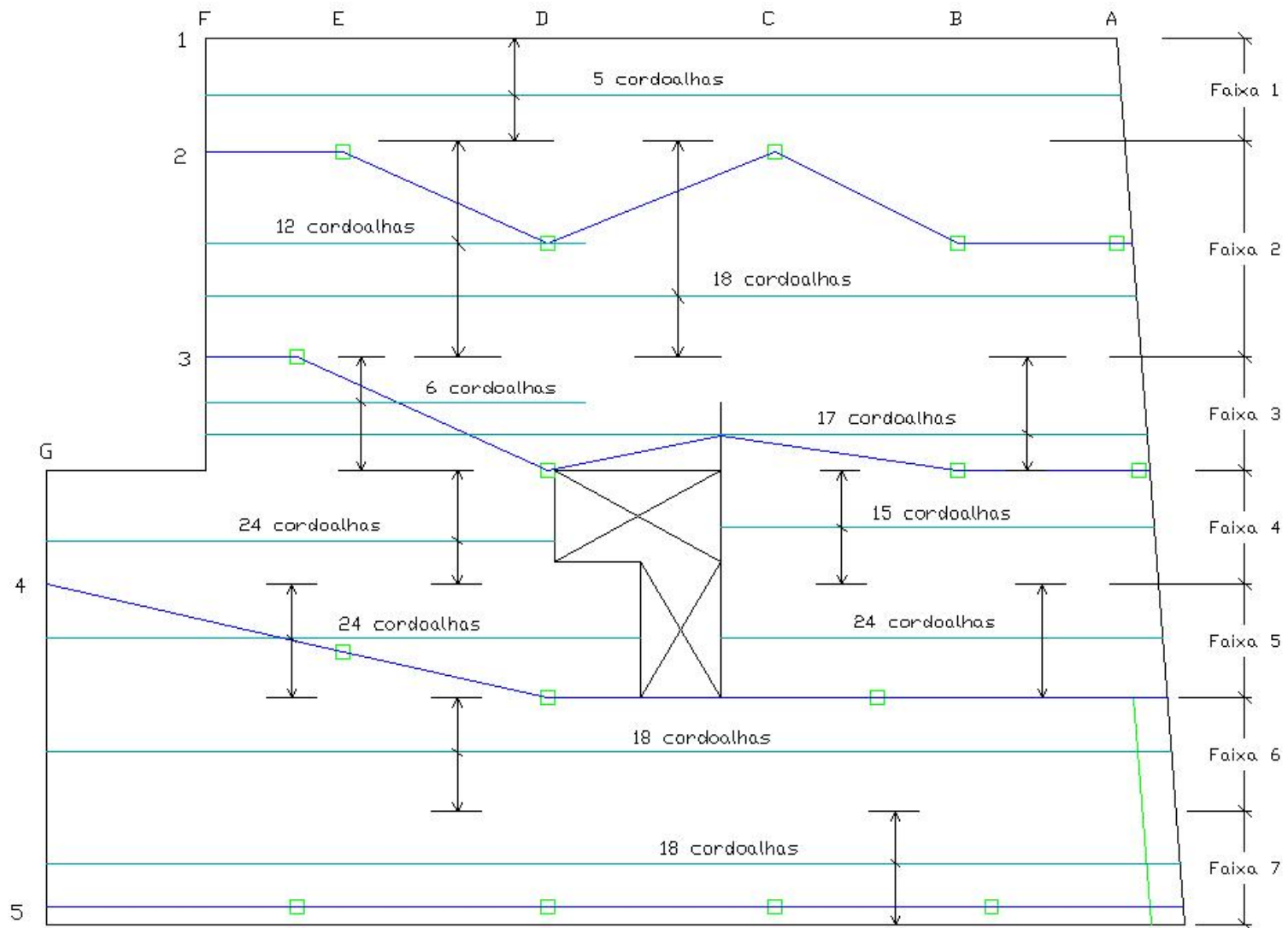
A ação dos cabos nesta direção foi calculada da mesma forma que a dos cabos da direção X.

As tabelas a seguir apresentam as cargas distribuídas equivalentes e forças nos pontos de inflexão na faixa 1 (figura 3.6). Para as demais faixas, as tabelas encontram-se no anexo A. De novo, seria importante adotar flechas mais adequadas nos traçados dos cabos de modo a evitar estas forças adicionais nos pontos de inflexão.

##### ➤ *Efeitos de extremidade*

As ancoragens nos eixos A, F e G nesta direção têm ângulo de saída nulo em relação ao plano médio da laje e os efeitos de extremidades são cargas aplicadas no plano. Os cabos das faixas 6 e 7 no eixo A têm excentricidade máxima positiva e ângulo de saída negativo.

As figuras 3.7 e 3.8 mostram as cargas equivalentes aplicadas no modelo como forças por unidade de área, tanto no sentido para cima como para baixo.



**Figura 3.6 – Distribuição das cordoalhas no painel da laje.**

Faixa 1 - Carga distribuída equivalente											
Trecho da parábola	Apoio 1	vão 1	Apoio 2	vão 2	Apoio 3	vão 3	Apoio 4	vão 4	Apoio 5	vão 5	Apoio 6
n	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
b (m)	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5
f (m)	-	0.117	0.047	0.145	0.04	0.155	0.042	0.14	0.052	0.105	0.003
$L_p$ (m)	-	5.1	2.25	6.3	2.85	7	2.7	5.6	2.25	5.3	0.8
q (kN/m <sup>2</sup> )	-	4.32	8.91	3.51	4.73	3.04	5.53	4.29	9.86	3.59	4.50

Correção no ponto de inflexão															
Trecho parabólico	Apoio 1			vão 1			Apoio 2			vão 2			Apoio 3		
	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F
z (m)	0	0	0	0	-0.095	0.043	0.043	0.094	0.049	0.049	-0.0949	0.04	0.04	0.095	0.045
sen $\alpha$				0.082941		-0.0998	-0.088		0.082667	0.089937		-0.08708	-0.07544		0.07193
P*sen $\alpha$ (kN)				-44.79		-53.89	47.52		44.64	-48.57		-47.02	40.74		38.84
$\Delta P$ (kN)						-6.37			-3.93			-6.29			-4.36

Correção no ponto de inflexão																		
Trecho parabólico	vão 3			Apoio 4			vão 4			Apoio 5			vão 5			Apoio 6		
	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F
z (m)	0.045	-0.095	0.045	0.045	0.095	0.04	0.04	-0.094	0.045	0.045	0.093	0.039	0.039	-0.094	-0.0267	-0.0267	-0.0067	0
sen $\alpha$	0.08		-0.08	-0.07593		0.07963	0.096607		-0.09839	-0.088		0.093333	0.087981		-0.06319	-0.06663		-0.00012
P*sen $\alpha$ (kN)	-43.2		-43.2	41.00		43.00	-52.1679		-53.1321	47.52		50.40	-47.51		-34.12	35.98		-0.07
$\Delta P$ (kN)			-2.20			-9.17			-5.61			2.89			1.86			-0.07

Efeito de extremidade no eixo F					
Força no cabo		540	kN		
Quantidade de elementos		23			
Força horizontal		23.47826	kN	Metade	11.73913 kN

Força de ancoragem no eixo A						
Força no cabo		540	kN			
Numero de quadrados		23				
Força horizontal		23.47826	kN	Metade	11.73913	kN

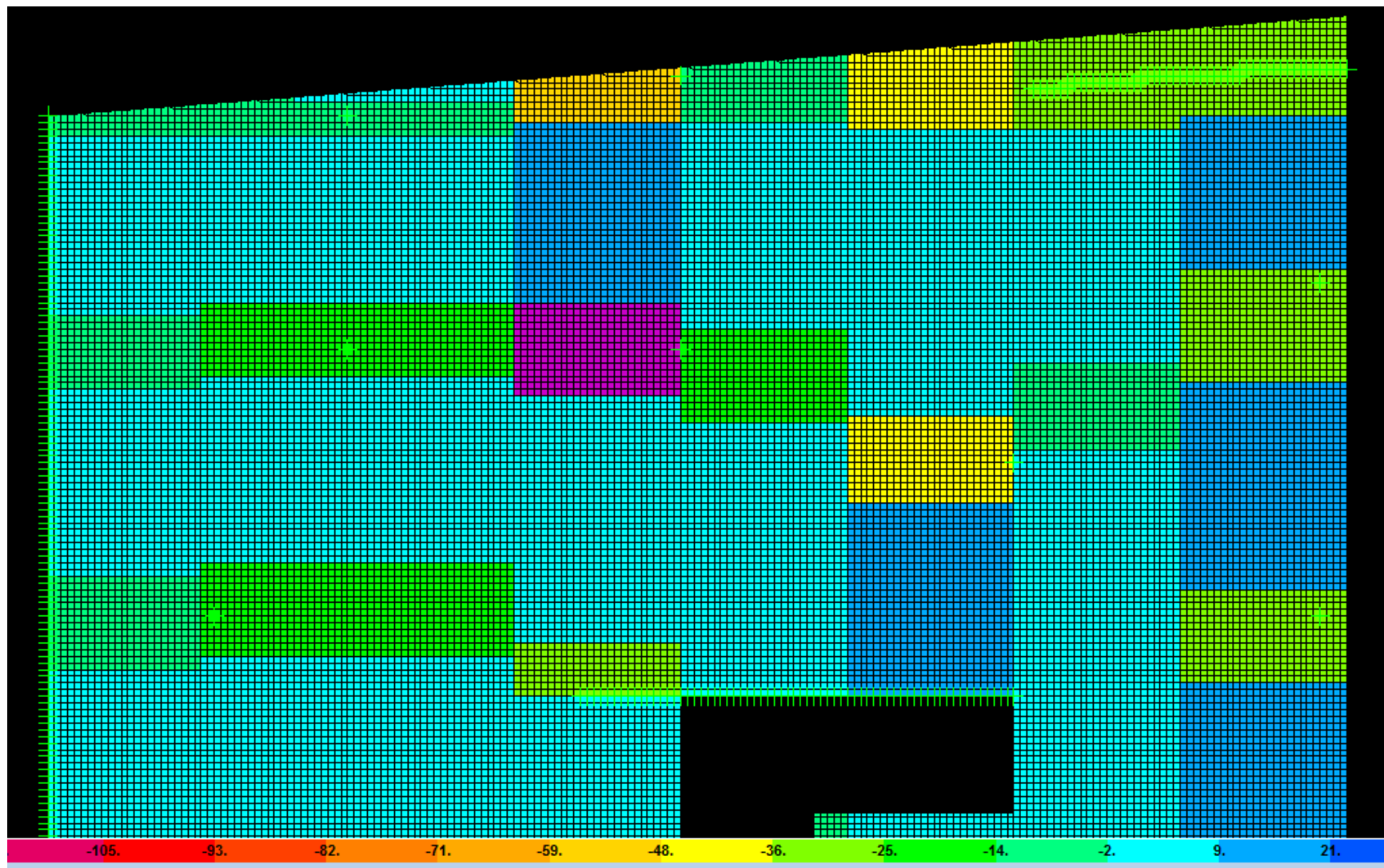


Figura 3.7 – Cargas equivalentes dos cabos da direção Y (parte 1).

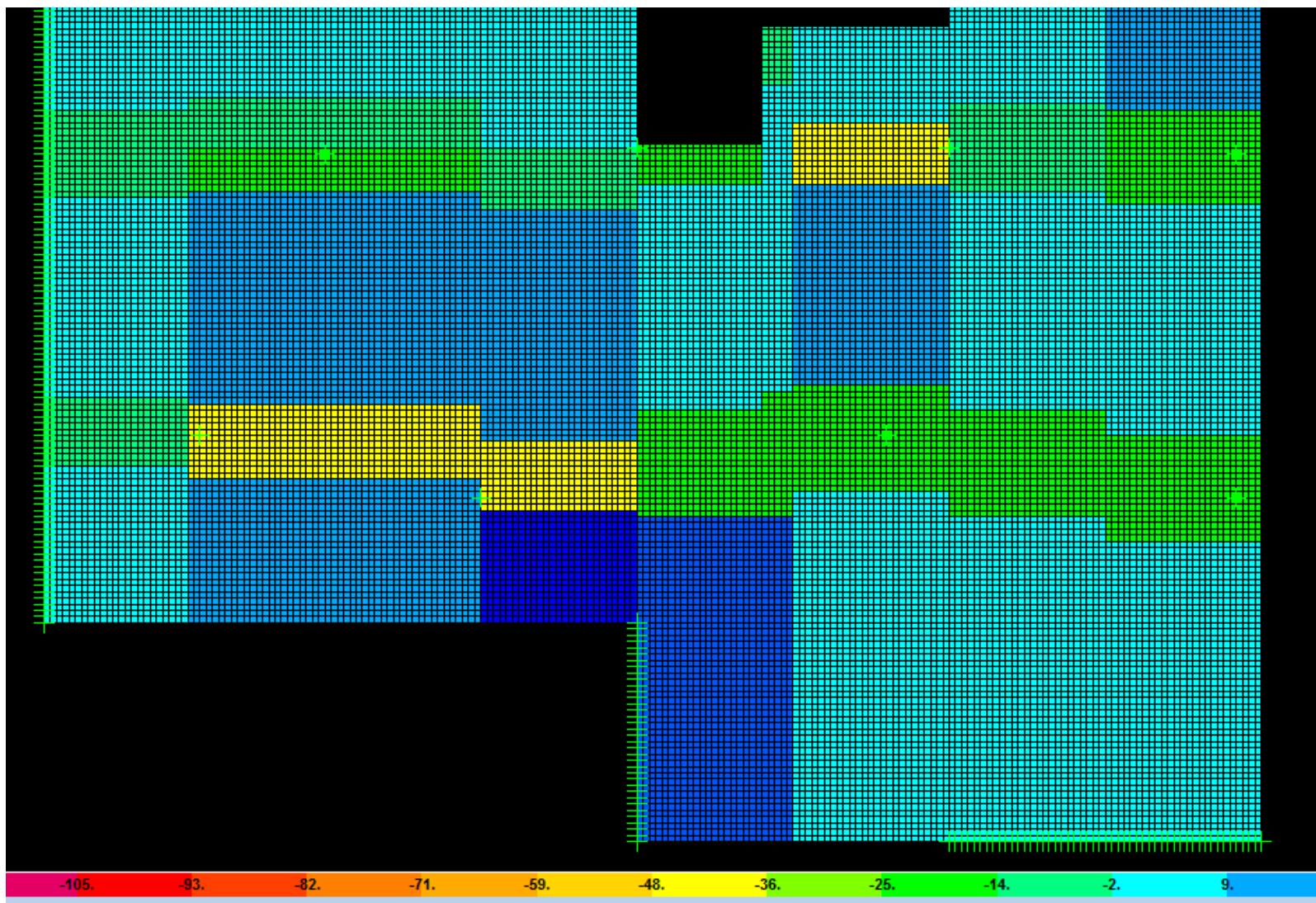


Figura 3.8 – Cargas equivalentes dos cabos da direção Y (parte 2)

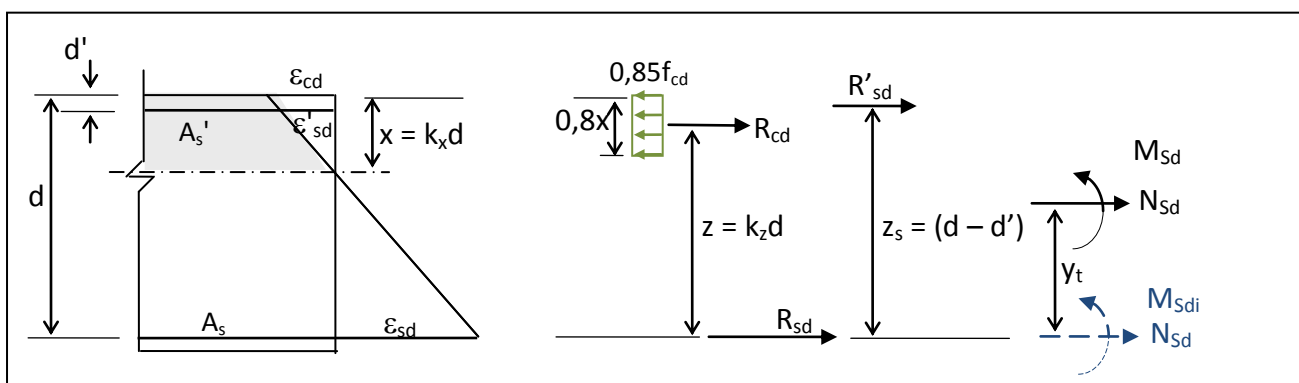


## 4. VERIFICAÇÕES NOS ESTADOS LIMITES

### 4.1. Estado Limite Último de Solicitações Normais

Para a direção X a laje foi armada como sendo de Concreto Armado na região onde não existe armadura de protensão. Na região onde há armadura de protensão foi verificado se a quantidade de cabos existente é suficiente ou se há necessidade de armadura passiva adicional. As áreas de armadura mínima passiva também são avaliadas.

O dimensionamento à flexão-composta com grande excentricidade é apresentado em forma de tabelas e segue a nomenclatura definida na figura 4.1.



**Figura 4.1** – Esquema resistente à Flexão Composta Reta.

As forças  $R_{cd}$  e  $R'_{sd}$  estão indicadas na figura acima com a sua orientação matemática.

Os esforços solicitantes de cálculo normal na seção podem ser obtidos por:

$$N_{sd} = R_{sd} + R_{cd} + R'_{sd}$$

Considerando-se sempre os momentos com os sinais da figura 4.1, os momentos reduzidos ao CG da armadura de tração são obtidos por:

$$M_{sdi} = M_{sd} - N_{sd} * y_t = M_{Rdc} + M_{Rds}$$

$$M_{Rdc} = -R_{cd} * z ; M_{Rds} = -R'_{sd} * z_s$$

Onde:

$N_{sd}, M_{sd}$  - esforços solicitantes de cálculo referidos ao CG da seção;

$N_{sdi}, M_{sdi}$  - esforços solicitantes de cálculo referidos ao CG da armadura de tração;

$R_{cd}$  - resultante de compressão no concreto (para compressão o sinal é negativo);

$R'_{Sd}$  - resultante da armadura de compressão (para compressão o sinal é negativo);

$R_{Sd}$  - resultante da armadura de tração;

$z$  - braço de alavanca interno de  $R_{Cd}$ ;

$z_s$  - braço de alavanca interno de  $R'_{Sd}$ ;

$y_t$  - distância do CG de  $A_s$  ao CG da seção.

$$k_{md} = \min\left(\frac{M_{Sdi}}{b * d^2 * f_{cd}}; k_{md\_lim}\right)$$

$$k_x = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{2 * k_{md}}{0,85}}}{0,8} = x/d$$

$$k_z = (1 - 0,4k_x) = z/d$$

$$M_{Rdc} = k_{md} * b * d^2 * f_{cd}$$

$$M_{Rds} = \text{máximo}(M_{Sdi} - M_{Rdc}; 0)$$

$$R_{Cd} = -M_{Rdc}/z; R'_{Sd} = -M_{Rds}/z_s$$

$$R_{Sd} = N_{Sd} - R_{Cd} - R'_{Sd}$$

As áreas necessárias de armadura passiva são obtidas de:

$$|R_{Sd}| = A_s * \sigma_{Sd} + n * P_i$$

$$|R'_{Sd}| = A'_s * |\sigma'_{Sd}|$$

Onde:

$P_i$  - força de protensão por cabo no estado limite último conforme já descrito no capítulo 2.

A armadura mínima é obtida pela seguinte expressão de acordo com a NBR 6118:

$$\rho_s \geq 0,67\rho_{min} - \rho_p \geq 0,5\rho_{min}$$

Onde:

Para  $f_{ck} = 35 \text{ MPa}$ :

$$\rho_{min} = 0,201$$

$$\rho_s = A_s / (b_w * h)$$

$$\rho_p = A_p / (b_w * h)$$

$A_s$  - área da seção transversal da armadura longitudinal de tração;

$A_p$  - área da seção transversal do cabo de protensão;

$b_w$  e  $h$  - largura e altura da seção considerada, respectivamente;

$\rho_{min}$  - taxa geométrica mínima de armadura longitudinal;

$\rho_p$  - taxa geométrica da armadura de protensão;

$\rho_s$  - taxa geométrica de armadura aderente passiva.

- *Para as seções sobre os apoios:*

hcapitel	0.5 m
d'	0.035 m
d	0.465 m
yi	0.215 m

Os esforços solicitantes  $N_{S_d}$  e  $M_{S_d}$  foram obtidos da combinação das ações  $1,4 * E_g + 1,4 * E_q + 0,9 * Ep_{xx} + 0,9 * Ep_{yy}$  retirando os efeitos isostáticos dos cabos multiplicados por 0,9, onde:

$E_g$  - esforços de cargas permanentes;

$E_q$  - esforços de cargas variáveis;

$Ep_{xx}$  - esforços totais de protensão no sentido xx;

$Ep_{yy}$  - esforços totais de protensão no sentido yy.

Seção	Nsd (kN/m)	Msd (kNm/m)	Msdi (kNm/m)	kmd	kx	kz	MRdc (kNm/m)	MRds (kNm/m)	Rcd (kN/m)	R'sd (kN/m)	Rsd (kN/m)	A's (m <sup>2</sup> /m)
B2	633.80	1358.89	1222.62	0.226	0.395	0.842	1222.62	0.00	-3122.73	0	3756.53	0
B3	395.98	1624.06	1538.92	0.272	0.500	0.800	1470.33	68.59	-3952.5	-159.522	4508.00	0.000367
D2	659.60	1517.84	1376.03	0.255	0.458	0.817	1376.03	0.00	-3623.61	0	4283.21	0
E4	192.77	1869.69	1828.24	0.272	0.500	0.800	1470.33	357.91	-3952.5	-832.359	4977.63	0.001914

O cálculo da armadura de tração é apresentado a seguir.

Seção	Rsd (kN/m)	Pi (kN/cabo)	Cabos necessários/m	Cabos existentes	Faixa (m)	Dirferença/m	Força complementar (kN/m)	As CA-50 (m <sup>2</sup> /m)
B2	3756.53	146.61	26	19	0.80	3	439.83	0.001012
B3	4508.00	146.61	31	20	1.00	11	1612.71	0.003709
D2	4283.21	146.61	30	21	1.00	9	1319.49	0.003035
E4	4977.63	146.61	34	22	1.00	12	1759.32	0.004046

- *Para as seções no vão, sobre a faixa de apoios:*

hlaje	0.26 m
d'	0.035 m
d	0.225 m
yi	0.095 m

Seção	Nsd (kN/m)	Msd (kNm/m)	Msd <sub>i</sub> (kNm/m)	kmd	kx	kz	MR <sub>dc</sub> (kNm/m)	MR <sub>ds</sub> (kNm/m)	R <sub>cd</sub> (kN/m)	R' <sub>sd</sub> (kN/m)	R <sub>sd</sub> (kN/m)	A's (m <sup>2</sup> /m)
Entre C2 e C3	2037.91	395.75	202.15	0.160	0.262	0.895	202.15	0.00	-1003.81	0.00	3041.72	0.000000
Entre B3 e B4	1771.11	324.11	155.85	0.123	0.197	0.921	155.85	0.00	-751.792	0.00	2522.90	0.000000
Entre D2 e D3	1900.50	409.29	228.74	0.181	0.302	0.879	228.74	0.00	-1156.5	0.00	3057.00	0.000000
Entre E3 e E4	1835.22	371.22	196.87	0.156	0.255	0.898	196.87	0.00	-974.256	0.00	2809.48	0.000000

O cálculo da armadura de tração é apresentado a seguir.

Seção	R <sub>sd</sub> (kN/m)	P <sub>i</sub> (kN/cabo)	Cabos necessários/m	Cabos existentes	Faixa (m)	Diferença/m	Força complementar (kN/m)	As CA-50 (m <sup>2</sup> /m)
Entre C2 e C3	3041.72	146.61	21.00	32	1.40	-2	0.00	0.000000
Entre B3 e B4	2522.90	146.61	18.00	23	1.00	-5	0.00	0.000000
Entre D2 e D3	3057.00	146.61	21.00	19	0.80	-3	0.00	0.000000
Entre E3 e E4	2809.48	146.61	20.00	38	1.60	-4	0.00	0.000000

- *Para as seções entre apoios de linhas diferentes:*

As seções entre apoios e nos vãos entre linhas diferentes de pilares foram dimensionadas como Concreto Armado e os esforços normais não foram levados em conta a favor da segurança. Estes trechos não possuem cabos de protensão. Os esforços  $N_{sd}$  e  $M_{sd}$  são obtidos diretamente das combinações das ações.

Seção	Nsd (kN/m)	Msd (kNm/m)	Msdi (kNm/m)	kmd	kx	kz	MRdc (kNm/m)	MRds (kNm/m)	Rcd (kN/m)	R'sd (kN/m)	Rsd (kN/m)	As - tração (m <sup>2</sup> /m)	A's (m <sup>2</sup> /m)
Entre B3 e C3	0.00	-39.67	-39.67	0.031	0.047	0.981	39.67	0.00	-179.688	0.000000	179.69	0.000413	0.000000
Entre D4 e E4	0.00	-161.97	-161.97	0.128	0.205	0.918	161.97	0.00	-784.173	0.000000	784.17	0.001804	0.000000
Entre A4 e B4	0.00	19.34	19.34	0.015	0.023	0.991	19.34	0.00	-86.7424	0.000000	86.74	0.000200	0.000000
Entre D3 e E3	0.00	119.93	119.93	0.095	0.148	0.941	119.93	0.00	-566.594	0.000000	566.59	0.001303	0.000000

- *Para o vão entre os apoios de linhas diferentes:*

Seção	Nsd (kN/m)	Msd (kNm/m)	Msdi (kNm/m)	kmd	kx	kz	MRdc (kNm/m)	MRds (kNm/m)	Rcd (kN/m)	R'sd (kN/m)	Rsd (kN/m)	As - tração (m <sup>2</sup> /m)	A's (m <sup>2</sup> /m)
Entre B2-B3 e C2-C3	0.00	125.65	125.65	0.099	0.156	0.938	125.65	0.00	-595.533	0.00	595.53	0.001370	0.000000
Entre D4-D5 e E4-E5	0.00	36.91	36.91	0.029	0.044	0.983	36.91	0.00	-166.96	0.00	166.96	0.000384	0.000000
Entre a parede 1 e B4-B5	0.00	65.61	65.61	0.052	0.079	0.969	65.61	0.00	-301.08	0.00	301.08	0.000692	0.000000
Entre A2-A3 e B2-B3	0.00	51.64	51.64	0.041	0.062	0.975	51.64	0.00	-235.301	0.00	235.30	0.000541	0.000000

A seguir são mostradas as tabelas das verificações feitas para a direção Y.

Para esta direção os esforços  $N_{s_d}$  e  $M_{s_d}$  foram obtidos das combinações das ações  $1,4 * E_g + 1,4 * E_q + 0,9 * Ep_{xx} + 0,9 * Ep_{yy}$  eliminando os esforços isostáticos de protensão na direção yy multiplicado pelo coeficiente 0,9.

- *Para as seções sobre os apoios:*

Seção	Nsd (kN/m)	Msd (kNm/m)	Msdi (kNm/m)	kmd	kx	kz	MRdc (kNm/m)	MRds (kNm/m)	Rcd (kN/m)	R'sd (kN/m)	Rsd (kN/m)	A's (m <sup>2</sup> /m)
B2	-1213.65	1169.84	1430.77	0.265	0.482	0.807	1430.77	0.00	-3812.381	0	2598.73	0
B3	-1236.80	1534.58	1800.49	0.272	0.500	0.800	1470.33	330.16	-3952.50	-767.8186	3483.52	0.001766
D2	-1260.05	1518.58	1789.49	0.272	0.500	0.800	1470.33	319.16	-3952.50	-742.2343	3434.68	0.001707
E4	-1683.35	1869.45	2231.37	0.272	0.500	0.800	1470.33	761.04	-3952.50	-1769.861	4039.01	0.004071

O cálculo da armadura de tração é apresentado a seguir.

Seção	Rsd (kN/m)	Pi (kN/cabo)	Cabos necessários/m	Cabos existentes	Diferença/m	Força complementar (kN/m)	As CA-50 (m <sup>2</sup> /m)
B2	2598.73	146.61	18.00	2	16.00	2345.76	0.005395
B3	3483.52	146.61	24.00	4	20.00	2932.20	0.006744
B4	3434.68	146.61	24.00	4	20.00	2932.20	0.006744
B5	4039.01	146.61	28.00	5	23.00	3372.03	0.007756



As tabelas das verificações das demais seções da direção Y encontram-se no anexo B.

Com objetivo acadêmico, no final do anexo B encontra-se o exemplo de dimensionamento à flexão de uma seção para o caso do sistema de monocordalha engraxada, sem aderência.

#### 4.2. Estado Limite Último de Punção

As verificações ao puncionamento foram feitas para duas seções consideradas as mais críticas. As verificações estão conforme prescreve a Norma NBR 6118, itens 19.5.2.1, 19.5.3.1 e 19.5.3.2, e as tabelas a seguir mostram tais verificações.

- Para a superfície crítica C:

Seção	Fsd (kN)	dx (m)	dy (m)	d (m)	Largura do pilar (m)	Superfície C ( $u_o$ ) - m	$\tau_{sd}$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\tau_{Rd2}$ (kN/m <sup>2</sup> )	Verificação
Apoio D2	5860.81	0.465	0.45	0.4575	0.75	3	4270.17	5805	Não há ruptura nas bielas
Apoio E4	7661.14	0.465	0.45	0.4575	0.75	3	5581.89	5805	Não há ruptura nas bielas

Onde:

$F_{sd}$  - Força ou reação de punção de cálculo;

$d_x$  e  $d_y$  - são as alturas úteis nas duas direções ortogonais;

$d$  - altura útil da laje ao longo do contorno crítico considerado;

$u_o$  - perímetro do contorno C ao longo dos bordos do pilar;

$\tau_{sd}$  - tensão de cisalhamento solicitante de cálculo;

$\tau_{Rd2}$  - tensão de cisalhamento resistente de cálculo limite para verificação da compressão diagonal do concreto na ligação laje – pilar.

Para a estimativa da altura útil foi utilizada a seguinte equação:

$$d = (d_x + d_y)/2$$

Para a tensão de cisalhamento de cálculo:

$$\tau_{sd} = \frac{F_{sd}}{u_o * d}$$

Para a tensão de cisalhamento resistente no perímetro C:

$$\tau_{Rd2} = 0,27 * \alpha_v * f_{cd}$$

Onde:

$$\alpha_v = (1 - f_{ck}/250)$$

Com  $f_{ck}$  em megapascal.

Os esforços  $F_{Sd}$  foram retirados das combinações das ações  $1,4 * E_g + 1,4 * E_q + 0,9 * Ep_{xx} + 0,9 * Ep_{yy}$ .

- Para a superfície crítica C', referente ao exame da necessidade de armadura transversal, seguem-se os cálculos:

Superfície crítica C'															
Seção	Fsd (kN)	dx (m)	dy (m)	d (m)	Largura do pilar (m)	Superfície C (u) - m	$\tau_{sd}$ (kN/m <sup>2</sup> )	As - X (m <sup>2</sup> )	As - Y (m <sup>2</sup> )	Largura do capitel (m)	$\rho_x$	$\rho_y$	$\rho$	$\tau_{Rd1}$ (kN/m <sup>2</sup> )	Verificação
Apoio D2	5860.81	0.465	0.45	0.4575	0.75	10.32	1241.33	0.004059	0.005628	3.20	0.002537	0.003518	0.077810	1399.76	Não há necessidade de Arm. de punção
Apoio E4	7661.14	0.465	0.45	0.4575	0.75	10.32	1622.64	0.000000	0.005829	4.00	0.000000	0.002915	0.053986	1239.18	Há necessidade de Arm. de punção

Onde:

$u$  – perímetro do contorno C';

$A_s$  (X e Y) - área total de armadura existente na seção e na direção considerada;

$\rho_x$  e  $\rho_y$  - são as taxas de armadura nas duas direções ortogonais igual à dimensão ou área carregada do pilar acrescida de  $3d$  para cada um dos lados;

$\rho$  - taxa geométrica de armadura de flexão aderente;

$\tau_{Rd1}$  - tensão de cisalhamento resistente de cálculo limite, para que a laje possa prescindir de armadura transversal para resistir à força cortante por unidade de comprimento.

Os parâmetros  $\rho$  e  $\tau_{Rd1}$  foram obtidos como segue:

$$\rho = \sqrt{\rho_x + \rho_y}$$

$$\tau_{Rd1} = 0,13 * \left( 1 + \left( \sqrt{20/d} \right) \right) * (100 * \rho * f_{ck})^{1/3}$$

### 4.3. Estado Limite de Abertura de Fissuras

A verificação da fissuração foi feita com o auxílio do programa CRACK3L, preparado por B. Ernani Diaz, que segue as orientações para a determinação de aberturas de fissuras de acordo com o código modelo do CEB 1978.

O programa calcula inicialmente a força normal e o momento de fissuração no Estádio I para os quais a tensão no concreto atinge a resistência a tração. Com a força normal e o momento de fissuração, são calculadas no estágio II as tensões no concreto e no aço. Em seguida são determinadas as tensões no concreto e no aço sob os esforços máximos de serviço no estágio II. Evidencia-se que o programa determina numericamente as tensões no aço para as cargas de utilização no estágio II usando um processo iterativo. Em seguida é seguido o procedimento descrito no CEB 1978 para determinação da abertura de fissuras de peças de concreto armado sujeitas à força normal e momento fletor.

Os dados de entrada fornecidos ao programa são: dados geométricos da seção de concreto, área total de aço, o  $f_{ck}$  do concreto, módulo de elasticidade do aço, relação entre o módulo de elasticidade do aço e o módulo de elasticidade do concreto, cobrimento, espaçamento entre barras, diâmetro da barra adotada, esforço normal e momento atuante no ELS e o tirante fictício calculado conforme mostrado no CEB 1978.

Não foram reduzidas as cargas variáveis nas combinações de esforços, como prevê a Norma NBR 6118, por meio dos fatores  $\psi$ .

As saídas do programa CRACK3L são apresentadas a seguir:

CRACK3 Laje de 0.5m do projeto final de Julio P PAGE 1  
 Laje de 0.5m do projeto final de Julio Pacher 12.5 cada 5cm  
 CALCULATION OF CRACK WIDTH BASED ON THE CEB PRINCIPLES  
 E CONC E STEEL FCTM CRITERION FORC UNT LENGH UNT  
 30000000.210000000. 2800.00 CEB 1978 KN m

DEPTH DATA CON DATA STL  
 .50 1. 1.  
 DATA FOR THE CONCRETE SECTION  
 INIT Y END Y PART AREA NO ELEM  
 .01250 .48750 .02500 20.  
 DATA FOR THE STEEL SECTIONS  
 INIT Y END Y PART AREA NO ELEM  
 .47500 .47500 .00245 1.  
 CONC AREA ST AREA  
 .50000 .00245  
 BEND MOM AXIL FORC POS OF N  
 1246.00 -1499.00 .25

CRACK WIDTH DETERMINATION  
 Y BAR DIAM COVER AS/ACEF BAR SPAC YS YI  
 .4750 .0125 .0200 .02080 .0500 .3800 .5000  
 ABS(YI-YS) IS GREATER THAN (DEPTH-X)/2 IN STATE I

EPL S I	EPL I I	SIG I	EPL S IC	EPL I IC	SIG IC	CRK WIDTH
-.001063	.000820	152477.40	-.000121	.000093	17350.19	
EPL S IIC	EPL I IIC	SIG IIC	EPL S II	EPL I II	SIG S II	.00072
-.000202	.000522	102085.50	-.001777	.004590	897149.80	
K1	K2	B1	B2	SRM	EPLSM	
.40000	.20839	1.00000	.50000	.10009	.004244	
E2	E1	WM				
.003062	.004590	.00042				
BEND MOM	AXIL FORC	POS OF N				
1029.00	-1254.00	.25				

CRACK WIDTH DETERMINATION  
 Y BAR DIAM COVER AS/ACEF BAR SPAC YS YI  
 .4750 .0125 .0200 .02080 .0500 .3800 .5000  
 ABS(YI-YS) IS GREATER THAN (DEPTH-X)/2 IN STATE I

CRACK3 Laje de 0.5m do projeto final de Julio P PAGE 2

EPL S I	EPL I I	SIG I	EPL S IC	EPL I IC	SIG IC	CRK WIDTH
-.000879	.000676	125718.10	-.000121	.000093	17346.76	
EPL S IIC	EPL I IIC	SIG IIC	EPL S II	EPL I II	SIG S II	.00059
-.000202	.000521	101865.60	-.001467	.003778	738255.90	
K1	K2	B1	B2	SRM	EPLSM	
.40000	.20835	1.00000	.50000	.10008	.003482	
E2	E1	WM				
.002519	.003778	.00035				

END OF PROGRAM CRACK3

De acordo com a NBR 6118, tabela 13.3: “Para o concreto protendido nível 1 (protensão parcial):  $w_k \leq 0,2 \text{ mm}$  para pós-tração com CAA I ou II e combinação freqüente.”

Como observa-se na saída do programa, as setas indicam as aberturas das fissuras, o que leva a concluirmos de que a laje não atende ao prescrito na Norma NBR 6118, pois as fissuras são maiores do que as aceitáveis. Entretanto as combinações adotadas estão muito a favor da segurança.

Na saída do programa existem duas verificações de aberturas de fissuras. Foram consideradas duas seções para se ter a certeza de que a laje não atende às exigências normativas. Estas duas seções são sobre os apoios E4 e D2.

#### **4.4. Determinação das flechas da laje**

Foi feito um exame das flechas da laje com o programa SAP.

Verificou-se que as flechas, no canto inferior e à direita da laje do piso, as flechas obtidas foram muito elevadas,

A nossa opinião sobre este problema é que os cabos introduzidos no modelo não correspondem ao projeto desenvolvido na publicação citada.

Com a utilização de um número baixo de cabos nesta região, as flechas obtidas não foram satisfatórias.

Nesta região, também, os esforços obtidos ocasionaram situações inadequadas ao dimensionamento da laje.

## 5. CONCLUSÃO

Este trabalho de final do curso tinha como tema básico o estudo de lajes protendidas. A escolha da laje para desenvolvimento do trabalho de fim de curso foi feita com base numa publicação americana dos autores Bijan O. Aalami e Allan Bommer (*“Design Fundamentals of Post-Tensioned Concrete Floors”* do *Post-Tensioning Institute – Phoenix, Arizona*). Apesar da fôrma irregular da laje escolhida, o projeto parecia simples, pois já existia um anteprojeto do traçado dos cabos de protensão. Entretanto como pôde ser visto e avaliado ao longo do texto, o projeto apresentou vários aspectos que envolveram certo grau de complexidade na análise e no dimensionamento. É de se notar que estes pontos examinados não ficam explícitos nas publicações já apresentadas na literatura nacional sobre o assunto.

Inicialmente deve-se enfatizar que a verificação da laje foi feita supondo uma aderência total para a armadura de protensão.

Mesmo já existindo um anteprojeto da laje, com indicações para se obter as cargas verticais equivalentes dos cabos, foi necessário estudar com cuidado a geometria dos cabos para se definir as características das parábolas do traçado dos cabos, com as suas excentricidades máximas, os pontos de inflexão e analisar as regiões de cruzamento dos cabos nas duas direções. O número de cabos dispostos no anteprojeto não pôde ser definido com grande precisão em vista da documentação existente pouco clara. A irregularidade da distribuição dos pilares e a presença de paredes estruturais aumentaram a complexidade do traçado, obrigando a variação no número dos cabos ao longo das faixas sobre os apoios e a adoção de ancoragens mortas ao longo da laje. A ação da protensão, em cada direção, foi introduzida no modelo SAP através de cargas distribuídas equivalentes e de esforços de extremidade. A irregularidade do traçado se reflete diretamente na definição destes carregamentos de grande complexidade. Sendo o projeto original americano, foram também necessárias adaptações, como o número de cabos e o valor das forças iniciais de protensão, para atender às exigências da NBR6118.

Nas análises efetuadas, por simplificação, não foi considerado um modelo espacial no sentido vertical com a interação da flexão dos pilares e paredes.

Na verificação do estado limite último, nas regiões com armadura ativa, foi imposto descontar dos resultados, obtidos na análise pelo SAP (N, M), a parcela isostática da ação de protensão. Para tanto, foram desenvolvidas planilhas que

permitiram racionalizar a tarefa tanto para avaliação das solicitações, bem como, para a verificação da armadura ativa e o dimensionamento da armadura passiva necessária.

Mostrou-se ser mais interessante aplicar expressões fechadas para as flechas dos traçados dos cabos do que corrigir os problemas de falta de continuidade das tangentes dos traçados por meio de forças concentradas adicionais.

Foram introduzidos no modelo os capitéis conforme indicação da fôrma do projeto apresentado na publicação de B. O. Aalami e A. Bommer. A presença dos capitéis alterou os esforços do modelo SAP preliminar em elementos de casca para a laje lisa, como era previsto. Três alternativas de modelagem da região dos capitéis foram desenvolvidas e estudadas. Inicialmente foi aumentada a espessura da laje simetricamente. Num segundo modelo foi criada uma outra laje no trecho do capitel para baixo com uma união estrutural das duas lajes por meio de *links*. Finalmente no terceiro modelo foi deslocado o plano do capitel para baixo e aumentada a espessura da laje.

O modelo que se mostrou mais adequado foi aquele em que o plano médio da laje foi deslocado para o plano médio da região do engrossamento. O dimensionamento à punção mostrou que, mesmo com a presença de capitéis, é necessário projetar armadura para resistir à punção em alguns casos.

Ficam como sugestões para novos trabalhos: a verificação do estado limite de força cortante; a avaliação das perdas imediatas e diferidas da protensão; a verificação e dimensionamento de armaduras nas regiões de introdução da protensão e principalmente o dimensionamento da laje com armadura de protensão sem aderência.

Interessante, também, seria acrescentar no modelo os pilares e as paredes, estudar a distribuição das forças de membrana, especialmente na direção na qual os cabos estão concentrados na região dos pilares e o estudo da necessidade de armaduras de suspensão ao longo dos bordos da laje.

Outra sugestão ainda seria o desenvolvimento de modelo em elementos de volume para analisar a distribuição das tensões em uma laje com engrossamento na região de capitéis.



Contudo, pode-se concluir ao final desta verificação de que o projeto de uma laje protendida pode conduzir a uma obra simples, de execução rápida, vencendo grandes vãos e com redução do prazo da obra, pois a laje não apresenta vigas. Mas a análise da estrutura deve ser bastante precisa, levando-se em conta várias considerações que são de importância para obter uma verificação cuidadosa e que atenda a todos os aspectos de segurança da estrutura que deve resistir às cargas que atuam sobre a laje com as condições normativas impostas.

## 7 – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABNT NBR 6118:2003; *Projeto de estruturas de concreto – Procedimentos*.

AALAMI, BIJAN O. & BOMMER, ALLAN; *Design Fundamentals of Post-Tensioned Concrete Floor*; PTI, POST-TENSIONING INSTITUTE; *Phoenix, Arizona*, 1999.

CAUDURO, EUGENIO LUIZ; *Manual para a Boa Execução de Estruturas Protendidas Usando Cordoalhas de Aço Engraxadas e Plastificadas*; Belgo, 2ª edição.

COMITE EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON; *Code-modèle CEB-FIP pour les structures em béton*; Paris, 1978.

EMERICK, ALEXANDRE ANOZÉ; *Projetos e execução de Lajes Protendidas*; Editora Interciência, Rio de Janeiro, 2005.

SAP 2000; versão 14.1.0; *Structural Analysis Program*; Computers and Structures, Inc., Berkeley, California.

# **Anexo A**

Tabelas de cargas equivalentes, da correção nos pontos de inflexão e dos efeitos de extremidade dos cabos concentrados sobre as demais linhas dos apoios na direção X.

Para a faixa de apoios B:

FAIXA B - Carga distribuída equivalente									
Trecho da parábola	B1	vão 1	B2	vão 2	B3	vão 3	B4	vão 4	B5
n	19	19	19	19	23	23	23	23	23
b (m)	0.8	0.8	0.8	0.8	1	1	1	1	1
f (m)	-	0.12	0.04	0.155	0.035	0.155	0.035	0.115	0.005
$L_p$ (m)	-	7.65	2.85	7	3	7	3	7.5	1
q (kN/m <sup>2</sup> )	-	42.08	-101.05	64.91	-77.28	62.86	77.28	40.63	99.36

Correção no ponto de inflexão															
Trecho parabólico	B1			vão 1			B2			vão 2			B3		
	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F
z (m)	0	0	0	0	-0.095	0.05	0.05	0.095	0.06	0.06	-0.095	0.06	0.06	0.095	0.06
sen $\alpha$				0.0562		-0.0693	-0.0596		0.0526	0.0886		-0.089	-0.047		0.0467
P *sen $\alpha$ (kN)				-115.3		-142.16	122.4		108	-181.7		-181.7	95.76		95.76
$\Delta P$ (kN)						-19.76			-73.75			-85.99			-124.25

Correção no ponto de inflexão												
Trecho parabólico	vão 3			B4			vão 4			B5		
	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F
z (m)	0.06	-0.095	0.06	0.06	0.095	0.06	0.06	-0.095	-0.02	-0.02	-0.005	0
sen $\alpha$	0.08857		-0.089	-0.047		0.0467	0.072		-0.051	-0.04		0
P *sen $\alpha$ (kN)	-220.01		-220	115.92		115.92	-178.85		-125.9	99.36		0
$\Delta P$ (kN)			-104.09			-62.93			-26.50			0

Força de ancoragem no eixo 1					
Ângulo	3.223	graus	0.056252	rad	
Força total nos cabos	115.3682	kN			
Quantidade de elementos	4				
Força vertical nos nós	28.84204	kN	Metade	14.42102	kN
Força horizontal nos cabos	513	kN	Metade	256.5	kN

Força de ancoragem no eixo 5					
Força total nos cabos	2484	kN			
Quantidade de elementos	5				
Força horizontal	496.8	kN	Metade	248.4	kN

Para a faixa de apoios C:

FAIXA C - Carga distribuída equivalente									
Trecho da parábola	C1	vão 1	C2	vão 2	C3	vão 3	C4	vão 4	C5
n	32	32	32	32	32	42	22	22	22
b (m)	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4	1.8	1	1	1
f (m)	-	0.117	0.043	0.145	0.012	-	0.002	0.115	0.005
$L_p$ (m)	-	4.25	2.4	7.7	1.65	-	1.5	7.5	1
q (kN/m <sup>2</sup> )	-	127.92	-147.43	48.30	-87.046	-	16.90	38.86	95.04

Correção no ponto de inflexão															
Trecho parabólico	C1			vão 1			C2			vão 2			C3		
	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F
z (m)	0	0	0	0	-0.095	0.045	0.045	0.095	0.06	0.06	-0.095	0.04	0.04	0.08	0.095
sen $\alpha$				0.1		-0.1212	-0.0771		0.06458	0.0779		-0.0727	-0.0636		-0.003
P *sen $\alpha$ (kN)				-345.6		-418.79	266.4		223.2	-269.3		-251.35	219.93		-13.745
$\Delta P$ (kN)						-152.39			-46.10			-31.42			

Correção no ponto de inflexão												
Trecho parabólico	vão 3			C4			vão 4			C5		
	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F
z (m)	0.095	0.095	0.095	0.095	0.08	0.06	0.06	-0.095	-0.02	-0.02	-0.005	0
sen $\alpha$				0.01667		0.03	0.072		-0.0507	-0.04		0
P *sen $\alpha$ (kN)				-75.6		71.28	-171.07		-120.38	95.04		0
$\Delta P$ (kN)						-99.79			-25.34			0

Força de ancoragem no eixo 1					
Ângulo	5.711	graus	0.099676	rad	
Força total nos cabos	343.9093	kN			
Quantidade de elementos	7				
Força vertical nos nós	49.1299	kN	Metade	24.56495	kN
Força horizontal nos cabos	493.7143	kN	Metade	246.8571	kN

Força de ancoragem no eixo 5					
Força total nos cabos	2376	kN			
Quantidade de elementos	5				
Força horizontal	475.2	kN	Metade	237.6	kN

Para a faixa de apoios D:

FAIXA D - Carga distribuída equivalente									
P	108	kN							
Trecho da parábola	D1	vão 1	D2	vão 2	D3	vão 3	D4	vão 4	D5
n	19	19	19	19	19	19	19	19	19
b (m)	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8
f (m)	-	0.12	0.04	0.155	0.035	0.155	0.035	0.115	0.005
L <sub>p</sub> (m)	-	7.65	2.85	7	3	7	3	7.5	1
q (kN/m <sup>2</sup> )	-	42.08	-101.05	64.91	-79.8	64.91	-79.8	41.95	-102.6

Correção no ponto de inflexão															
Trecho parabólico	D1			vão 1			D2			vão 2			D3		
	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F
z (m)	0	0	0	0	-0.095	0.05	0.05	0.095	0.06	0.06	-0.095	0.06	0.06	0.095	0.06
sen α				0.0562		-0.069	-0.06		0.0526	0.0886		-0.089	-0.047		0.047
P *sen α (kN)				-115.3		-142.2	122.4		108	-181.7		-181.7	95.76		95.76
ΔP (kN)						-19.76			-73.75			-85.99			-85.99

Correção no ponto de inflexão												
Trecho parabólico	vão 3			D4			vão 4			D5		
	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F
z (m)	0.06	-0.095	0.06	0.06	0.095	0.06	0.06	-0.095	-0.02	-0.02	-0.005	0
sen α	0.0886		-0.089	-0.047		0.0467	0.072		-0.051	-0.04		0
P *sen α (kN)	-181.7		-181.7	95.76		95.76	-147.7		-104	82.08		0
ΔP (kN)			-85.99			-51.98			-21.89			0

Força de ancoragem no eixo 1						
Ângulo	3.217	graus	0.056147	rad		
Força total no cabos		115.1536	kN			
Quantidade de elementos		4				
Força vertical nos nós		28.7884	kN	Metade	14.3942	kN
Força horizontal nos cabos		513	kN	Metade	256.5	kN

Força de ancoragem no eixo 5					
Força total nos cabos	2052	kN			
Quantidade de elementos	4				
Força horizontal	513	kN	Metade	256.5	kN

Para a faixa de apoios E:

FAIXA E - Carga distribuída equivalente									
P	108	kN							
Trecho da parábola	E1	vão 1	E2	vão 2	E3	vão 3	E4	vão 4	E5
n	18	18	18	18	18	38	38	38	38
b (m)	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	1.6	1.6	1.6	1.6
f (m)	-	0.115	0.045	0.15	0.04	0.155	0.035	0.11	0.0075
L <sub>p</sub> (m)	-	4.25	2.1	6.3	3.3	9.1	3.6	7.9	2.45
q (kN/m <sup>2</sup> )	-	123.77	-198.37	73.47	-71.40	38.41	-55.42	36.17	-25.64

Correção no ponto de inflexão															
Trecho parabólico	E1			vão 1			E2			vão 2			E3		
	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F
z (m)	0	0	0	0	-0.095	0.04	0.04	0.095	0.06	0.06	-0.095	0.05	0.05	0.095	0.06
sen α				0.09882		-0.1176	-0.0952		0.07619	0.09683		-0.0937	-0.0515		0.04545
P *sen α (kN)				-192.113		-228.71	185.143		148.114	-188.23		-182.06	100.145		186.545
ΔP (kN)						-43.56			-40.11			-81.91			-93.07

Correção no ponto de inflexão												
Trecho parabólico	vão 3			E4			vão 4			E5		
	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F
z (m)	0.06	-0.095	0.06	0.06	0.095	0.06	0.06	-0.095	-0.03	-0.03	-0.0075	0
sen α	0.0681		-0.0681	-0.03889		0.03889	0.06709		-0.0443	-0.0245		0
P *sen α (kN)	-279.61		-279.61	159.6		159.6	-275.33		-181.82	100.506		0
ΔP (kN)			-120.01			-115.73			-81.32			0

Força de ancoragem no eixo 1					
Ângulo	5.644	graus	0.098506	rad	
Força total nos cabos		191.1869	kN		
Quantidade de elementos		4			
Força vertical nos nós		47.79672	kN	Metade	23.89836 kN
Força horizontal nos cabos		486	kN	Metade	243 kN

Força de ancoragem no eixo 5					
Força nas cordoalhas		4104	kN		
Quantidade de elementos		8			
Força horizontal		513	kN	Metade	256.5 kN

Para a faixa de apoio G:

FAIXA E - Carga distribuída equivalente			
P	108 kN		
Trecho da parábola	E1	vão 1	E2
n	20	20	20
b (m)	0.8	0.8	0.8
f (m)	-	0.125	0.0087
L <sub>p</sub> (m)	-	8.5	1.5
q (kN/m <sup>2</sup> )	-	37.37	-83.52

Correção no ponto de inflexão									
Trecho parabólico	E1			vão 1			E2		
	I	M	F	I	M	F	I	M	F
z (m)	0	0	0	0	-0.095	0.06	0.06	0.0862	0.095
sen α				0.05176		-0.0659	-0.0465		-0.0001
P * sen α (kN)				-111.812		-142.31	100.512		-0.288
ΔP (kN)						-41.79			-0.29

Força de ancoragem na parede 4						
Ângulo	2.963	graus	0.051714	rad		
Força total nos cabos		111.6527	kN			
Quantidade de elementos		4				
Força vertical nos nós		27.91317	kN	Metade	13.95659	kN
Força horizontal nos cabos		540	kN	Metade	270	kN

Na ancoragem do eixo 5, os cabos estão com excentricidade máxima positiva, as quais, além das forças horizontais e verticais provocaram momentos devidos à excentricidade.

Força de ancoragem no eixo 5						
Força total nos cabos	2160	kN				
Quantidade de elementos	4					
Força horizontal	540	kN	Metade	270	kN	
Momento total	205.2	kNm				
Momento nos nós	51.3	kNm	Metade	25.65	kNm	



A seguir são mostradas as tabelas de cargas equivalentes, correção das forças nos pontos de inflexão e forças nas ancoragens, correspondentes às posições dos cabos nas extremidades.

Para a Faixa 2:

Faixa 2 - Carga distribuída equivalente											
Trecho da parábola	Apoio 1	vão 1	Apoio 2	vão 2	Apoio 3	vão 3	Apoio 4	vão 4	Apoio 5	vão 5	Apoio 6
n	30	30	30	30	18	18	18	18	18	18	18
b (m)	9.4	9.4	9.4	9.4	9.4	9.4	9.4	9.4	9.4	9.4	9.4
f (m)	-	0.11	0.0525	0.14	0.0575	0.137	0.0575	0.13	0.055	0.097	0.0088
$L_p$ (m)	-	4.56	2.25	6.75	2.94	7	2.7	5.6	2.25	4.9	1.74
q (kN/m <sup>2</sup> )	-	14.59	28.60	8.47	11.01	4.63	13.05	6.86	17.97	6.68	4.81

Para 18 cabos de extremo a extremo temos que  $P = 1944 \text{ kN}$  e:

Correção no ponto de inflexão															
Trecho parabólico	Apoio 1			vão 1			Apoio 2			vão 2			Apoio 3		
	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F
z (m)	0	0	0	0	-0.095	0.03	0.03	0.095	0.055	0.055	-0.095	0.035	0.035	0.095	0.04
sen $\alpha$				0.0899		-0.1031	-0.10444		0.08222	0.08593		-0.08	-0.0799		0.07653
P *sen $\alpha$ (kN)				-174.79		-200.37	203.04		159.84	-167.04		-155.52	155.39		148.78
$\Delta P$ (kN)						2.67			-7.20			-0.13			-2.58

Correção no ponto de inflexão																		
Trecho parabólico	vão 3			Apoio 4			vão 4			Apoio 5			vão 5			Apoio 6		
	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F
z (m)	0.04	-0.095	0.045	0.045	0.095	0.03	0.03	-0.095	0.04	0.04	0.095	0.04	0.04	-0.095	-0.045	-0.045	-0.0113	0
sen $\alpha$	0.07786		-0.07929	-0.0796		0.09074	0.09107		-0.0946	-0.0978		0.09778	0.09286		-0.05816	-0.05172		0
P *sen $\alpha$ (kN)	-151.35		-154.13	154.8		176.4	-177.04		-183.99	190.08		190.08	-180.51		-113.07	100.552		0
$\Delta P$ (kN)			0.67			-0.64			6.09			9.57			-12.52			0.00

Para os 12 cabos adicionais observa-se que  $P = 1296 \text{ kN}$ :

Correção no ponto de inflexão															
Trecho parabólico	Apoio 1			vão 1			Apoio 2			vão 2			Apoio 3		
	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F
z (m)	0	0	0	0	-0.095	0.03	0.03	0.095	0.055	0.055	-0.095	-0.035	-0.035	-0.0088	0
sen $\alpha$				0.0899		-0.1031	-0.10444		0.08222	0.07556		-0.0489	-0.0476		0
P *sen $\alpha$ (kN)				-116.53		-133.58	135.36		106.56	-97.92		-63.36	61.71		0.00
$\Delta P$ (kN)						1.78			8.64			-1.65			0.00

O total das forças de correção nos pontos de inflexão é resumido a seguir:

	vão 1 - Apoio 2	Apoio 2 - vão 2	vão 2 - Apoio 3	Apoio 3 - vão 3	vão 3 - Apoio 4	Apoio 4 - vão 4	vão 4 - Apoio 5	Apoio 5 - vão 5	vão 5 - Apoio 6
$\Delta P$ (kN)	4.45	1.44	-1.78	-2.58	0.67	-0.64	6.09	9.57	-12.52

Força de ancoragem no eixo F				
Força nos cabos	1296	kN		
Numero de quadrados	47			
Força horizontal	27.57	kN	Metade	13.78723 kN

Força de ancoragem no eixo A				
Força nos cabos	1296	kN		
Numero de quadrados	47			
Força horizontal	27.57	kN	Metade	13.79 kN

Para a Faixa 3:

Faixa 3 - Carga distribuída equivalente											
Trecho da parábola	Apoio 1	vão 1	Apoio 2	vão 2	Apoio 3	vão 3	Apoio 4	vão 4	Apoio 5	vão 5	Apoio 6
n	23	23	23	23	23	17	17	17	17	17	17
b (m)	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
f (m)	-	0.105	0.055	0.1425	0.0123	0	0.016	0.1375	0.055	0.095	0.0088
$L_p$ (m)	-	3.72	2.26	7.42	2.74	5.32	2.7	7.28	2.72	5.43	1.68
q (kN/m <sup>2</sup> )	-	30.16	42.80	10.29	6.51	0.00	6.45	7.62	21.84	9.46	9.16

Para 17 cabos de extremidade verifica-se que  $P = 1836 \text{ kN}$ :

Correção no ponto de inflexão															
Trecho parabólico	Apoio 1			vão 1			Apoio 2			vão 2			Apoio 3		
	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F
z (m)	0	0	0	0	-0.095	0.02	0.02	0.095	0.06	0.06	-0.095	0.015	0.015	0.0773	0.095
sen $\alpha$				0.10753		-0.1183	-0.115		0.07965	0.07749		-0.0654	-0.0618		0.00336
$P \cdot \text{sen } \alpha$ (kN)				-197.42		-217.16	211.221		146.23	-142.28		-120.01	113.38		6.16
$\Delta P$ (kN)						-5.94			3.95			-6.63			6.16

Correção no ponto de inflexão																		
Trecho parabólico	vão 3			Apoio 4			vão 4			Apoio 5			vão 5			Apoio 6		
	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F
z (m)	0.095	0.095	0.095	0.095	0.0835	0.02	0.02	-0.095	0.045	0.045	0.095	0.035	0.035	-0.095	-0.045	-0.045	-0.0113	0
sen $\alpha$	0		0	-0.0107		0.0663	0.06662		-0.0735	-0.0772		0.08456	0.08103		-0.0516	-0.0536		0
$P \cdot \text{sen } \alpha$ (kN)	0.00		0.00	19.72		121.72	-122.32		-134.93	141.75		155.25	-148.77		-94.67	98.3571		0
$\Delta P$ (kN)						-0.60			6.82			6.48			3.68			0.00

Para os 6 cabos adicionais o valor da força é  $P = 648 \text{ kN}$ :

Correção no ponto de inflexão															
Trecho parabólico	Apoio 1			vão 1			Apoio 2			vão 2			Apoio 3		
	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F
z (m)	0	0	0	0	-0.095	0.02	0.02	0.095	0.065	0.065	-0.095	-0.035	-0.035	-0.0088	0
sen $\alpha$				0.10753		-0.1183	-0.1128		0.07301	0.07278		-0.0458	-0.0255		0
P *sen $\alpha$ (kN)				-69.68		-76.65	73.12		47.31	-47.16		-29.69	16.55		0.00
$\Delta P$ (kN)						-3.53			0.15			-13.14			0.00

As forças de correção nos pontos de inflexão são resumidas a seguir:

	vão 1 - Apoio 2	Apoio 2 - vão 2	vão 2 - Apoio 3	Apoio 3 - vão 3	vão 3 - Apoio 4	Apoio 4 - vão 4	vão 4 - Apoio 5	Apoio 5 - vão 5	vão 5 - Apoio 6
$\Delta P$ (kN)	-9.47	4.10	-19.77	6.16	0.00	-0.60	6.82	6.48	3.68

Força de ancoragem no eixo A				
Força total nos cabo	1836	kN		
Quantidade de elementos	25			
Força horizontal total	73.44	kN	Metade	36.72 kN

Força de ancoragem no eixo F				
Força total nos cabo	2484	kN		
Quantidade de elementos	25			
Força horizontal total	99.36	kN	Metade	49.68 kN

Para a faixa 4:

A faixa 4 foi dividida em dois trechos, um à direita e outro à esquerda, decorrente da abertura existente na laje, conforme mostra a figura 3.5.

Faixa 4 - Carga distribuída equivalente (à esquerda da abertura)					
Trecho da parábola	Apoio 1	vão 1	Apoio 2	vão 2	Apoio 3
n	24	24	24	24	24
b (m)	5	5	5	5	5
f (m)	-	0.1225	0.0085	0.0955	0.0123
$L_p$ (m)	-	10.33	3.34	7.11	1.52
q (kN/m <sup>2</sup> )	-	4.76	3.16	7.83	22.08

Para 24 cabos à esquerda da abertura temos  $P = 2592 \text{ kN}$ :

Correção no ponto de inflexão															
Trecho parabólico	Apoio 1			vão 1			Apoio 2			vão 2			Apoio 3		
	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F
z (m)	0	0	0	0	-0.095	0.055	0.055	0.095	0.035	0.035	-0.095	-0.034	-0.034	-0.0085	0
sen $\alpha$				0.04211		-0.05276	-0.05389		0.065868	0.063432		-0.04402	-0.04474		0
P *sen $\alpha$ (kN)				-109.15		-136.75	139.69		170.73	-164.42		-114.11	115.96		0.00
$\Delta P$ (kN)						2.94			6.32			1.85			0.00

Força na ancoragem esquerda					
Força total nos cabos	2592	kN			
Quantidade de elementos	25				
Força horizontal	103.68	kN	Metade	51.84	kN

Força na ancoragem direita					
Força total nos cabos	2592	kN			
Quantidade de elementos	25				
Força horizontal	103.68	kN	Metade	51.84	kN

Faixa 4 - Carga distribuída equivalente (à direita da abertura)					
Trecho da parábola	Apoio 4	vão 4	Apoio 5	vão 5	Apoio 6
n	15	15	15	15	15
b (m)	5	5	5	5	5
f (m)	-	0.1225	0.0475	0.0975	0.0087
$L_p$ (m)	-	8.1	2.74	6.12	1.98
q (kN/m <sup>2</sup> )	-	4.84	16.40	6.75	5.75

Para 15 cabos à direita da abertura temos  $P = 1620 \text{ kN}$  e:

Correção no ponto de inflexão															
Trecho parabólico	Apoio 4			vão 4			Apoio 5			vão 5			Apoio 6		
	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F
z (m)	0	0	0	0	-0.095	0.055	0.055	0.095	0.04	0.04	-0.095	-0.035	-0.035	-0.00875	0
sen $\alpha$				0.053704		-0.06728	-0.06387		0.074818	0.07598		-0.05147	-0.03535		0
P*sen $\alpha$ (kN)				-87.00		-109.00	103.47		121.20	-123.09		-83.38	57.27		0.00
$\Delta P$ (kN)						-5.53			-1.88			-26.11			0.00

Força na ancoragem esquerda					
Força total nos cabos	1620	kN			
Quantidade de elementos	25				
Força horizontal	64.8	kN	Metade	32.4	kN

Força na ancoragem direita					
Força total nos cabos	1620	kN			
Quantidade de elementos	25				
Força horizontal	64.8	kN	Metade	32.4	kN

Para a faixa 5:

Faixa 5 - Carga distribuída equivalente (à esquerda da abertura)						
Trecho da parábola	Apoio 1	vão 1	Apoio 2	vão 2	Apoio 3	vão 3
n	24	24	24	24	24	24
b (m)	5	5	5	5	5	5
f (m)	-	0.125	0.0525	0.1292	0.0325	0.02
$L_p$ (m)	-	11.05	3.3	6.3	1.97	3.48
q (kN/m <sup>2</sup> )	-	4.25	19.99	13.50	34.73	6.85

Para 24 cabos à esquerda da abertura temos  $P = 2592 \text{ kN}$  e:



Correção no ponto de inflexão																		
Trecho parabólico	Apoio 1			vão 1			Apoio 2			vão 2			Apoio 3			vão 3		
	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F
z (m)	0	0	0	0	-0.095	0.06	0.06	0.095	0.025	0.025	-0.093	0.045	0.045	0.095	0.08	0.08	0.02	0
sen $\alpha$				0.03982		-0.0507	-0.053		0.07424	0.0781		-0.0844	-0.0838		0.04822	0.04598		0
P*sen $\alpha$ (kN)				-103.21		-131.36	137.45		192.44	-202.42		-218.88	217.10		124.99	-119.17		0.00
$\Delta P$ (kN)						6.10			-9.99			-1.78			5.82			0.00

Força na ancoragem esquerda				
Força total nos cabos	2592	kN		
Quantidade de elementos	25			
Força horizontal	103.68	kN	Metade	51.84 kN

Força na ancoragem direita				
Força nos cabos	2592	kN		
Quantidade de elementos	25			
Força horizontal	103.68	kN	Metade	51.84 kN

Faixa 5 - Carga distribuída equivalente (à direita da abertura)					
Trecho da parábola	Apoio 4	vão 4	Apoio 5	vão 5	Apoio 6
n	24	24	24	24	24
b (m)	5	5	5	5	5
f (m)	-	0.1089	0.0648	0.0977	0.005
L <sub>p</sub> (m)	-	5.77	2.6	7.33	1.58
q (kN/m <sup>2</sup> )	-	13.57	39.75	7.54	8.31

Para 24 cabos à direita da abertura temos  $P = 2592 \text{ kN}$  e:

Correção no ponto de inflexão															
Trecho parabólico	Apoio 4			vão 4			Apoio 5			vão 5			Apoio 6		
	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F
z (m)	0	0	0	0	-0.095	0.035	0.035	0.095	0.055	0.055	-0.095	-0.035	-0.035	-0.0088	0
sen $\alpha$				0.07192		-0.0841	-0.0846		0.06923	0.06958		-0.045	-0.0443		0
P *sen $\alpha$ (kN)				-186.43		-217.87	219.32		179.45	-180.34		-116.69	114.84		0.00
$\Delta P$ (kN)						1.45			-0.90			-1.86			0.00

Força na ancoragem esquerda					
Força nos cabos	2592	kN			
Quantidade de elementos	25				
Força horizontal	103.68	kN	Metade	51.84	kN

Força na ancoragem direita					
Força nos cabos	2592	kN			
Quantidade de elementos	25				
Força horizontal	103.68	kN	Metade	51.84	kN

Para a faixa 6:

Faixa 6 - Carga distribuída equivalente											
Trecho da parábola	Apoio 1	vão 1	Apoio 2	vão 2	Apoio 3	vão 3	Apoio 4	vão 4	Apoio 5	vão 5	Apoio 6
n	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
b (m)	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
f (m)	-	0.125	0.05	0.1175	0.0238	0	0	0	0.0108	0.1375	0.0726
$L_p$ (m)	-	10.4	3.3	6.86	2.71	5.77	2.38	5.33	2.66	7.02	3.02
q (kN/m <sup>2</sup> )	-	3.59	14.28	7.77	10.08	0.00	0.00	0.00	4.75	8.68	24.76

Correção no ponto de inflexão															
Trecho parabólico	Apoio 1			vão 1			Apoio 2			vão 2			Apoio 3		
	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F
z (m)	0	0	0	0	-0.095	0.06	0.06	0.095	0.03	0.03	-0.095	0.015	0.015	0.0788	0.095
sen $\alpha$				0.0423		-0.054	-0.052		0.0697	0.0707		-0.0663	-0.0646		0.00561
P*sen $\alpha$ (kN)				-82.25		-104.68	100.15		135.491	-137.44		-128.94	125.68		10.90
$\Delta P$ (kN)						-4.53			-1.95			-3.26			10.90

Correção no ponto de inflexão																		
Trecho parabólico	vão 3			Apoio 4			vão 4			Apoio 5			vão 5			Apoio 6		
	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F
z (m)	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.0783	0.015	0.015	-0.095	0.05	0.05	0.095	0
sen $\alpha$	0		0	0		0	0		0	-0.005		0.06511	0.06766		-0.0776	-0.0762		0.10927
P*sen $\alpha$ (kN)	0		0	0.00		0.00	0		0	9.65		126.58	-131.54		-150.92	148.05		212.42
$\Delta P$ (kN)			0.00			0.00			0.00			-4.96			-2.87			212.42

Força na ancoragem esquerda					
Ângulo	5	graus	0.087266	rad	
Força total nos cabos	169.4308	kN			
Quantidade de elementos	25				
Força vertical nos nós	6.777231	kN	Metade	3.388615	kN
Força horizontal	77.76	kN	Metade	38.88	kN

Força na ancoragem direita					
Ângulo	5	graus	0.087266	rad	
Força total nos cabos	169.4308	kN			
Quantidade de elementos	25				
Força vertical nos nós	6.777231	kN	Metade	3.388615	kN
Força horizontal	77.76	kN	Metade	38.88	kN

Para a faixa 7:

Faixa 7 - Carga distribuída equivalente											
Trecho da parábola	Apoio 1	vão 1	Apoio 2	vão 2	Apoio 3	vão 3	Apoio 4	vão 4	Apoio 5	vão 5	Apoio 6
n	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
b (m)	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
f (m)	-	0.1225	0.0515	0.132	0.0575	0.1315	0.0575	0.1325	0.0575	0.129	0.0785
$L_p$ (m)	-	9.66	3.31	7.42	3.02	6.61	2.76	6.23	2.53	5.23	3.00
q (kN/m <sup>2</sup> )	-	4.08	14.62	7.46	19.61	9.36	23.48	10.62	27.94	14.67	27.13

Correção no ponto de inflexão															
Trecho parabólico	Apoio 1			vão 1			Apoio 2			vão 2			Apoio 3		
	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F
z (m)	0	0	0	0	-0.095	0.055	0.055	0.095	0.032	0.032	-0.095	0.042	0.042	0.095	0.033
sen $\alpha$				0.04503		-0.0564	-0.0553		0.06918	0.06981		-0.07251	-0.0732		0.07914
P *sen $\alpha$ (kN)				-87.54		-109.68	107.478		134.494	-135.71		-140.95	142.26		153.85
$\Delta P$ (kN)						-2.20			-1.22			1.31			1.21

Correção no ponto de inflexão																		
Trecho parabólico	vão 3			Apoio 4			vão 4			Apoio 5			vão 5			Apoio 6		
	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F	I	M	F
z (m)	0.033	-0.095	0.04	0.04	0.095	0.035	0.035	-0.095	0.042	0.042	0.095	0.032	0.032	-0.095	0.03	0.03	0.095	0
sen $\alpha$	0.07852		-0.0806	-0.0815		0.08514	0.08459		-0.0868	-0.0877		0.09565	0.09675		-0.096	-0.0967		0.11667
P *sen $\alpha$ (kN)	-152.64		-156.76	158.48		165.52	-164.44		-168.81	170.58		185.95	-188.08		-186.59	187.92		226.80
$\Delta P$ (kN)			1.72			1.08			1.77			-2.13			1.33			226.80

Força na ancoragem esquerda					
Ângulo	5	graus	0.087266	rad	
Força total nos cabos	169.4308	kN			
Quantidade de elementos	25				
Força vertical nos nós	6.777231	kN	Metade	3.388615	kN
Força horizontal	77.76	kN	Metade	38.88	kN

Força na ancoragem direita					
Ângulo	5	graus	0.087266	rad	
Força total nos cabos	169.4308	kN			
Quantidade de elementos	25				
Força vertical nos nós	6.777231	kN	Metade	3.388615	kN
Força horizontal	77.76	kN	Metade	38.88	kN

# **Anexo B**

As demais verificações para a direção Y estão mostradas a seguir.

- *Para as seções entre os apoios da mesma linha:*

Seção	Nsd (kN/m)	Msd (kNm/m)	Msdi (kNm/m)	kmd	kx	kz	MRdc (kNm/m)	MRds (kNm/m)	Rcd (kN/m)	R'sd (kN/m)	Rsd (kN/m)	A's (m <sup>2</sup> /m)
Entre E4 e E5	0.00	-78.46	-78.46	0.062	0.095	0.962	78.46	0.00	-362.45	0.00	362.45	0.000000
Entre B3 e B4	0.00	-129.8	-129.80	0.103	0.161	0.936	129.80	0.00	-616.65	0.00	616.65	0.000000
Entre D2 e D3	0.00	-101.15	-101.15	0.080	0.124	0.951	101.15	0.00	-472.95	0.00	472.95	0.000000
Entre E3 e E4	0.00	6.46	6.46	0.005	0.008	0.997	6.46	0.00	-28.80	0.00	28.80	0.000000

O cálculo da armadura de tração é apresentado a seguir.

Seção	Rsd (kN/m)	Pi (kN/cabo)	Cabos necessários/m	Cabos existentes	Diferença/m	Força complementar (kN/m)	As CA-50 (m <sup>2</sup> /m)
Entre E4 e E5	362.45	146.61	3.00	4	0.00	0.00	0.000000
Entre B3 e B4	616.65	146.61	5.00	5	0.00	0.00	0.000000
Entre D2 e D3	472.95	146.61	4.00	4	0.00	0.00	0.000000
Entre E3 e E4	28.80	146.61	1.00	5	0.00	0.00	0.000000

- *Para as seções entre os apoios de linhas diferentes:*

Seção	Nsd (kN/m)	Msd (kNm/m)	Msdi (kNm/m)	kmd	kx	kz	MRdc (kNm/m)	MRds (kNm/m)	Rcd (kN/m)	R'sd (kN/m)	Rsd (kN/m)	A's (m <sup>2</sup> /m)
Entre D4 - E4	0.00	57.20	57.20	0.045	0.068	0.973	57.20	0.00	-261.37	0.00	261.37	0.000000
Entre A4 - B4	0.00	213.44	213.44	0.169	0.279	0.888	213.44	0.00	-1067.88	0.00	1067.88	0.000000
Entre D3 - E3	0.00	242.76	242.76	0.192	0.324	0.870	242.76	0.00	-1239.63	0.00	1239.63	0.000000
Entre C2 - D2	0.00	125.89	125.89	0.099	0.156	0.938	125.89	0.00	-596.75	0.00	596.75	0.000000



O cálculo da armadura de tração é apresentado a seguir.

Seção	Rsd (kN/m)	Pi (kN/cabo)	Cabos necessários/m	Cabos existentes	Dirferença/m	Força complementar (kN/m)	As CA-50 (m <sup>2</sup> /m)
Entre D4 - E4	261.37	146.61	2.00	4	0.00	0.00	0.000000
Entre A4 - B4	1067.88	146.61	8.00	4	4.00	586.44	0.001349
Entre D3 - E3	1239.63	146.61	9.00	5	4.00	586.44	0.001349
Entre C2 - D2	596.75	146.61	5.00	2	3.00	439.83	0.001012

- *Para o vão entre os apoios de linhas diferentes:*

Seção	Nsd (kN/m)	Msd (kNm/m)	Msdi (kNm/m)	kmd	kx	kz	MRdc (kNm/m)	MRds (kNm/m)	Rcd (kN/m)	R'sd (kN/m)	Rsd (kN/m)	A's (m <sup>2</sup> /m)
Entre E4-E5 e D4-D5	0.00	89.79	89.79	0.071	0.109	0.956	89.79	0.00	-417.28	0.00	417.28	0.000000
Entre C2-C3 e D2-D3	0.00	84.94	84.94	0.067	0.103	0.959	84.94	0.00	-393.72	0.00	393.72	0.000000
Entre A4-A5 e B4-B5	0.00	96.89	96.89	0.077	0.118	0.953	96.89	0.00	-451.99	0.00	451.99	0.000000
Entre E4-E5 e a parede 5	0.00	362.23	362.23	0.272	0.500	0.800	344.25	17.98	-1912.50	-94.63	2007.13	0.000218

O cálculo da armadura de tração é apresentado a seguir.

Seção	Rsd (kN/m)	Pi (kN/cabo)	Cabos necessários/m	Cabos existentes	Dirferença/m	Força complementar (kN/m)	As CA-50 (m <sup>2</sup> /m)
Entre E4-E5 e D4-D5	417.28	146.61	3.00	4	0.00	0.00	0.000000
Entre C2-C3 e D2-D3	393.72	146.61	3.00	4	0.00	0.00	0.000000
Entre A4-A5 e B4-B5	451.99	146.61	4.00	4	0.00	0.00	0.000000
Entre E4-E5 e a parede 5	2007.13	146.61	14.00	4	10.00	1466.10	0.003372

## Dimensionamento de uma seção sem aderência

Para o caso de protensão não aderente, os cabos utilizados são monocordoalhas engraxadas e plastificadas com material de PEAD, polietileno de alta densidade, extremamente resistente, extrudado diretamente sobre a cordoalha já engraxada em toda a sua extensão, o que permite a livre movimentação da cordoalha no seu interior.

O dimensionamento com armadura de protensão não aderente é mostrado como segue e as equações utilizadas para determinação dos esforços da seção, conforme mostra a figura 4.1, foram as mesmas que as utilizadas para o dimensionamento com aderência.

- *Força de protensão por cordoalha*

$$P_i = \text{área}_{1\text{cabo}} * \sigma_i$$

De acordo com a Norma NBR 6118:

$$\sigma_i = \text{mínimo} (0,74 * f_{ptk}; 0,82 * f_{pyk})$$

Considerando uma perda total no tempo de 15% a força de protensão, no tempo infinito, será:

$$P_\infty = 0,85 * P_i \cong 115 \text{ kN}$$

- ❖ *Para a direção X:*

Seção	Nsd (kN/m)	Msd (kNm/m)	Msdi (kNm/m)	kmd	kx	kz	MRdc (kNm/m)	MRds (kNm/m)	Rcd (kN)	R'sd (kN)	Rsd (kN)	A's (m <sup>2</sup> /m)
B2	-1213.65	1169.84	1430.77	0.265	0.482	0.807	1430.77	0.00	-3812.38	0	2598.73	0

Para o cálculo da armadura de tração a Norma NBR 6118, item 17.2.2, estabelece que: “Para armaduras ativas não aderentes, na falta de valores experimentais e de análises não-lineares adequadas, os valores do acréscimo das tensões para estruturas usuais de edifícios estão apresentados a seguir.”

Para elementos com relação vão/altura útil maior que 35 (que é o nosso caso) temos que:

$$\Delta\sigma_p = 70 + f_{ck}/300\rho_p$$

Onde a expressão acima é expressa em MPa e:

$$\rho_p = \frac{A_p}{b_c * d_p}$$

Onde:

$\Delta\sigma_p$  e  $f_{ck}$  - são definidos em megapascal;

$\rho_p$  - é a taxa geométrica da armadura ativa;

$b_c$  - é a largura da mesa de compressão;

$d_p$  - é a altura útil referida à armadura ativa.

	Rsd (kN)	Cabos existentes	Área de 1 cabo (m <sup>2</sup> )	Ap (m <sup>2</sup> )	bc	$\rho_p$	$\Delta\sigma_p$ (kPa)	P (kN)	Pi (kN)	Cabos necessários	Diferença	Força complementar (kN)	As CA-50 (m <sup>2</sup> /m)
B2	2598.73	19	0.0000986	0.0018734	2.8	0.0014389	151082.52	115.00	129.90	20	1	130.69	0.00

❖ *Para a direção Y:*

Seção	Nsd (kN/m)	Msd (kNm/m)	Msdi (kNm/m)	kmd	kx	kz	MRdc (kNm/m)	MRds (kNm/m)	Rcd (kN)	R'sd (kN)	Rsd (kN)	As - tração (m <sup>2</sup> )	A's (m <sup>2</sup> /m)
B2	633.80	1358.89	1222.62	0.226	0.395	0.842	1222.62	0.00	-3122.73	0	3756.53	0.008640	0

O cálculo da armadura de tração é apresentado a seguir.

	Rsd (kN)	Cabos existentes	Área de 1 cabo (m <sup>2</sup> )	Ap (m <sup>2</sup> )	bc	$\rho_p$	$\Delta\sigma_p$ (kPa)	P (kN)	Pi (kN)	Cabos necessários	Diferença	Força complementar (kN)	As CA-50 (m <sup>2</sup> /m)
B2	3756.53	2	0.0000986	0.000197	2.8	0.0001515	840283.98	115.00	197.85	19	17	3360.82	0.007730