COPPE
Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia
UFRJ

RECUPERAÇÃO DE PROPRIEDADES ACÚSTICAS DA SUBSUPERFÍCIE ATRAVÉS DA INVERSÃO SÍSMICA POR MÍNIMOS QUADRADOS LINEAR E NÃO LINEAR

Kristian David Torres Bautista

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientadores: Franciane Conceição Peters
Webe João Mansur

Rio de Janeiro
Abril de 2019

RECUPERAÇÃO DE PROPRIEDADES ACÚSTICAS DA SUBSUPERFÍCIE ATRAVÉS DA INVERSÃO SÍSMICA POR MÍNIMOS QUADRADOS LINEAR E NÃO LINEAR

Kristian David Torres Bautista

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Examinada por:

Prof. Webe João Mansur, Ph.D

Prof. Franciane Conceição Peters, D.Sc

Dr. Felipe dos Santos Loureiro, D.Sc.

Dr. Djalma Soares Filho, D.Sc

Prof. Luiz Alberto Santos, D.Sc

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

ABRIL DE 2019

Bautista, Kristian David Torres

Recuperação de propriedades acústicas da subsuperfície através da inversão sísmica por mínimos quadrados linear e não linear/Kristian David Torres Bautista. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2019.

XIII, 98 p.: il.; 29, 7cm.

Orientadores: Franciane Conceição Peters

Webe João Mansur

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Civil, 2019.

Referências Bibliográficas: p. 88 – 98.

1. FWI. 2. LSRTM. 3. Inversão. 4. Geofísica computacional. I. Peters, Franciane Conceição *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Civil. III. Título.

À Gene, pela vida afora.

Agradecimentos

"For, in the end, your study is your vocation, vocation is about love, and love leads to thanksgiving because it is good and is of God."

— Nathaniel Peters

À minha orientadora, Professora Dra. Franciane Conceição Peters, agradeço por tudo. Principalmente, por ser um exemplo constante de excelência e dedicação, pela disposição e o incentivo durante meu aprendizado, e pela orientação e os conselhos, tanto nas questões acadêmicas quanto na vida.

Ao meu orientador, Professor Dr. Webe João Mansur, pelas sugestões, os recursos e, especialmente, pela confiança. Sempre estarei agradecido pelo apoio que recebi desde o primeiro dia.

Aos membros da banca, por aceitarem o convite e pelas valiosas contribuições. Agradeço especialmente ao Dr. Djalma Manoel Soares Filho, pela inspiração e o dom de explicar com facilidade e paixão conceitos complicados.

Ao Dr. Pedro Carvalho e ao Bruno de Souza Silva, por me ajudarem a unir as pontes entre a teoria e a implementação numérica.

À equipe administrativa e aos colegas do LAMEMO, pelo companheirismo e a amizade.

Aos meus pais, Fernando e Soraya, e à minha irmã, Karina, por serem exemplo de coragem e por todo o apoio, mesmo na distância.

À minha esposa, Génesis, pelo amor, compreensão e as palavras de força, especialmente na última etapa do mestrado.

Finalmente, pelo suporte financeiro, agradeço à CAPES, à FAPERJ, a Petrobras e à SEG.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

RECUPERAÇÃO DE PROPRIEDADES ACÚSTICAS DA SUBSUPERFÍCIE ATRAVÉS DA INVERSÃO SÍSMICA POR MÍNIMOS QUADRADOS LINEAR E NÃO LINEAR

Kristian David Torres Bautista

Abril/2019

Orientadores: Franciane Conceição Peters
Webe João Mansur

Programa: Engenharia Civil

Neste trabalho, o problema inverso da sísmica de exploração é abordado através de duas técnicas baseadas na minimização da função objetivo de mínimos quadrados. O problema não linear que estima a velocidade acústica do meio é resolvido pela inversão da forma completa de onda, onde são implementadas e comparadas duas estratégias multiescala com o objetivo de diminuir a não linearidade do problema. Adicionalmente, é contemplado o pré-condicionamento do gradiente para auxiliar a recuperação das regiões mais profundas do subsolo.

Por outro lado, o problema linear, que consiste em reconstruir o modelo de refletividade verdadeira a partir de imagens migradas deficientes, é resolvido com o algoritmo de migração reversa no tempo por mínimos quadrados. Os exemplos numéricos demonstram que o operador inverso do problema de migração, estimado de forma implícita por meio de um processo iterativo semelhante ao do problema não linear, tem propriedades deconvolutivas que permitem a obtenção de seções migradas com melhor resolução e amplitudes mais balanceadas em profundidade.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

RECOVERY OF ACOUSTIC PROPERTIES OF THE SUBSURFACE THROUGH THE LEAST-SQUARES INVERSION OF SEISMIC DATA

Kristian David Torres Bautista

April/2019

Advisors: Franciane Conceição Peters

Webe João Mansur

Department: Civil Engineering

In this work, the inverse problem of exploration geophysics is solved through two techniques based on the minimization of the least squares objective function. The nonlinear problem that estimates the acoustic velocity of the medium is solved by seismic full waveform inversion. For this, two multiscale strategies were considered in order to mitigate the nonlinearity of the problem. In addition, a preconditioner term that approximates the inverse of the Hessian matrix is contemplated to assist in the imaging of the deeper parts of the model and improve the convergence of the optimization algorithm.

On the other hand, the linear inverse problem that recovers the true subsurface reflectivity model is solved by the least squares reverse time migration. The numerical examples performed here demonstrate that the inverse operator of the migration problem (implicitly estimated by an iterative solver), has deconvolutive properties, and thus, it can be used to obtain improved seismic sections with better resolution and reflectors with more balanced amplitudes.

Sumário

Lista de Figuras **x**

Lista de Tabelas **xiii**

1 Introdução **1**

1.1 Revisão bibliográfica 6

1.2 Objetivos e estrutura da dissertação 12

2 Algoritmos de inversão **13**

2.1 Problema direto 13

2.2 Problema inverso 14

2.3 Problema inverso não linear 15

2.3.1 Método de Newton 17

2.3.2 Método de Gauss-Newton 19

2.3.3 Gradiente descendente e Gradiente conjugado 20

2.3.4 Método Quasi-Newton (L-BFGS) 21

2.4 Problema inverso linear 23

3 Inversão do campo de onda completo **27**

3.1 A equação da onda acústica 27

3.1.1 Discretização pelo método das diferenças finitas 28

3.1.2 Condições iniciais e de contorno 29

3.2 Cálculo do gradiente pelo método do estado adjunto 31

3.3 Algoritmo da FWI 33

3.4 Pré-condicionamento do gradiente pela diagonal da pseudo-Hessiana . 34
3.4.1 Experimentos numéricos no modelo Camembert 36
3.4.2 Experimentos numéricos no modelo Marmousi 40
3.5 Estratégias multi-escala no domínio do tempo 43
3.5.1 Multiescala por filtragem em faixas de frequências 44
3.5.2 Multiescala por janelamento de offset 46
3.5.3 Experimentos numéricos no modelo Marmousi 47

4 Migração reversa no tempo por mínimos quadrados 52
4.1 Linearização do problema direto 53
4.1.1 Modelagem do campo espalhado 53
4.1.2 Derivada de Fréchet 56
4.1.3 Validação da modelagem de Born 56
4.2 Migração RTM como problema inverso 62
4.3 Algoritmo de inversão LSRTM 66
4.4 Experimentos numéricos 67
4.4.1 Modelo de camadas plano-paralelas 68
4.4.2 Modelo de pontos difratores com corpo de sal 73
4.4.3 Modelo Sibgsbee2a 78

5 Conclusões e trabalhos futuros 85

Referências Bibliográficas 88

Lista de Figuras

1.1 Ilustração da abordagem de separação de escalas para um modelo sintético 4

1.2 Espectro de frequência espacial para um modelo sintético 4

2.1 Espaço de solução para uma função objetivo não linear 2D 16

2.2 Espaço de solução para uma função quadrática 2D 24

3.1 Modelo Camembert 36

3.2 Resultados da inversão FWI para 15 iterações com diferentes métodos de otimização 38

3.3 Evolução da função objetivo 39

3.4 Comparação dos perfis verticais para os diferentes modelos obtidos, extraídos na posição (x,z)=(200,0) m 39

3.5 Diagonal da pseudo-Hessiana 39

3.6 Modelo Marmousi 41

3.7 Resultado da inversão do modelo marmousi, com e sem pré-condicionamento 42

3.8 Evolução da função objetivo. 42

3.9 Variação do erro médio ao longo das avaliações do processo iterativo para o modelo Marmousi 43

3.10 Filtragem dos dados pelo filtro Wiener 45

3.11 Espectros de amplitude dos dados filtrados. 46

3.12 Janelamento de offset 47

3.13 Resultado da inversão multiescala no modelo marmousi 49
3.14 Evolução da função objetivo para as estratégias multiescala. 50
3.15 Erro relativo entre os modelos invertidos e o modelo verdadeiro . . . 51

4.1 Modelo homogêneo com dois pontos difratores. 57
4.2 Comparação entre espalhamento teórico e espalhamento pela modelagem de Born 58
4.3 Comparação do traço central (x=2 km) entre os sismogramas da Figura 4.2. 58
4.4 Comparação do traço central para o experimento dos pontos difratores, considerando perturbações de velocidade de $v_p = 1650$ m/s. . . . 59
4.5 Teste do modelo de três camadas horizontais 60
4.6 Comparação entre o campo espalhado calculado pela equação da onda completa e a modelagem de Born para o modelo de fundo suavizado com diferentes tamanhos de janela do filtro gaussiano. 61
4.7 Modelo de quatro camadas plano-paralelas 69
4.8 Resultado da RTM para o modelo de camadas planas paralelas 70
4.9 Resultado da LSRTM para o modelo de camadas planas paralelas depois de 10 iterações 71
4.10 Comparação dos espectros de frequência espacial para os resultados da migração RTM e LSRTM 71
4.11 Evolução da função objetivo para o modelo de camadas plano-paralelas 72
4.12 Resultado da LSRTM para o modelo de camadas planas paralelas depois de 38 iterações. 73
4.13 Perfis verticais da seção migrada na posição x = 1.25 km. a) Iteração 10. b) Iteração 38. 73
4.14 Modelo de pontos difratores com corpo de sal 74
4.15 Resultado da RTM para o modelo de pontos difratores 75
4.16 Seção RTM para o modelo de pontos difratores, depois de ter aplicado um filtro laplaciano 76

4.17 Resultado da LSRTM para o modelo de pontos difratores. 76
4.18 Evolução da função objetivo para o modelo de pontos difratores . . . 77
4.19 Comparação entre sismogramas sintéticos calculados com a modelagem de Born para um tiro posicionado em x = 625 m 78
4.20 Modelo de velocidade verdadeiro. 79
4.21 Modelo de fundo da migração 79
4.22 Modelo de refletividade verdadeiro. 80
4.23 Seção RTM obtida com a migração de 601 tiros. 80
4.24 Seção RTM filtrada. 81
4.26 Seção LSRTM filtrada, na iteração 25. 83
4.27 Amplificação da área do pré-sal. 83
4.28 Correlação entre dados calculados e dados observados 84

Lista de Tabelas

3.1 Parâmetros utilizados na modelagem e inversão do modelo Marmousi 41

4.1 Parâmetros utilizados na modelagem e inversão do modelo de camadas plano-paralelas 70

4.2 Parâmetros utilizados na modelagem e inversão do modelo Sigsbee2a 82

Capítulo 1

Introdução

A subsuperfície da Terra é extremamente heterogênea e abrange complexas estruturas geológicas que variam desde placas tectônicas e bacias sedimentares até os microporos das rochas. Desde a invenção da sismologia moderna no final do século XIX, numerosas técnicas de imageamento tem sido desenvolvidas com o intuito de obter informações sobre a composição interna da Terra em cada uma das suas porções.

Na indústria do petróleo, por exemplo, a sismologia de exploração emprega o método sísmico de reflexão na prospecção de campos de óleo e gás, devido ao seu poder de alcance em profundidade (geralmente até 10 km) e à sua alta resolução (YILMAZ, 2001). Este método baseia-se no processamento e interpretação dos traços sísmicos adquiridos na superfície ou nos poços, onde um arranjo de receptores registra (a uma taxa de amostragem pré-estabelecida) diversos eventos do campo de ondas elástico (e.g. ondas refletidas, ondas refratadas, ondas difratadas, entre outros), propagado no interior da crosta terrestre excitada por fontes sísmicas (AKI e RICHARDS, 1980). Os traços formam sismogramas onde estão contidas informações sobre as coordenadas das fontes e receptores, informações cinemáticas referentes aos tempos de trânsito dos eventos sísmicos e informações dinâmicas referentes à amplitude do sinal (SANTOS, 2012).

O processo de reconstrução das propriedades físicas da subsuperfície a partir dos dados adquiridos é denominado inversão sísmica (AKI *et al.*, 1977; BISHOP *et al.*,

1985; NOLET, 1987; TARANTOLA, 1987). Os dois principais objetivos da inversão sísmica consistem em obter uma imagem estrutural do subsolo (processo conhecido como imageamento) e estimar os parâmetros elásticos e petrofísicos das rochas tais como as velocidades de propagação, a densidade, a porosidade, a saturação de fluidos, entre outros.

Imageamento sísmico como um problema de duas escalas

Baseado na suposição de que o campo de ondas registrado permite recuperar as características do meio em duas escalas distintas, o imageamento sísmico convencional lida com a parte cinemática e a parte dinâmica dos traços em duas etapas separadas (BIONDI e ALMOMIN, 2013; MORA, 1989; WAPENAAR, 1996).

A etapa inicial consiste em resolver um problema inverso altamente não-linear, onde é estimado um modelo de velocidade que honre a informação cinemática dos eventos sísmicos. Tal modelo pode ser determinado, por exemplo, pela tomografia dos tempos de trânsito, considerada uma tecnologia robusta e de baixo custo computacional (CHIU *et al.*, 1986; LAMBARE *et al.*, 2014; WOODWARD *et al.*, 2008). Tradicionalmente, este método é baseado na solução assintótica da equação da onda[1] para gerar traços sintéticos que são comparados iterativamente com certas porções dos dados pré-processados (geralmente os tempos de trânsito das primeiras chegadas ou das reflexões) e desta forma, inferir sobre a distribuição de velocidades da subsuperfície (BLEISTEIN, 1984). A solução assintótica permite resolver unicamente as componentes de grande escala do meio, por isso o modelo de baixa resolução espacial obtido com a tomografia é frequentemente conhecido como macro modelo de velocidade, e é empregado como dado de entrada na etapa seguinte.

O segundo passo consiste em construir uma aproximação do mapa de refletivi-

[1]Segundo a teoria do raio, a simplificação assintótica aproxima a propagação de ondas entre as fontes e os receptores como raios ortogonais as frentes de onda em meios isotrópicos, cuja trajetória é alterada nas interfaces da subsuperfície e pode ser calculada resolvendo um problema de traçado de raios ou a equação iconal. De acordo com JONES (2010), tal aproximação é aceitável se o comprimento de onda do sinal sísmico for várias vezes menor do que o comprimento de onda característico do meio. Em outras palavras, é requerido que o modelo de velocidade seja muito mais suave do que o comprimento de onda da fonte. Por essa razão a solução assintótica é também conhecida como a aproximação de alta frequência da equação da onda.

dade, onde a informação dinâmica dos traços é utilizada para imagear as interfaces refletoras do meio. Isto é feito através de técnicas de migração sísmica, que colapsam as amplitudes das reflexões presentes nos sismogramas para suas corretas posições em tempo ou profundidade (e.g. BIONDI e SYMES, 2004; CLAERBOUT e DOHERTY, 1972; STOLT, 1978). Uma extensa revisão dos algoritmos de migração mais empregados no processamento sísmico é apresentada em ROBEIN (2010).

Finalmente, o modelo de refletividade é usado para delimitar as interfaces refletoras das camadas e corpos geológicos durante a fase de interpretação. De igual forma, a informação das amplitudes migradas é útil em outras técnicas geofísicas como a análise AVO/AVA (*amplitude-versus-afastamento/amplitude-versus-ângulo*) (GRAY *et al.*, 2001). Assim, em conjunto com o estudo da geologia e a caracterização petrofísica dos perfis de poço, o imagemento sísmico ajuda a diminuir a incerteza na estimativa das reservas de hidrocarbonetos.

Como exemplo, a Figura 1.1 apresenta uma ilustração simbólica dos dois tipos de resultados almejados durante o processo de inversão e imageamento tradicional para o modelo sintético *statics94* (LIU *et al.*, 2011). A macro escala, que causa principalmente o efeito de propagação descendente do campo de ondas e representa as componentes de transmissão dos dados; e a micro escala, que causa o efeito de espalhamento traduzido em componentes de reflexão. Segundo a terminologia empregada por CLAERBOUT (1985), o macro modelo de velocidade $\mathbf{m}_0$ (Figura 1.1.b) e a refletividade $\delta\mathbf{m}$ (Figura 1.1.c) conformam, respectivamente, as componentes de baixa e alta frequência espacial do modelo real $\mathbf{m}$ (Figura 1.1.a).

Esta afirmação é corroborada na Figura 1.2, onde é possível apreciar que as partes baixas e altas do espectro do modelo sintético são resolvidas acertadamente pelo modelo reconstruído. Do mesmo modo, pode-se observar como a reconstrução não reproduz corretamente a faixa das frequências intermediárias, deixando em evidência uma das principais limitações do fluxo sequencial descrito anteriormente. A metodologia de separação usa apenas uma componente dos dados de cada vez, o que limita a resolução e a precisão de cada etapa (ALMOMIN, 2016).

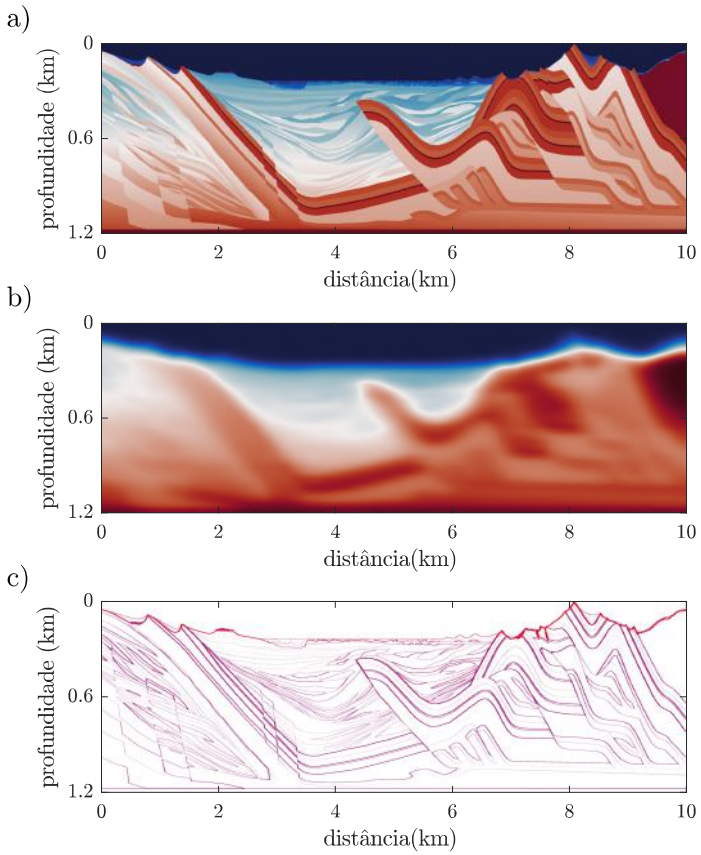

Figura 1.1: Ilustração da separação de escalas para o modelo sintético *statics94*: a) Velocidade real $\mathbf{m}$. b) Macro modelo de velocidade $\mathbf{m}_0$. c) Modelo de refletividade $\delta\mathbf{m}$

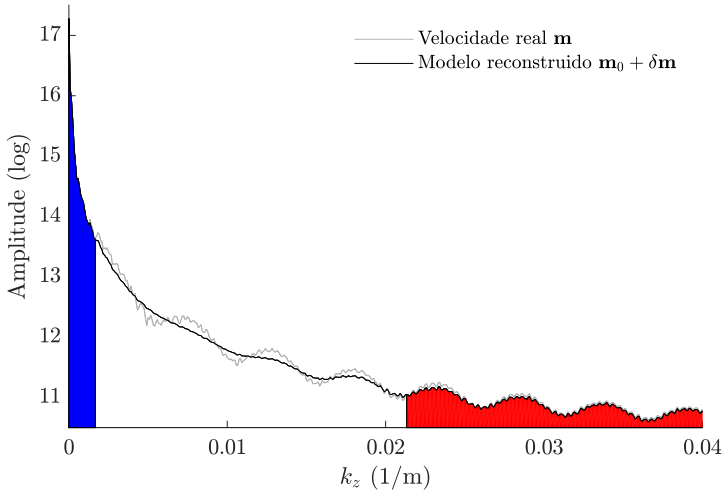

Figura 1.2: Espectro do número de onda vertical k_z para o modelo sintético *statics94* (inspirado na figura clássica de CLAERBOUT (1985)). A área azul sinaliza a influência do macro modelo de velocidade $\mathbf{m}_0$ na reconstrução do espectro, enquanto a área vermelha representa a influência do modelo de refletividade $\delta\mathbf{m}$. A falta de precisão do espectro recuperado no intervalo entre as duas áreas coloridas, simboliza a falta de informação de qualidade nos dados sísmicos necessária para resolver os elementos de escala intermediária do subsolo e na inadequação dos métodos de inversão sísmica utilizados.

A impossibilidade de recuperar o espectro completo está intimamente relacionada a dois fatores. O primeiro é a falta de sensibilidade dos dados sísmicos ao conteúdo de escala intermediária do subsolo. Tal insensibilidade é produto das restrições experimentais dos levantamentos de aquisição clássicos, caracterizados por "offsets"[2] curtos, dados incompletos e fontes com banda de frequência insuficiente (JANNANE *et al.*, 1989); e ao fato de que a Terra tende a absorver certas componentes de energia, especialmente a energia de alta frequência. Limitação das frequências nos registros sísmicos se traduz em falta de informação nos modelos invertidos. O segundo motivo pelo qual os dados sísmicos não podem ser invertidos para o modelo da Terra correto, é porque as equações de modelagem são inconsistentes com os dados. Em outras palavras, independentemente da natureza poro-viscoelástica da Terra, a maioria dos métodos de inversão são fundamentados na propagação de ondas em meios acústicos, que conseguem aproximar de forma simplista a complexidade cinemática e dinâmica dos sismogramas adquiridos em campo.

Apesar destas limitações, o processo de inversão clássico conseguiu produzir resultados satisfatórios em cenários geológicos relativamente simples e pouco heterogêneos, onde os métodos tomográficos são capazes de construir modelos de velocidade suficientemente eficientes para garantir imagens migradas precisas, com interfaces corretamente focadas e bem posicionadas (SCHUSTER, 2017). No entanto, em áreas estruturalmente complexas com grandes variações laterais e altos contrastes de velocidade (por exemplo, regiões com domos de sal e formações do pré-sal), as aproximações físicas inerentes à tomografia são inválidas e, portanto, os modelos obtidos carecem da acurácia e da resolução necessárias para o imageamento satisfatório das seções sísmicas (GEOLTRAIN e BRAC, 1993; MÉTIVIER *et al.*, 2013).

Com a crescente demanda por recursos energéticos, a indústria dos hidrocarbonetos depende cada vez menos de reservatórios convencionais e rasos como fonte principal de óleo e gás. Para abastecer a demanda atual, a geofísica de exploração tem sido direcionada para prospectos mais profundos e desafiadores. Esta tendência

[2]Na aquisição sísmica, é o termo utilizado para referir-se à distância horizontal da fonte ao centro da estação receptora (DUARTE, 2010).

exige, naturalmente, o desenvolvimento de melhores tecnologias de aquisição, assim como novas abordagens de inversão e imageamento.

Na atualidade, os levantamentos sísmicos com offsets longos, fontes com espectro de frequência extendido (*broadband*) e ampla cobertura azimutal (*wide-azimuth*), tem incrementado a quantidade e a qualidade dos dados registrados, reduzindo as limitações por parte da aquisição (CORCORAN *et al.*, 2007; SIRGUE, 2006). Paralelamente, o desenvolvimento no campo da computação de alto desempenho tem proporcionado o processamento e a memória computacional suficientes para implementar tecnologias de inversão de alta resolução, capazes de aproveitar os recursos das aquisições modernas e ultrapassar as limitações dos métodos convencionais em cenários complicados. Tal é o caso dos métodos conhecidos como a inversão da forma completa de onda (*full-waveform inversion* – FWI) e a migração reversa no tempo por mínimos quadrados (*least-squares reverse time migration* – LSRTM).

Em linhas gerais, ambas as técnicas tem como objetivo encontrar um modelo de propriedades que, por meio da modelagem da equação da onda, forneça um sismograma sintético o mais próximo possível do sismograma registrado em campo. Estes processos são resolvidos de forma iterativa, no contexto de problemas de otimização local. Nesta dissertação, a FWI e a LSRTM são apresentadas e implementadas com o objetivo de recuperar, respectivamente, modelos de velocidade e refletividade mais detalhados. Exemplos sintéticos são apresentados para testar a aplicação de diversas estratégias que visam tornar mais eficiente o processo de convergência e obter resultados de inversão mais robustos.

1.1 Revisão bibliográfica

Migração reversa no tempo por mínimos quadrados

O processo da migração mapeia a informação do domínio do dado sísmico para o domínio do modelo de refletividade, o que, em teoria, requer a ação do operador inverso à modelagem (CLAERBOUT, 1995). Não obstante, na prática, as técnicas

convencionais empregam operadores adjuntos e condições de imagem aproximadas para estabilizar a migração de dados imperfeitos, resultando em imagens deficientes consideradas como uma versão desfocada das perturbações da subsuperfície. Isso significa que, embora a migração trate a informação cinemática corretamente, as amplitudes das seções não representam com precisão o modelo de refletividade sísmica, mesmo com o modelo de velocidade correto (RICKETT, 2003).

A migração por mínimos quadrados (LSM) procura contornar estes inconvenientes aproximando o operador inverso exato por um operador inverso generalizado no contexto de um problema linear de mínimos quadrados. Este operador é definido como o inverso da matriz Hessiana no problema de imageamento (GUITTON, 2004). A técnica é considerada uma inversão linear no sentido de que, primeiro, é estabelecida uma relação linear entre o modelo de refletividade e os dados sísmicos pré-processados, e, posteriormente o modelo que honra as observações é recuperado através de um algoritmo de inversão (LAILLY, 1983).

Durante os últimos anos, diferentes estudos tem demonstrado o potencial da LSM para reduzir os artefatos de migração, remover as marcas de aquisição, compensar a iluminação e aumentar a resolução das seções migradas (SCHUSTER, 2017; TU e HERRMANN, 2015; WANG *et al.*, 2017).

Dependendo da forma em que são computadas as funções de Green dos operadores de migração e modelagem, é possível classificar diferentes famílias de algoritmos. Historicamente, os primeiros trabalhos que introduziram o conceito da LSM foram desenvolvidos usando operadores integrais de Kirchhoff (LAMBARÉ *et al.*, 1992; SCHUSTER, 1993). A primeira aplicação da migração Kirchhoff por mínimos quadrados em dados reais foi realizada por NEMETH *et al.* (1999), através de um algoritmo iterativo de gradiente conjugado pré-condicionado e regularização para compensar a amostragem espacial deficiente nos dados. Posteriormente, com a substituição das aproximações assintóticas por métodos baseados em diferenças finitas, surgiram implementações da LSM com operadores de onda unidirecional (*one-way wave equation*), como por exemplo RICKETT (2003), KÜHL e SACCHI

(2003) e TANG (2009). Porém, ambas as abordagens apresentam as desvantagens inerentes aos seus respetivos operadores de migração, tais como a dificultade de projetar refletores superficiais e imagear múltiplas em estruturas complexas (no caso de Kirchhoff) e lidar adequadamente com variações laterais de velocidade e refletores inclinados mais de 70°, no caso da migração *one-way* (GRAY *et al.*, 2001).

Mais recentemente, o método de LSM foi associado ao operador da migração reversa no tempo (*Reverse time migration* – RTM). A grande vantagem da migração RTM em relação aos operadores antes mencionados, é que esta usa a equação completa da onda como operador para extrapolar em tempo o campo de ondas em todas as direções, conseguindo imagear estruturas geológicas complexas com grande precisão (BAYSAL *et al.*, 1983; ETGEN *et al.*, 2009).

A combinação entre a migração RTM e a inversão LSM é conhecida na literatura como migração reversa no tempo por mínimos quadrados (LSRTM), e é considerada o estado da arte das tecnologias de imageamento sísmico (TAN e HUANG, 2014b; YAO e WU, 2015), especialmente em regiões do pré-sal, onde a migração RTM convencional apresenta limitações consideráveis.

Geralmente, os operadores da LSRTM estão baseados na equação de onda acústica linearizada com densidade constante. No entanto, as aplicações deste método estão sendo estendidas para representações mais realistas do problema de imageamento. Por exemplo, estudos recentes investigaram o desempenho da LSRTM em dados multicomponente considerando a densidade variável, visando mitigar a interferência entre as imagens de refletividade acústica e elástica (e.g. CHEN e SACCHI, 2017, 2018; FENG e SCHUSTER, 2017; GUO e MCMECHAN, 2018). Adicionalmente, outros autores tem apresentado abordagens que contemplam o efeito de diversos tipos de anisotropia e viscosidade na imagem invertida (CHEN *et al.*, 2017; QU *et al.*, 2017; ZHEN-CHUN *et al.*, 2014).

Por outro lado, a LSRTM tem sido formulada tanto no domínio do dado quanto no domínio da imagem. FLETCHER *et al.* (2016) apresentou comparações entre as duas formulações, assim como considerações para aplicações práticas em cada caso.

Em termos gerais, a implementação no domínio da imagem demanda menor custo computacional se comparado com o domínio do dado, posto que esta última requer várias iterações no processo de minimização da função objetivo. Neste sentido, diferentes estratégias tem sido desenvolvidas para tornar a formulação no domínio do dado computacionalmente mais eficiente, como por exemplo comprimir os dados sísmicos com métodos de codificação de fase, onde a informação contida em vários sismogramas é migrada ao mesmo tempo. A compressão pode ser feita com codificação de fase aleatória, codificação de fase de onda plana, codificação de amplitude, codificação determinística, entre outros (e.g. DAI *et al.*, 2012; HERRMANN e LI, 2012).

Algumas das tendências atuais no campo da LSRTM buscam diminuir a sensibilidade da imagem invertida aos erros no macro modelo de velocidade com o uso de diferentes condições de imagem (TAN e HUANG, 2014a; YANG *et al.*, 2017), funções objetivo alternativas (ZHANG *et al.*, 2015), e a inversão conjunta das reflexões primárias com as múltiplas da superfície (WONG *et al.*, 2015; ZHANG e SCHUSTER, 2014).

Inversão da forma completa de onda

A inversão da forma completa de onda é um processo de otimização não linear capaz de gerar modelos de velocidade da subsuperfície de alta resolução. O objetivo da FWI é ambicioso no sentido de que, em teoria, transcende o conceito de separação de escala apresentado na seção anterior. Em contrapartida, a técnica tenta caracterizar um espectro de frequência espacial amplo e contínuo da subsuperfície, agrupando a reconstrução do macro modelo de velocidade e a migração em um único processo (VIRIEUX e OPERTO, 2009).

A FWI é concebida como um problema inverso não linear dado que a relação entre os dados sísmicos e os parâmetros do subsolo é estabelecida de forma não linear através da equação da onda completa. Uma vez que os métodos de inversão estocástica resultam excessivamente caros na aplicação de problemas de grande escala, este

problema inverso é resolvido geralmente por algoritmos de minimização iterativos, de forma determinística.

A origem da FWI remonta ao início da década de 80, quando TARANTOLA (1984a) reformulou a teoria do problema inverso no domínio do tempo para dados sísmicos. Sua abordagem, que considerou: 1) a propagação direta do campo de ondas completo para predizer os dados observados, 2) a propagação reversa do campo gerado pelos resíduos entre os dados observados e os dados sintéticos, 3) a correlação dos dois campos em cada ponto do espaço para criar o gradiente, e 4) a minimização iterativa da função objetivo de mínimos quadrados dos resíduos, constitui o fundamento da técnica na atualidade.

Em conjunto com o trabalho de Tarantola, outros autores ajudaram a estabelecer o conhecimento e interesse da academia e da indústria do petróleo nas décadas seguintes. Por exemplo, o trabalho de GAUTHIER *et al.* (1986) apresentou as primeiras aplicações do método em três modelos acústicos 2D com estruturas geométricas simples. Apesar das limitações computacionais da época, eles deixaram em evidência o potencial da FWI. Também indagaram sobre a necessidade de contar com uma boa cobertura das fontes, a importância de precondicionar o gradiente para otimizar a convergência do algoritmo e a dependência do resultado invertido com o modelo inicial. As primeiras implementações em modelos elásticos 2D seriam desenvolvidas mais tarde por MORA (1987, 1988) e CRASE *et al.* (1990).

Posteriormente, (BUNKS *et al.*, 1995) mostraram o primeiro exemplo prático da FWI em um modelo sintético geologicamente complexo. Nesse estudo, foi atingida uma melhor resolução no modelo reconstruído através de uma estratégia multiescala, que inverte primeiro os dados de baixa frequência para obter uma estimativa suave do modelo de velocidade, e paulatinamente incorpora o resto do conteúdo de frequências nas iterações posteriores, reduzindo a sensibilidade aos mínimos locais.

Todos os estudos iniciais da FWI foram desenvolvidos no domínio do tempo, até que PRATT (1999) e PRATT e SHIPP (1999) reformularam o problema no domínio da frequência, onde basicamente é resolvido um problema de valor de con-

torno estacionário. Graças a essa nova formulação, a maior parte das limitações computacionais da época puderam ser superadas e o método tornou-se viável para experimentos 2D de grandes dimensões. Mais tarde, SIRGUE e PRATT (2004) consolidaram a aplicação da FWI neste domínio, ao demonstrar que é possível obter resultados acertados limitando eficientemente a inversão a apenas um grupo reduzido de frequências, tirando vantagem da forte redundância do conteúdo de número de onda nos dados. A implementação da FWI no domínio da frequência é equivalente à FWI no domínio do tempo quando todas as frequências são consideradas simultaneamente (PRATT *et al.*, 1998).

Finalmente, os resultados revolucionários apresentados por SIRGUE *et al.* (2009) incrementaram drasticamente o interesse da indústria do petróleo no método. Neste estudo, a inversão FWI 3D de dados OBC (*Ocean Bottom Cable*) do campo Valhall, foi capaz de resolver canais de alta velocidade na parte rasa do modelo e chaminés de gás acima do reservatório, que não tinham sido detectados antes por métodos convencionais.

Desde então, inúmeros trabalhos tem sido focados em contornar as principais limitações da FWI clássica e tornar a técnica mais robusta. Como a norma de mínimos quadrados assume uma distribuição Gaussiana dos resíduos (TARANTOLA, 1987), geralmente é exigido um controle de qualidade dos dados observados prévio à inversão. Como alternativa, a FWI tem sido abordada com funções objetivo diferentes, tais como a função de transporte ótimo (MÉTIVIER *et al.*, 2016), a função objetivo adaptativa (WARNER e GUASCH, 2016), a RWI (*reflection waveform inversion*) (YAO e WU, 2017), entre outras. Abordagens da FWI mais complexas levam em consideração elasticidade (GUO e ALKHALIFAH, 2017), anisotropia (WARNER *et al.*, 2013) e viscosidade (YANG *et al.*, 2016).

Embora exista um número crescente de histórias de sucesso em aplicações reais, a aplicação da FWI a alvos geológicos mais profundos e estruturas complexas continua sendo um desafio. Mesmo sendo uma proposta desafiadora desde o ponto de vista computacional, a FWI continua a evoluir, fazendo novas e importantes contribuições

para a obtenção de imagens sísmicas mais precisas.

1.2 Objetivos e estrutura da dissertação

O objetivo desta dissertação é o de implementar dois métodos de inversão sísmica como problemas de otimização baseados em operadores adjuntos, a saber, a inversão da forma completa de onda, e a migração reversa no tempo por mínimos quadrados. Os dois problemas são resolvidos no domínio do tempo com propagadores de diferenças finitas. Modelos 2D foram utilizados para testar tais metodologias.

O presente capítulo introduz o problema de inversão e imageamento de dados sísmicos, tema no qual esta dissertação se insere. Adicionalmente, é apresentada brevemente uma revisão bibliográfica das duas técnicas de inversão abordadas.

No capítulo 2, os principais algoritmos de inversão são apresentados, fazendo referência ao método de Newton e às família de métodos tipo gradiente, que formam as bases da teoria de otimização sem restrição.

No capítulo 3, é apresentado o método de inversão não linear de FWI. Aqui são descritos aspectos relevantes à modelagem da equação da onda em meios acústicos, assim como a formulação do método do estado adjunto para o cálculo do gradiente. Por último, são implementadas duas técnicas da abordagem múltiescala e uma técnica de pré-condicionamento do gradiente.

No capítulo 4, é introduzido o problema inverso linear da LSRTM para recuperação da refletividade do subsolo, assim como a linearização da equação da onda acústica. Alguns experimentos numéricos são desenvolvidos em modelos com geometrias simples e um modelo geologicamente complexo para avaliar o desempenho da técnica.

As conclusões, sugestões dos possíveis trabalhos futuros e algumas discussões referentes às metodologias empregadas são apresentadas no último capítulo.

Capítulo 2

Algoritmos de inversão

2.1 Problema direto

O problema direto consiste em produzir um conjunto de medições $\mathbf{d}$ através da ação das leis físicas sobre um sistema, representado por um modelo de parâmetros $\mathbf{m}$ (TARANTOLA, 2005). O problema direto pode ser expresso como

$$\mathbf{G}(\mathbf{m}) = \mathbf{d}, \tag{2.1}$$

onde $\mathbf{G}$ constitui o operador de modelagem direta, frequentemente representado por uma equação diferencial parcial (EDP), que estabelece a relação entre o modelo físico e os dados. No problema direto, os parâmetros da EDP como as condições inciais, as condições de contorno, as fontes, os coeficientes dos materiais e a geometria do domínio, são conhecidos. Em geral, os problemas diretos são considerados problemas bem postos, ou seja, eles têm solução, a solução é única e se comportam de forma estável (HADAMARD, 1902).

No método sísmico, o problema direto mais importante descrito pela Equação 2.1 faz referência à modelagem da propagação do campo de ondas registrado em superfície, governada pela equação da onda. Tanto o espaço do modelo quanto o do dado podem ter dimensão infinita, se a relação entre eles é descrita por meio de uma função. No entanto, é comum discretizar ambos espaços de forma que

$\mathbf{m} = (m_1, m_2, ..., m_n)^{\mathrm{T}}$ contem os n elementos que compõem o espaço finito de parâmetros, e $\mathbf{d} = (d_1, d_2, ..., d_m)^{\mathrm{T}}$ é o vetor de m amostras de observações geradas (ZHDANOV, 2015). Nesse contexto, $\mathbf{m}$ geralmente descreve o espaço 2D ou 3D discretizado de algum parâmetro elástico do subsolo, enquanto $\mathbf{d}$ é discretizado em função do número finito de receptores distribuídos na superfície como planos 2D horizontais ou linhas 1D, dependendo do tipo de aquisição (BERTERO e PIKE, 1992).

2.2 Problema inverso

Contrariamente, o problema inverso tenta reconstruir o modelo de parâmetros $\mathbf{m}$ a partir de observações indiretas, $\mathbf{d}$, feitas sobre ele, segundo a relação:

$$\mathbf{m} = \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{d}). \tag{2.2}$$

Porém, existem diversos inconvenientes associados à solução da Equação 2.2. Isto deve-se ao fato de que, diferentemente dos problemas diretos, os problemas inversos geralmente são mal postos e, portanto, não é possível garantir a existência de uma única solução. Isto acontece quando o modelo matemático que descreve a física do problema direto é inexato e, portanto, vários modelos são capazes de explicar os dados observados (RAMM, 1986).Por outro lado, na maioria dos experimentos reais, os dados são incompletos e estão contaminados com ruído, o que prejudica a estabilidade do processo de inversão. Instabilidades na inversão surgem frequentemente devido ao fato de que uma pequena mudança na medição leva a grandes mudanças no modelo (ZHOU, 2014).

Dependendo da natureza do operador, os problemas inversos podem ser classificados em problemas inversos não lineares e problemas inversos lineares (MENKE, 1989). Neste trabalho, ambos os tipos de problemas foram abordados no contexto da inversão sísmica por mínimos quadrados. O problema não linear apresentado no capítulo 3 corresponde à inversão do campo completo de ondas (FWI), que considera

todos os eventos reproduzíveis pela equação da onda completa, como a onda direta, as reflexões e múltiplas de ordens superiores. A FWI é uma inversão não linear no sentido de que o macro modelo de velocidade do qual depende o operador de modelagem é atualizado a cada iteração. Por outra parte, no capítulo 4 foi abordado o problema da migração por mínimos quadrados, considerado um problema linear no sentido de que a inversão apenas considera as reflexões e difrações de primeira ordem que dependem linearmente da distribuição de refletividade. Neste caso, o macro modelo de velocidade que estabelece o percurso das ondas propagadas em direção descendente, permanece fixo durante todas as iterações.

2.3 Problema inverso não linear

Os problemas não lineares fazem referência ao tipo de problemas onde a relação entre os dados observados, $\mathbf{d}$, e o modelo de parâmetros, $\mathbf{m}$, é descrita de forma não linear. Para obter a solução $\mathbf{m}^*$ de um problema não linear de grande escala, implementam-se métodos de otimização local, que consistem na minimização da função objetivo escalar generalizada

$$\min_{\mathbf{m}\in\mathbb{R}^n} \; E(\mathbf{m}), \tag{2.3}$$

onde $E(\mathbf{m})$ é pelo menos duas vezes diferenciável e satisfaz a condição $E(\mathbf{m}^*) \leq E(\mathbf{m})$, para todo $\mathbf{m}$. Em geral, o funcional da Equação 2.3 é não convexo e sofre da presença de vários mínimos locais que geralmente impedem a convergência para a solução verdadeira (NOCEDAL e WRIGHT, 2006). Como exemplo, a Figura 2.1 apresenta o espaço de soluções para uma função de duas variáveis não quadrática.

Como dito anteriormente, o problema inverso não linear abordado neste trabalho corresponde à inversão do campo de ondas completo (FWI). Convencionalmente, a FWI é concebida como um problema de otimização de mínimos quadrados, ou seja,

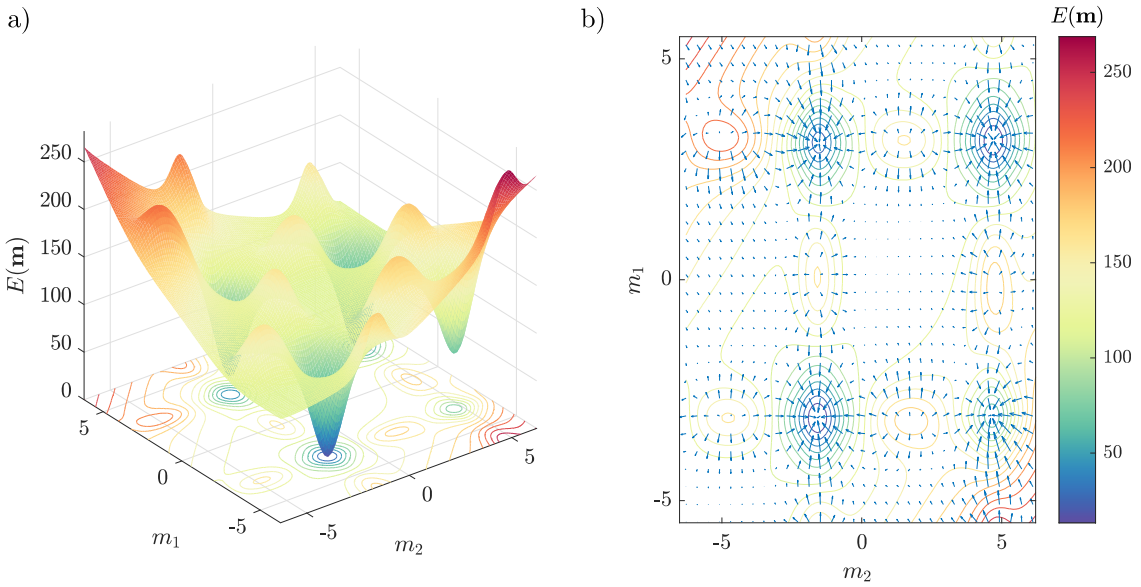

Figura 2.1: a) Representação gráfica de uma função objetivo não linear de duas variáveis com presença de vários mínimos locais. (b) Curvas de nível da função objetivo. Os vetores azuis indicam a direção negativa e a magnitude do gradiente $\frac{\partial E(\mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}}$ ao longo da superfície.

o funcional a ser minimizado é definido por:

$$\min_{\mathbf{m}\in\mathbb{R}^n} \; E(\mathbf{m}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{G}\,(\mathbf{m}) - \mathbf{d}\|_2^2 = \frac{1}{2}\Delta\mathbf{d}^{\mathrm{T}}\Delta\mathbf{d}, \tag{2.4}$$

onde $\|\cdot\|_2^2$ indica o quadrado da norma L_2, equivalente ao produto interno do resíduo $\Delta\mathbf{d}$ entre dados calculados ($\mathbf{G}(\mathbf{m}) = \mathbf{d}_{cal}$) e dados observados $\mathbf{d}$.

Este tipo de problema é resolvido empregando métodos iterativos de forma determinística, onde apenas é garantida a convergência local. Isto quer dizer que, partindo de um modelo inicial $\mathbf{m}_0$ conhecido, o mínimo local mais próximo da função objetivo é encontrado e corresponde ao modelo $\hat{\mathbf{m}}$ que minimiza os resíduos.

A forma como o modelo é atualizado a cada iteração varia dependendo do algoritmo implementado. A seguir são apresentados brevemente alguns exemplos dos métodos mais populares de minimização, sendo que uma descrição mais completa pode ser encontrada em NOCEDAL e WRIGHT (2006).

2.3.1 Método de Newton

O método de Newton é baseado na expansão em série de Taylor de segunda ordem da função objetivo da Equação 2.4 em torno ao modelo atual $\mathbf{m}_0 \in \mathbb{R}^n$ dada por:

$$E(\mathbf{m}_0 + \Delta\mathbf{m}) = E(\mathbf{m}_0) + \Delta\mathbf{m}^{\mathrm{T}}\mathbf{g} + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{m}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\Delta\mathbf{m}, \tag{2.5}$$

onde $E(\mathbf{m}_0 + \Delta\mathbf{m})$ é a função quadrática tangente a $E(\mathbf{m})$ com a mesma curvatura local, $\Delta\mathbf{m}$ indica a perturbação necessária para atualizar linearmente o modelo $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 + \Delta\mathbf{m}$, $\mathbf{g} = \frac{\partial E(\mathbf{m}_0)}{\partial \mathbf{m}}$ é o vetor gradiente de dimensão n, e $\mathbf{H} = \frac{\partial^2 E(\mathbf{m}_0)}{\partial \mathbf{m}^2}$ é a matriz Hessiana de derivadas segundas com dimensão $n \times n$,

Os parâmetros de $\mathbf{m}$ que minimizam a Equação 2.5 correspondem necessariamente a um ponto estacionário (assumindo que $\mathbf{H}$ é positiva definida),

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(\mathbf{m}_0 + \Delta\mathbf{m})}{\partial \Delta\mathbf{m}} &= \frac{\partial E(\mathbf{m}_0)}{\partial \mathbf{m}} + \frac{\partial^2 E(\mathbf{m}_0)}{\partial \mathbf{m}^2}\Delta\mathbf{m} = 0, \\ \frac{\partial^2 E(\mathbf{m}_0)}{\partial \mathbf{m}^2}\Delta\mathbf{m} &= -\frac{\partial E(\mathbf{m}_0)}{\partial \mathbf{m}}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

dessa forma obtêm-se a perturbação ótima do modelo (VIRIEUX e OPERTO, 2009),

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{m} &= -\left(\frac{\partial^2 E(\mathbf{m}_0)}{\partial \mathbf{m}^2}\right)^{-1} \frac{\partial E(\mathbf{m}_0)}{\partial \mathbf{m}} \\ &= -\left[\left(\frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{m}_0)}{\partial \mathbf{m}}\right)^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{m}_0)}{\partial \mathbf{m}}\right) + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{G}(\mathbf{m}_0)}{\partial \mathbf{m}^2}\right)^{\mathrm{T}}(\mathbf{G}(\mathbf{m}_0) - \mathbf{d})\right]^{-1} \\ &\quad \times \left(\frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{m}_0)}{\partial \mathbf{m}}\right)^{\mathrm{T}}(\mathbf{G}(\mathbf{m}_0) - \mathbf{d}) \\ &= \left[\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{L} - \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{m}}\right)^{\mathrm{T}}\Delta\mathbf{d}\right]^{-1}\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\Delta\mathbf{d}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

onde $\mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{m}_0)}{\partial \mathbf{m}} = \frac{\partial \mathbf{d}_{cal}}{\partial \mathbf{m}}$ é a matriz de derivadas de Fréchet de dimensão $m \times n$ (também conhecida como matriz de sensibilidade ou matriz Jacobiana) e $\Delta\mathbf{d} = \mathbf{d} - \mathbf{G}(\mathbf{m}_0) = \mathbf{d} - \mathbf{d}_{cal}$. Escrevendo de forma compacta a Equação 2.7, tem-se:

$$\Delta\mathbf{m} = [\mathbf{H}_a + \mathbf{H}_r]^{-1}\,\mathbf{g} \tag{2.8}$$

com

$$\mathbf{H}_a = \mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{L}, \tag{2.9}$$

$$\mathbf{H}_r = -\left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{m}}\right)^{\mathrm{T}} \Delta\mathbf{d} \tag{2.10}$$

e

$$\mathbf{g} = \mathbf{L}^{\mathrm{T}}\Delta\mathbf{d} = \left(\frac{\partial \mathbf{d}_{cal}}{\partial \mathbf{m}}\right)^{\mathrm{T}} \Delta\mathbf{d}. \tag{2.11}$$

Finalmente, o processo iterativo é realizado segundo a expressão

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{k+1} &= \mathbf{m}_k + \Delta\mathbf{m}_k \\ \mathbf{m}_{k+1} &= \mathbf{m}_k - \mathbf{H}_k^{-1}\mathbf{g}_k \end{aligned} \tag{2.12}$$

onde k indica a iteração atual e $k+1$ a iteração futura. Quando o método de Newton é implementado em problemas lineares quadráticos e próximos ao mínimo global, a solução é obtida em apenas uma iteração, se o gradiente e a Hessiana são calculados com precisão. Para problemas inversos não lineares de grande escala, o processo iterativo da Equação 2.12 requer um grande número de iterações para convergir até o mínimo (ou até atingir um determinado critério de parada).

Matematicamente, a matriz Hessiana fornece uma medida da curvatura local da superfície de erro n-dimensional para o modelo atual e descreve a variação da função objetivo em relação às alterações nos pares de parâmetros do modelo $\frac{\partial^2 E(\mathbf{m})}{\partial m_i m_j}$. No problema de inversão sísmica, ela contém informações cruciais no processo de reconstrução do modelo (SANTOSA e SYMES, 1999). A Hessiana atua como operador de deconvolução para compensar os efeitos de espalhamento geométrico e focalizar o gradiente (PRATT *et al.*, 1998). Porém, a matriz completa raramente é computada de forma explícita devido ao alto custo que representa seu cálculo, armazenamento e inversão a cada iteração. Portanto, outros métodos mais baratos têm sido propostos.

2.3.2 Método de Gauss-Newton

Dos dois termos que compõem a Hessiana completa, o segundo termo, $\mathbf{H}_r$, é o mais difícil de se calcular. Este termo representa as mudanças no vetor gradiente em relação aos eventos não-lineares de segunda ordem (PRATT *et al.*, 1998). MÉTIVIER *et al.* (2015) demonstraram a importância de se incluir este termo no contexto da inversão multiparamétrica, dado que permite diminuir a interferência (*cross-talk*) entre os parâmetros elásticos. No entanto, a Hessiana residual é frequentemente negligenciada com o argumento de que teria pouca influência quando os resíduos são pequenos ou quando o problema é quasi-linear (i.e. quando as não linearidades em $E(\mathbf{m})$ são pequenas) (TARANTOLA, 1987). O método de Gauss-Newton é derivado quando é considerada apenas a Hessiana aproximada, $\mathbf{H}_a$, onde a perturbação do modelo é dada pela expressão

$$\begin{aligned} &\Delta\mathbf{m} = \left(\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{L}\right)^{-1}\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\Delta\mathbf{d} \quad \text{ou} \\ &\Delta\mathbf{m} = \mathbf{H}_a^{-1}\mathbf{g}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

De forma iterativa, a solução do problema é obtida segundo a relação

$$\mathbf{m}_{k+1} = \mathbf{m}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k, \tag{2.14}$$

onde $\mathbf{p}_k = -\mathbf{H}_{a_k}^{-1}\mathbf{g}_k$ é definido como a direção de busca, e o passo α_k, assumido igual a 1 no método de Newton, é um valor escalar positivo calculado através de técnicas de busca em linha (e.g. *backtracking line-search*), que garantem a diminuição monótona da função objetivo e a convergência para o mínimo local segundo as condições de Wolfe (GAUTHIER *et al.*, 1986; NOCEDAL e WRIGHT, 2006). O passo deve ser pequeno o suficiente para evitar a divergência do algoritmo, e grande o suficiente para permitir que o algoritmo avance eficientemente. Outras alternativas para estimar o passo α_k consistem em métodos de interpolação quadrática ou cúbica (e.g. LIU *et al.*, 2017; VIGH *et al.*, 2009), ou pelo método de diferenças finitas (e.g. PRATT *et al.*, 1998; YANG *et al.*, 2015b) .

2.3.3 Gradiente descendente e Gradiente conjugado

Uma simplificação mais forte consiste em substituir a Hessiana $\mathbf{H}$ pela matriz identidade $\mathbf{I}$ e estabelecer a direção de busca simplesmente como o gradiente negativo, $\mathbf{p}_k = -\mathbf{g}_k$. Esta abordagem é conhecida como o método de gradiente descendente (GD), onde o valor da função objetivo é diminuído segundo a expressão:

$$\mathbf{m}_{k+1} = \mathbf{m}_k - \alpha_k \mathbf{g}_k. \tag{2.15}$$

Neste caso, o papel do passo α pode ser entendido como o valor que escala as unidades do vetor gradiente às unidades do modelo (PRATT *et al.*, 1998).

Devido à sua convergência linear, este método requer um maior número de iterações para atingir um mínimo da função objetivo e é considerado o método mais lento dos mencionados neste capítulo. Com efeito, existe a possibilidade de que o algoritmo de gradiente descendente escolha passos na mesma direção do que passos anteriores, tornando-o pouco eficiente.

Para contornar este problema, é possível atualizar o modelo fazendo com que a direção de busca seja uma combinação linear do gradiente atual com direções de busca anteriores (HU *et al.*, 2011). Esta ideia descreve o método dos gradientes conjugados (GC), que evita a busca repetitiva através da modificação do gradiente da equação 2.15 em cada iteração de uma forma elegante, em que não é necessário armazenar direções de busca anteriores a $\mathbf{p}_{k-1}$. A solução do problema de otimização pelo método dos gradientes conjugados é dada pela expressão:

$$\mathbf{m}_{k+1} = \mathbf{m}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k, \tag{2.16}$$

com

$$\mathbf{p}_k = \begin{cases} -\mathbf{g}_k, & \text{se } \; k = 0 \\ -\mathbf{g}_k + \beta_k \mathbf{p}_{k-1}, & \text{se } k \geq 1 \end{cases}, \tag{2.17}$$

onde β_k é um parâmetro escalar que possui muitas variantes, e cada uma delas leva a diferentes versões do algoritmo de GC. Algumas das mais populares são apresentadas

em REEVES e FLETCHER (1964) e POLAK e RIBIERE (1969). Neste trabalho, foi empregada a formulação de DAI e YUAN (1999), onde β é definido como:

$$\beta_k = \frac{\mathbf{g}_k^{\mathrm{T}} \mathbf{g}_k}{\mathbf{y}_k^{\mathrm{T}} \mathbf{p}_{k-1}}, \tag{2.18}$$

e $\mathbf{y}_k = \mathbf{g}_k - \mathbf{g}_{k-1}$. Note-se que na primeira iteração, as direções de busca dos métodos GD e GC são equivalentes.

Para acelerar a taxa de convergência dos métodos gradientes, é possível pré-condicionar o gradiente com qualquer informação referente à curvatura da função objetivo. Esta operação consiste basicamente em transformar o sistema de equações em um sistema com a mesma solução, mas com propriedades espectrais mais estáveis (RICKETT, 2003). Dentre os variados pré-condicionadores disponíveis no problema de inversão sísmica, neste trabalho foi utilizada a compensação por iluminação (PLESSIX e MULDER, 2004). Desta forma, a direção de busca da Equação 2.17 pode ser modificada como

$$\mathbf{p}_k = \begin{cases} -\mathbf{P}(\mathbf{m}_k)\mathbf{g}_k, & \text{se } \; k = 0 \\ -\mathbf{P}(\mathbf{m}_k)\mathbf{g}_k + \beta_k \mathbf{p}_{k-1}, & \text{se } k \geq 1 \end{cases}, \tag{2.19}$$

onde o operador diagonal $\mathbf{P}(\mathbf{m}_k)$ aproxima os efeitos da inversa da pseudo-Hessiana (SHIN *et al.*, 2001), normalizando o gradiente pelo campo da fonte para compensar a perda de iluminação na propagação direta.

2.3.4 Método Quasi-Newton (L-BFGS)

Os métodos quasi-Newton apresentam outra alternativa que leva em consideração a curvatura da função objetivo e ao mesmo tempo evita o calculo explícito da Hessiana. Isto é feito através de um operador inverso aproximado $\mathbf{B}^{-1} \approx \mathbf{H}^{-1}$, de modo que a atualização do modelo é da forma:

$$\mathbf{m}_{k+1} = \mathbf{m}_k - \alpha_k \mathbf{B}_k^{-1} \mathbf{g}_k. \tag{2.20}$$

Atualmente, o algoritmo de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno de memória limitada (L-BFGS) é o algoritmo mais popular dentro da família dos métodos quasi-Newton devido à sua eficiência, especialmente em problemas com grande número de variáveis (NOCEDAL e WRIGHT, 2006). Este método calcula recursivamente o produto $\mathbf{B}_k^{-1}\mathbf{g}_k$ com um número limitado l de pares de vetores gradiente e perturbações do modelo (de dimensão n), sem a necessidade de formar explicitamente a matriz $\mathbf{B}_k$ ou a sua inversa. Partindo de uma aproximação inicial $\mathbf{B}_{0_k}^{-1}$ (que pode, inclusive, variar a cada iteração) e adotando $\mathbf{y}_k = \mathbf{g}_{k+1} - \mathbf{g}_k$ e $\mathbf{s}_k = \mathbf{m}_{k+1} - \mathbf{m}_k$, a direção de busca para a $k-$ésima iteração é calculada da forma:

Algoritmo 1: Cálculo da direção de busca $\mathbf{p}_k = \mathbf{B}_k^{-1}\mathbf{g}_k$.

Entrada: $\mathbf{g}_k$ e $\mathbf{B}_{0_k}^{-1}$
início
  Faça $\mathbf{q} = \mathbf{g}_k$;
  para *i=k-1,...,k-l* **faça**
    $\rho_i = \frac{1}{\mathbf{y}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{s}_i}$
    $v_i = \rho_i \mathbf{s}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{q}$
    $\mathbf{q} = \mathbf{q} - v_i\mathbf{y}_i$
  fim para
  $\mathbf{r} = \mathbf{B}_{0_k}^{-1}\mathbf{q}$
  para *i=k-1,...,k-l* **faça**
    $\beta = \rho_i \mathbf{y}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_k$
    $\mathbf{p}_k = \mathbf{p}_k + \mathbf{s}_i(v_i - \beta)$
  fim para
  $\mathbf{p}_k = \mathbf{B}_k^{-1}\mathbf{g}_k$
fim

A grande vantagem do algoritmo recursivo para a aproximação de $\mathbf{B}_k^{-1}\mathbf{g}_k$ é que, sem considerar a multiplicação $\mathbf{B}_{0_k}^{-1}\mathbf{q}$, apenas $4ln$ multiplicações são realizadas.

Finalmente, a solução do problema é encontrada como apresentado no Algoritmo 2. Devido à sua convergência superlinear, o método L-BFGS usualmente requer menos iterações do que os métodos de gradiente descendente e gradientes conjugados.

Neste trabalho, os resultados obtidos com o algoritmo L-BFGS foram calculados através da biblioteca de otimização disponibilizada pelo consórcio *Seiscope* (MÉTIVIER e BROSSIER, 2016).

Algoritmo 2: Método L-BFGS.

Entrada: $\mathbf{m}_0$ e l
Saída: Aproximação para $\mathbf{m}^*$
início
  Faça $k = 0$;
  enquanto os critérios de parada não sejam satisfeitos,
    Escolha uma aproximação inicial para $\mathbf{B}_{0_k}^{-1}$
    Compute $\mathbf{p}_k = -\mathbf{B}_k^{-1}\mathbf{g}_k$ com o Algoritmo 1
    Calcule o passo α_k (busca em linha);
    $\mathbf{m}_{k+1} = \mathbf{m}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k$;
    se $k>l$ **então**
      Descartar os vetores $\mathbf{s}_{k-l}$ e $\mathbf{y}_{k-l}$
    fim se
    $\mathbf{s}_k = \mathbf{m}_{k+1} - \mathbf{m}_k$;
    $\mathbf{y}_k = \mathbf{g}_{k+1} - \mathbf{g}_k$;
    $k = k + 1$
  fim enquanto
fim

2.4 Problema inverso linear

Os problemas lineares fazem referência ao tipo de problema onde a relação entre os dados observados e o modelo de parâmetros é descrita linearmente. Neste caso, a Equação 2.1 é reescrita da forma

$$\mathbf{Lm} = \mathbf{d}, \tag{2.21}$$

onde $\mathbf{L}$ é um operador independente do modelo $\mathbf{m}$, que pode ser discretizado e representado por uma matriz retangular (PLESSIX, 2006).

Uma das abordagens mais adotadas para achar a solução destes problemas é o critério de mínimos quadrados, já que conduz a um sistema linear de equações. A função objetivo da Equação 2.4 pode ser reescrita como:

$$\min_{\mathbf{m}\in\mathbb{R}^n} \; E(\mathbf{m}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{Lm} - \mathbf{d}\|_2^2. \tag{2.22}$$

Em problemas lineares, a superfície de n-dimensões que conforma o espaço de soluções da função objetivo é convexa e o seu único mínimo local coincide com o mínimo global. Na Figura 2.2, é apresentado o espaço de soluções gerado pela função

quadrática para o caso em que $\mathbf{m} = (m_1, m_2)$.

A função objetivo é minimizada em relação ao modelo de parâmetros quando o gradiente $\mathbf{g} = \frac{\partial E(\mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}}$ é zero,

$$\frac{\partial E(\mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}} = \mathbf{L}^{\mathrm{T}}(\mathbf{L}\mathbf{m} - \mathbf{d}) = 0, \tag{2.23}$$

dando origem às equações normais

$$\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{L}\mathbf{m} = \mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{d}. \tag{2.24}$$

A solução formal de mínimos quadrados $\hat{\mathbf{m}}$ é obtida resolvendo o sistema:

$$\hat{\mathbf{m}} = (\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{L})^{-1}\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{d}. \tag{2.25}$$

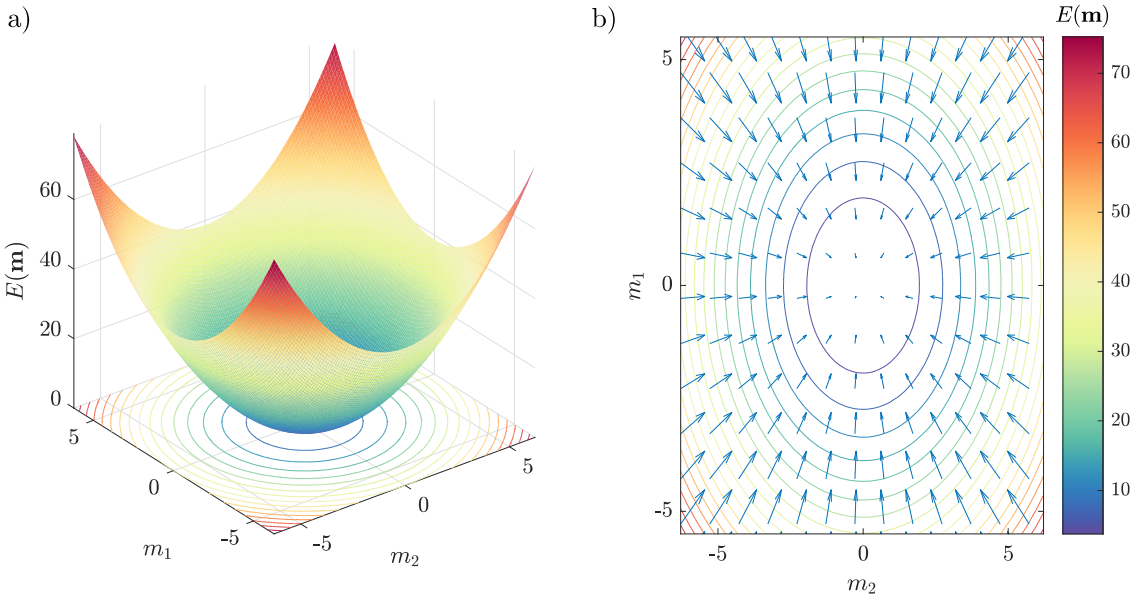

Figura 2.2: a) Representação gráfica da função objetivo de duas variáveis para o problema inverso linear. O espaço de solução tem forma de paraboloide. (b) Curvas de nível da função objetivo. Os vetores azuis indicam a magnitude e a direção negativa do gradiente $\mathbf{g}$, ortogonal às linhas de contorno.

Neste trabalho, o problema de migração RTM é abordado através da inversão linear por mínimos quadrados (LSRTM). O modelo a ser invertido é a distribuição da refletividade, $\Delta\mathbf{m}$, que representa as pertubações de vagarosidade do subsolo (DAI

et al., 2012). Tais perturbações originam eventos de reflexão nos dados sísmicos observados $\Delta\mathbf{d}$, através da ação do operador de modelagem direta linearizado $\mathbf{L}$ (i.e. a modelagem de Born). Em outras palavras, o problema consiste em resolver o sistema de equações sobredeterminado,

$$\mathbf{L}\Delta\mathbf{m} = \Delta\mathbf{d} \quad \text{ou} \tag{2.26}$$

$$\Delta\hat{\mathbf{m}} = (\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{L})^{-1}\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\Delta\mathbf{d} = (\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{L})^{-1}\Delta\mathbf{m}_{\mathrm{mig}}. \tag{2.27}$$

Neste contexto, $\mathbf{L}^{\mathrm{T}}$ representa o operador de migração reversa no tempo, definido como o adjunto[1] da modelagem linearizada, e $\Delta\mathbf{m}_{\mathrm{mig}} = \mathbf{L}^{\mathrm{T}}\Delta\mathbf{d}$ é a distribuição de refletividade inicial representada pela imagem migrada (CLAERBOUT, 1992).

NEMETH *et al.* (1999) apresentaram a solução iterativa para este problema seguindo o método do gradiente descendente:

$$\mathbf{g}_k = \mathbf{L}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{L}\Delta\mathbf{m}_k - \Delta\mathbf{d}\right) \tag{2.28}$$

$$\alpha = \frac{\mathbf{g}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{g}_k}{\left(\mathbf{L}\mathbf{g}_k\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{L}\mathbf{g}_k} \tag{2.29}$$

$$\mathbf{m}_{k+1} = \mathbf{m}_k - \alpha\mathbf{g}_k, \tag{2.30}$$

onde o passo α é calculado de forma analítica.

O cálculo do passo analítico α da Equação 2.29 pressupõe que o operador de migração é o operador adjunto exato da modelagem direta linearizada (JI, 2009; KÜHL e SACCHI, 2003). Convencionalmente, a RTM é implementada como uma função que extrapola o campo de ondas reversamente no tempo. Embora a extrapolação reversa seja conceitualmente o adjunto da extrapolação direta, em implementações numéricas esta condição é difícil de se atingir quando subrotinas computacionais substituem a ação das matrizes $\mathbf{L}$ e $\mathbf{L}^{\mathrm{T}}$. Com efeito, para propagadores no domínio da frequência, a implementação do operador adjunto é direta, enquanto na maioria

[1] O operador adjunto de um operador linear é o conjugado complexo transposto. Se o operador é real, o seu adjunto é idêntico ao operador transposto.

das aplicações reais de estêncis de diferenças finitas no domínio do tempo, a mesma subrotina de propagação direta é reutilizada na propagação reversa por simplificação (LIU *et al.*, 2019). Portanto, não é garantido que os dois operadores passem no teste do produto interno, ou seja, que os dois operadores sejam numericamente adjuntos[2].

Nos casos onde a migração atua como operador pseudo-adjunto, o cálculo do α analítico não é preciso o suficiente e pode afetar a convergência do processo iterativo (YANG *et al.*, 2015a). Para contornar esta condição, neste trabalho foi implementado o algoritmo de otimização L-BFGS descrito na seção anterior, que emprega critérios de busca em linha inexatos para determinar α_k a cada iteração a um custo mínimo.

Por último, é importante salientar que a Equação 2.13 e a Equação 2.27 são equivalentes se os dados observados são pré-processados para remover as múltiplas de ordens superiores (o que é comum no processamento convencional, onde são consideradas como ruído), ou algum termo de regularização é incluído para diminuir os eventos não lineares (SCHUSTER, 2017), posto que a matriz de sensibilidade $\mathbf{L}$ do problema de FWI corresponde ao operador de modelagem linearizado, também conhecido como operador de demigração, de forma que $\mathbf{L}\Delta\mathbf{m} = \Delta\mathbf{d}$. Deste modo, a atualização do método de Gauss-Newton para o problema de FWI pode ser considerado como um problema iterativo de migração por mínimos quadrados (PRATT *et al.*, 1998), ou em outras palavras, no contexto da FWI, a Hessiana aproximada do método de Gauss Newton é equivalente à Hessiana da inversão LSM. Baseado neste fato, alguns autores têm se referido ao problema de migração por mínimos quadrados como a inversão da forma de onda linearizada (LAILLY, 1983; TARANTOLA, 1984b).

[2]CLAERBOUT (1992) propôs o teste do produto interno como critério para verificar se dois operadores implementados numéricamente são exatamente adjuntos.

Capítulo 3

Inversão do campo de onda completo

Tendo em vista que a minimização da função objetivo depende da solução do problema direto e da atualização do modelo, este capítulo apresenta brevemente a equação que governa a propagação do campo de ondas acústico e as equações do método do estado adjunto para o cálculo eficiente do gradiente. Em seguida, são apresentadas aplicações da FWI no domínio do tempo em modelos 2D.

Por tratar-se de um problema inverso não linear e mal posto, duas estratégias de estabilização são implementadas para melhorar o desempenho do algoritmo. A primeira estratégia consiste em precondicionar o gradiente pela compensação de iluminação e comparar os resultados obtidos por diferentes métodos de otimização. A segunda estratégia mostra duas versões do método multiescala (BUNKS *et al.*, 1995), sendo estas a) a filtragem dos dados por um operador "passa-baixa", e b) a inversão com janelamento de offset.

3.1 A equação da onda acústica

Neste trabalho, o problema direto é governado pela equação da onda acústica escalar 2D. Tal abordagem foi adotada por exigir relativamente baixa demanda computacional e ao fato de que a inversão de dados acústicos é melhor condicionada

se comparada a outras abordagens mais complexas (VIRIEUX e OPERTO, 2009), uma vez que o meio é descrito por apenas um tipo de parâmetro.

Na sua forma mais simples, esta equação diferencial parcial hiperbólica de segunda ordem descreve o comportamento do campo de pressão em um meio acústico, isotrópico, sem variações de densidade e sem amortecimento intrínseco, excitado por uma fonte pontual, segundo a relação

$$\left(\frac{1}{c^2\left(\mathbf{x}\right)}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) u\left(\mathbf{x},t\right) = f\left(t\right)\delta\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}_s\right), \tag{3.1}$$

onde $\mathbf{x} = (x, z)$ é o vetor espacial bidimensional, t representa o tempo, $u\left(\mathbf{x},t\right)$ é o campo de pressão, $f\left(t\right)$ representa o termo da fonte posicionada em $\mathbf{x}_s$, $c\left(\mathbf{x}\right)$ é a velocidade de propagação acústica, δ simboliza a função delta de Dirac e ∇^2, expresso como

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right), \tag{3.2}$$

é o operador Laplaciano no domínio 2D.

3.1.1 Discretização pelo método das diferenças finitas

No presente trabalho, o método numérico empregado para resolver computacionalmente a equação da onda acústica foi o método das diferenças finitas. Escolheu-se um operador de diferenças de segunda ordem para a derivada temporal e um estêncil de quarta ordem para aproximar o operador Laplaciano.

A segunda derivada temporal é discretizada como uma aproximação de diferença central, expressa como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u_{t+1} - 2u_t + u_{t-1}}{\Delta t^2}, \tag{3.3}$$

que aplicada na Equação 3.1 leva a

$$\mathbf{u}_{t+1} = 2\mathbf{u}_t - \mathbf{u}_{t-1} + c^2\Delta t^2(\nabla^2\mathbf{u}_t + \mathbf{f}), \tag{3.4}$$

onde t denota o passo de tempo atual, e $\mathbf{u}$ e $\mathbf{f}$ são os operadores discretos do campo

de pressão e a fonte, respectivamente. É possível expressar a Equação 3.4 em forma matricial como

$$\mathbf{U}\mathbf{u}_{t+1} + \mathbf{V}\mathbf{u}_t + \mathbf{W}\mathbf{u}_{t-1} = \mathbf{f}_t, \tag{3.5}$$

onde as matrizes $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ tem dimensão $n \times n$, sendo n o número total de pontos da malha de diferenças finitas, que neste caso, representa o número total de parâmetros a serem invertidos. De maneira simbólica, para todos os passos de tempo m, tem-se o sistema:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{V} & \mathbf{W} & & & & & 0 \\ & \mathbf{U} & \mathbf{V} & \mathbf{W} & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & \mathbf{U} & \mathbf{V} & \mathbf{W} & \\ & & & & & \mathbf{U} & \mathbf{V} & \\ 0 & & & & & & \mathbf{U} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_m \\ \mathbf{u}_{m-1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_m \\ \mathbf{f}_{m-1} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_1 \end{bmatrix}, \tag{3.6}$$

que pode ser resolvido substituindo diretamente os valores conhecidos a partir da última linha da matriz de dimensão $(m \times n \times n)^2$, em um algoritmo de marcha temporal explícito. A vantagem deste esquema é que não é necessário decompor a matriz do sistema para achar a solução do campo de ondas (MARFURT, 1984).

3.1.2 Condições iniciais e de contorno

Para que a Equação 3.1 tenha solução única, deve-se prescrever determinadas condições iniciais e de contorno. No experimento sísmico, o problema físico está definido em um meio semi-infinito $\Omega = \{(x, z) | -\infty \leq x \leq \infty, 0 \leq z \leq \infty\}$, sendo que para o limite superior é estabelecida a condição de pressão nula $u(x, z = 0, t) = 0$, que descreve a interface entre a atmosfera e a superfície do subsolo (ou da água), responsável pela geração de múltiplas da superfície (AKI *et al.*, 1977). Por outro lado, as condições iniciais caracterizam o meio em equilíbrio no início da observação;

$$u(\mathbf{x}, t = 0) = \frac{\partial u(\mathbf{x}, t = 0)}{\partial t} = 0, \tag{3.7}$$

de forma que o campo de ondas é gerado exclusivamente pelo termo da fonte pontual.

Como a modelagem computacional é realizada em um domínio finito truncado numericamente $\hat{\Omega} = \{(x, z) | -a \leq x \leq a, 0 \leq z \leq b\}$, as bordas laterais e inferior do domínio geram reflexões espúrias se não são tratadas adequadamente. Para reduzir este fenômeno, as condições de contorno não-reflexivas de REYNOLDS (1978) são empregadas neste trabalho. Em termos gerais, estas condições supõem que a fonte sísmica está suficientemente afastada das bordas, de maneira que nestes pontos é possível neutralizar as ondas incidentes (consideradas como frentes de ondas planas), impondo condições baseadas na fatoração de primeira ordem da Equação 3.1, como onda unidirecional (KEYS, 1985). Por exemplo, a equação:

$$\left(\frac{1}{c(\mathbf{x})} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) u(\mathbf{x}, t) = 0 \tag{3.8}$$

tem como solução apenas ondas que se propagam para a direita ($x \to +\infty$). Neste caso, as ondas que se propagam para a esquerda não são consideradas, e portanto a Equação 3.8 é aplicada como condição na borda direita do modelo. De forma similar, as demais condições são estabelecidas para as bordas restantes.

As condições de contorno de Reynolds conseguem atenuar eficientemente reflexões com ângulo de incidência normal. Para atenuar frentes de onda com ângulos de incidência diferentes, neste trabalho foram implementadas, adicionalmente, as camadas de absorção de CERJAN *et al.* (1985). A ideia desta técnica consiste em estender as bordas do modelo acrescentando uma faixa de N pontos adicionais e diminuir paulatinamente a amplitude do campo de pressão nessa região, através da multiplicação de uma função exponencial a cada passo de tempo, dada pela expressão

$$C(i) = \exp\left[-\text{fat}\,(\text{N} - n)^2 \right], \tag{3.9}$$

onde n é o número do nó da malha a partir da camada de absorção e fat é o fator de amortecimento. Nos experimentos sintéticos desenvolvidos nas seções subsequentes deste trabalho, o valor do coeficiente de aborsção foi definido como fat=0.0053, e

N=45 pontos, baseado nos resultados apresentados em BORDING (2004).

É importante mencionar que nos experimentos numéricos desenvolvidos também foram consideradas condições de Reynolds e Cerjan na borda superior, que simulam uma etapa de pré-processamento dos dados com a finalidade de eliminar a múltipla da superfície.

3.2 Cálculo do gradiente pelo método do estado adjunto

Como visto no capítulo anterior, o gradiente é o responsável pela atualização do modelo de parâmetros nos métodos de otimização local de primeira ordem. Ele pode ser determinado numericamente perturbando cada um dos parâmetros m_i do modelo $\mathbf{m}_0$ e calculando a variação da função objetivo com respeito a tal perturbação. No entanto, para uma quantidade n grande de parâmetros, essa abordagem requer pelo menos de $n + 1$ modelagens diretas para cada fonte, caso sejam utilizadas diferenças finitas de primeira ordem, o que é computacionalmente inviável. Outra forma deficiente de obter o gradiente é por meio da matriz de sensibilidade e a técnica de fonte virtual (PRATT, 1999).

Para problemas de grande escala, o cômputo eficiente do gradiente é realizado através do método do estado adjunto, que evita o cálculo explícito das derivadas de Fréchet. Sua formulação pode ser desenvolvida com base na teoria de perturbação (FICHTNER e TRAMPERT, 2011) ou com o método de multiplicadores de Lagrange para otimização com restrição (BUNKS *et al.*, 1995). Uma revisão abrangente do método do estado adjunto para a equação da onda acústica orientada ao problema da inversão sísmica por mínimos quadrados no domínio do tempo e na frequência é apresentado em (PLESSIX, 2006).

Para obter a formulação do gradiente da função objetivo pelo método do estado adjunto, primeiro é conveniente reescrever a Equação 3.6 em termos da equação do

estado:

$$\mathbf{A}(\mathbf{m})\mathbf{u} = \mathbf{f} \tag{3.10}$$

onde $\mathbf{A}(\mathbf{m}) = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)$ é o operador de modelagem direta. Calculando a derivada em relação ao modelo de parâmetros $\mathbf{m}$, obtém-se a expressão

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{m}}\mathbf{u} + \mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{m}} &= \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{m}} \\ &= 0,\end{aligned} \tag{3.11}$$

pois o termo fonte não depende do modelo de parâmetros. Organizando a Equação 3.11, tem-se

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{m}} = -\mathbf{A}^{-1}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{m}}\mathbf{u}. \tag{3.12}$$

Reconhecendo que as medições $\mathbf{d}_{cal}$ são um subespaço do campo de pressão $\mathbf{u}$ segundo a relação,

$$\mathbf{d}_{cal} = \mathbf{R}\mathbf{u}, \tag{3.13}$$

onde $\mathbf{R}$ é o operador diagonal que limita as medições de cada experimento à posição dos receptores, a Equação 3.12 representa uma expressão alternativa para a matriz de sensibilidade

$$\frac{\partial \mathbf{d}_{cal}}{\partial \mathbf{m}} = -\mathbf{R}\mathbf{A}^{-1}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{m}}\mathbf{u}. \tag{3.14}$$

Substituindo a Equação 3.14 na Equação 2.11, obtem-se:

$$\mathbf{g} = -\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{m}}\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\Delta\mathbf{d}. \tag{3.15}$$

Neste ponto, o campo adjunto $\mathbf{u}_a$ é definido como

$$\mathbf{u}_a = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\Delta\mathbf{d}, \tag{3.16}$$

que pode ser reescrito

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}_a = \mathbf{f}_a, \tag{3.17}$$

onde o termo da fonte adjunta é definido como $\mathbf{f}_a = \mathbf{R}^{\mathrm{T}}\Delta\mathbf{d}$.

Substituindo a Equação 3.16 na Equação 3.15, obtemos o gradiente pelo método do estado adjunto

$$\mathbf{g} = -\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\mathbf{m}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{u}_a. \tag{3.18}$$

Basicamente, esta formulação consiste em calcular a correlação cruzada no "lag-zero" entre o campo de ondas da fonte sísmica, u, propagado diretamente, e o campo adjunto, u_a, gerado a partir da propagação reversa no tempo dos resíduos na posição dos r receptores (TROMP *et al.*, 2005). Desta forma, e considerando todas as fontes, o l-ésimo elemento do vetor gradiente da função objetivo é determinado segundo a relação:

$$\mathrm{g}_l = \frac{\partial E(\mathbf{m})}{\partial m_l} = -\sum_f \int_0^T u(\mathbf{x},t)\frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{m})}{\partial m_l}u_a(\mathbf{x},T-t)\,\mathrm{d}t \tag{3.19}$$

onde T é o tempo total de gravação, $(T-t)$ revela a propagação em tempo reverso, e o subíndice f indica o número total de fontes sísmicas.

Se o modelo for parametrizado pela vagarosidade compressional $\mathbf{m} = \frac{1}{c(\mathbf{x})}$, tem-se $\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial m_l} = 2m_l\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ e a Equação 3.19 é reescrita da maneira seguinte:

$$\mathrm{g}_l = \sum_f 2m_l\int_0^T u_a(\mathbf{x},T-t)\frac{\partial^2 u(\mathbf{x},t)}{\partial t^2}\,\mathrm{d}t \tag{3.20}$$

Note-se que os dois campos de onda requeridos pela Equação 3.20 não podem ser calculados simultaneamente porque as fontes de um dependem do outro.

3.3 Algoritmo da FWI

Tendo a modelagem da equação da onda, o método do estado adjunto e os algoritmos de otimização numérica como base, a inversão FWI é executada iterativamente de acordo com o fluxo seguinte:

1. Para cada fonte f e um conjunto de receptores r, gera-se o dado sintético $\mathbf{d}_{cal}$ para um modelo inicial $\mathbf{m}_0$ através da Equação 3.1.

2. Calcula-se o resíduo entre dados observados e dados calculados, $\Delta\mathbf{d}$, e a função objetivo $E(\mathbf{m}_0)$ de norma L_2.

3. Obtém-se o gradiente $\mathbf{g}(\mathbf{m}_0)$ para todos os pontos do modelo, segundo a Equação 3.20.

4. Estima-se o passo α que minimiza a função objetivo na direção de busca $\mathbf{p}(\mathbf{m}_0)$.

5. Atualiza-se o modelo de parâmetros $\mathbf{m}_1 = \mathbf{m}_0 + \alpha\mathbf{p}(\mathbf{m}_0)$

6. Gera-se o dado sintético $\mathbf{d}_{cal}$ para o modelo atualizado $\mathbf{m}_1$.

7. Calcula-se o resíduo $\Delta\mathbf{d}$ e a função objetivo $E(\mathbf{m}_1)$ para o modelo atualizado.

8. Se o critério de parada não é satisfeito, $\mathbf{m}_0 = \mathbf{m}_1$ e retorna ao passo 3. Caso contrário, finaliza a inversão e $\mathbf{m}_1$ é a solução do problema.

3.4 Pré-condicionamento do gradiente pela diagonal da pseudo-Hessiana

O gradiente formado pela correlação cruzada de dois campos de onda sofre efeitos de divergência esférica, o que resulta em perda de amplitude para refletores profundos e uma taxa de convergência lenta quando são implementados métodos de otimização local de primeira ordem (HUANG, 2015). É possível aliviar o efeito da curvatura da função objetivo ao longo da direção do gradiente escolhendo um pré-condicionador $\mathbf{P} \approx \mathbf{H}^{-1}$ para acelerar a convergência e obter resultados geologicamente consistentes (SCHUSTER, 2017). Assim, o sistema de Newton pré-condicionado pode ser expresso como:

$$\mathbf{PH}\Delta\mathbf{m} = \mathbf{Pg}. \tag{3.21}$$

Diversos pré-condicionadores tem sido desenvolvidos para a FWI. Por exemplo, o método de Gauss-Newton utiliza a inversa da Hessiana aproximada $\mathbf{H}_a^{-1} = \left(\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{L}\right)^{-1}$, que ajuda a equilibrar a amplitude do gradiente em profundidade com os elementos

da diagonal e focalizar a imagem com os termos fora da diagonal (PRATT *et al.*, 1998). Contudo, $\mathbf{H}_a$ ainda é muito cara para ser calculada e invertida diretamente.

Para o problema de migração reversa no tempo, SHIN *et al.* (2001) propuseram usar a matriz pseudo-Hessiana como substituta da Hessiana aproximada. A vantagem da matriz pseudo-Hessiana é que ignora a função de Green dos receptores[1], i.e., o campo de ondas propagado desde os receptores até os parâmetros do modelo, fazendo com que sua computação seja eficiente, pois apenas é necessário calcular a correlação entre o campo de onda da fonte.

Para agilizar o cálculo do operador de pré-condicionamento, neste trabalho foi considerada apenas a diagonal da matriz pseudo-Hessiana, onde cada elemento da diagonal corresponde à autocorrelação do campo da fonte propagado em profundidade, que ilumina um ponto específico do modelo. A diagonal da pseudo-Hessiana contém apenas elementos positivos, portanto é sempre simétrica e positivo-definida, o que a torna uma boa escolha durante a inversão (DAI *et al.*, 2012).

Como a autocorrelação da função de Green dos receptores é ignorada, os elementos da diagonal da pseudo-Hessiana não escalam corretamente as amplitudes do gradiente, mas oferecem melhor iluminação para os refletores mais profundos (MÉTIVIER *et al.*, 2013).

O pré-condicionador empregado neste trabalho consiste na inversa da diagonal da pseudo-Hessiana e é dado pela expressão

$$\mathbf{P}(\mathbf{m}_k) = \begin{bmatrix} P_{1,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P_{n,n} \end{bmatrix}, \tag{3.22}$$

onde cada elemento da diagonal corresponde ao valor escalar

$$P_{i,i} = \frac{1}{(2m_i)^2 \sum_f \int_T \frac{\partial^2 u(\mathbf{x}_i,t)}{\partial t^2}\,\mathrm{d}t + \beta}, \tag{3.23}$$

[1]Segundo demonstrado por PLESSIX e MULDER (2004), a função de Green dos receptores é considera como uma constante baixo a hipótese de cobertura infinita dos receptores.

sendo que $\frac{\partial^2 u(\mathbf{x}_i,t)}{\partial t^2}$ representa a segunda derivada temporal do campo, e β é um fator de estabilidade que evita a divisão entre zero. Note-se que $\mathbf{P}$ é dependente do modelo de parâmetros $\mathbf{m}_k$ que modifica o percurso do campo de ondas a cada atualização do processo iterativo. Portanto, o pré-condicionador deve ser calculado a cada nova iteração k.

3.4.1 Experimentos numéricos no modelo Camembert

Para demonstrar a ação do gradiente pré-condicionado pela inversa da diagonal da pseudo-Hessiana e avaliar seu desempenho em diferentes métodos de otimização local, o processo de inversão FWI acústico no domínio do tempo foi implementado sobre o modelo Camembert(GAUTHIER *et al.*, 1986). Este modelo está constituído por um meio homogêneo de velocidade constante $v_p = 1500$ m/s, com uma anomalia circular na região central, de velocidade 10% superior à do meio homogêneo, tal como mostra a Figura 3.1. O modelo é discretizado com uma malha regular de diferenças finitas de tamanho 400×200 pontos, com espaçamento de 10 m entre cada um dos nós.

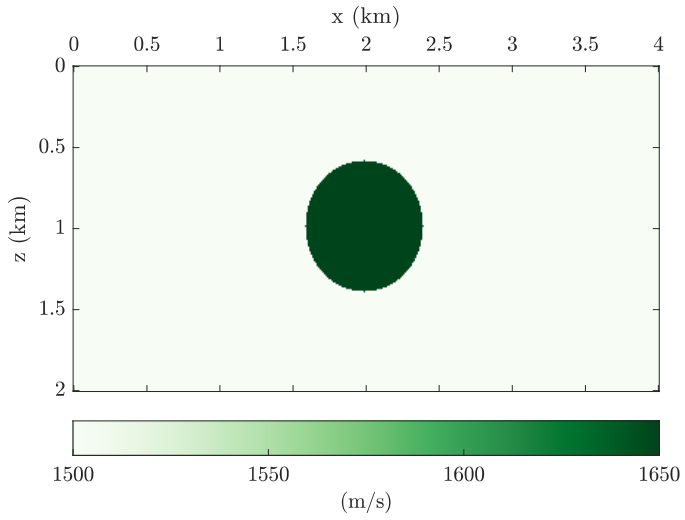

Figura 3.1: Modelo Camembert.

Foi simulada uma aquisição sísmica com 400 receptores enterrados a 20 metros da superfície e espaçados uniformemente a uma distância de 10 metros entre eles, e 21 fontes pontuais enterradas à mesma profundidade dos receptores, distribuídas

horizontalmente a cada 200 metros. A assinatura da fonte, assumida como conhecida, é uma *wavelet* tipo Ricker, com 15 Hz de frequência de corte. A geometria da aquisição é do tipo *fixed spread*, onde cada geofone permanece fixo e ativo para todas as fontes. O tempo total de gravação foi de 3 segundos com uma amostragem temporal de 0.001 segundos.

O modelo inicial é um meio homogêneo com velocidade $v_p = 1500$ m/s, pois o objetivo da inversão é recuperar a anomalia de velocidade. Para tanto, os seguintes métodos de otimização numérica foram considerados: Gradiente descendente (GD), Gradiente descendente pré-condicionado (P-GD), Gradiente conjugado (GC), Gradiente conjugado pré-condicionado (P-GC), LBFGS, e LBFGS pré-condicionado (P-LBFGS). O número de gradientes armazenados para o algoritmo LBFGS é estabelecido em $l = 5$. Para o algoritmo P-LBFGS, o pré-condicionador $\mathbf{P}$ é estabelecido como o parâmetro $\mathbf{B}_{0_k}^{-1}$ apresentado na seção 2.3.4 (MÉTIVIER *et al.*, 2013).

Os resultados da inversão são apresentados na Figura 3.2, onde é possível observar como os métodos de otimização sem pré-condicionamento conseguem recuperar apenas o conteúdo de alta frequência da anomalia para as primeiras 15 iterações (Figuras 3.2.a, c, e). De acordo com MORA (1989), as componentes de baixa frequência do modelo são difíceis de recuperar porque são não lineares em relação aos resíduos. O método LBFGS recupera de forma mais eficiente a parte baixa da anomalia, devido ao fato de que estima uma aproximação da Hessiana e portanto obtém informação da curvatura da função objetivo, o que acelera o seu processo de convergência em comparação aos métodos gradientes. No entanto, na Figura 3.3 é possível observar que a função objetivo fica estagnada nas últimas iterações do LBFGS, o que indica a possível convergência para um mínimo local.

Quando o pré-condicionamento é incorporado na inversão, aprecia-se um ganho em todos os métodos de otimização, mesmo para o número limitado de fontes consideradas neste experimento. Pode-se concluir que, para este modelo, a presença do pré-condicionador ajuda a introduzir as componentes de baixa frequência do modelo nas primeiras iterações e desta forma atingir a convergência com menos avaliações.

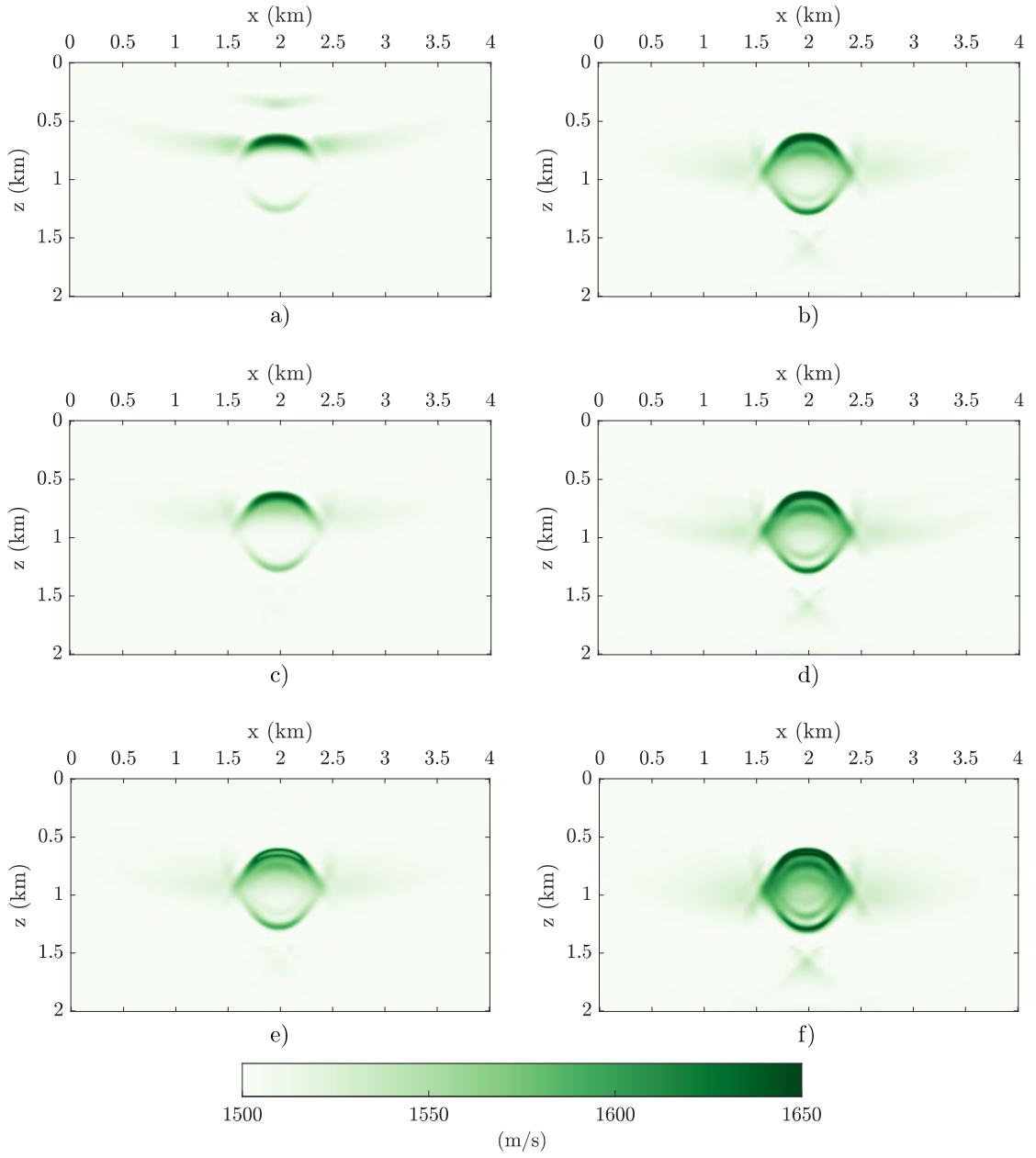

Figura 3.2: Resultados da inversão FWI para 15 iterações com diferentes métodos de otimização. a) Gradiente descendente (GD). b) Gradiente descendente pré-condicionado (P-GD). c) Gradiente conjugado (GC). d) Gradiente conjugado pré-condicionado (P-GC). e) LBFGS. f) LBFGS pré-condicionado (P-LBFGS).

De todos os métodos considerados, o algoritmo P-LBFGS ofereceu o resultado mais próximo do modelo real, de acordo com a teoria. Uma outra forma de avaliar os resultados é observando o perfil vertical de velocidade no meio do modelo, apresentado na Figura 3.4. A diagonal da matriz pseudo-hessiana é apresentada na Figura 3.5, para a última iteração do método P-LBFGS.

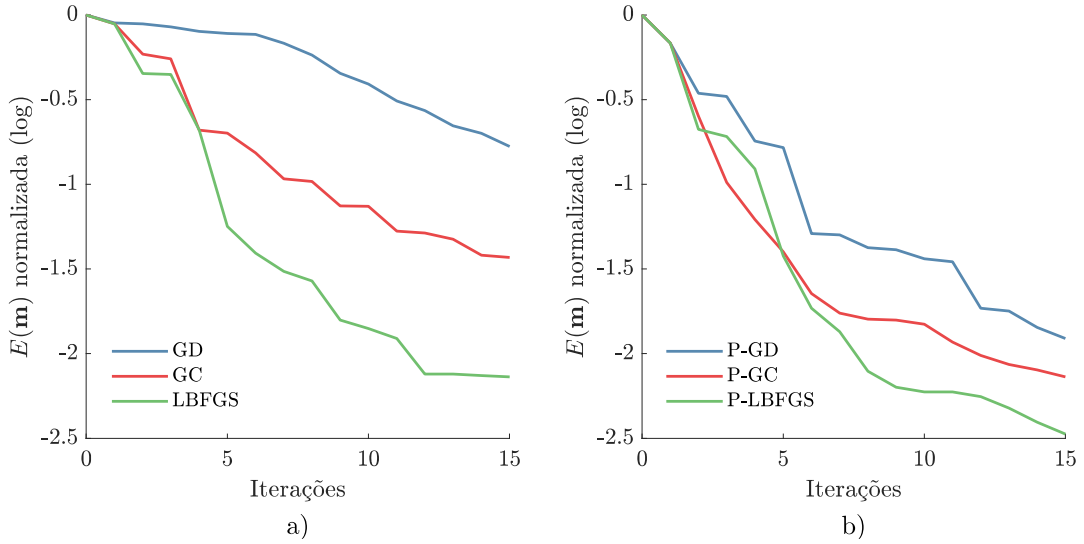

Figura 3.3: Evolução da função objetivo para: a) métodos sem pré-condicionamento do gradiente, e b) métodos com pré-condicionamento do gradiente.

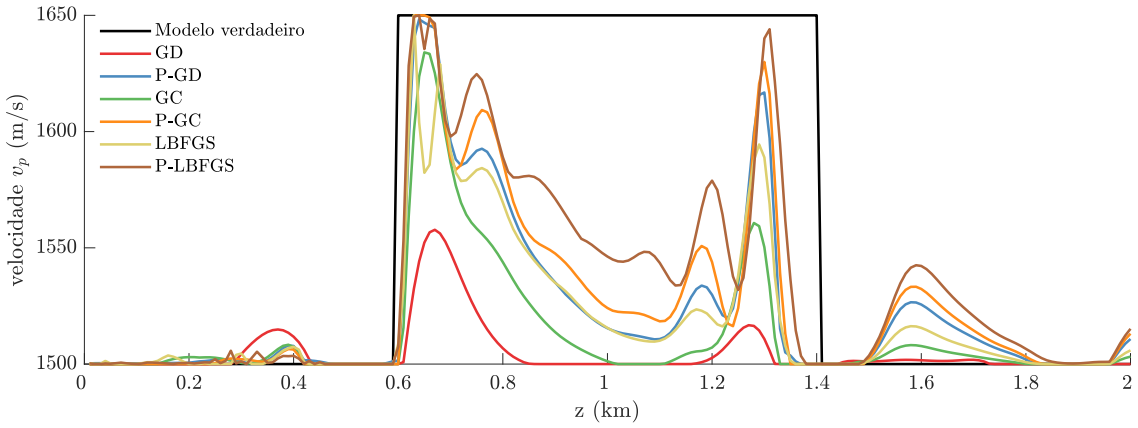

Figura 3.4: Comparação dos perfis verticais para os diferentes modelos estimados, extraídos na posição (x,z)=(2000,0) m.

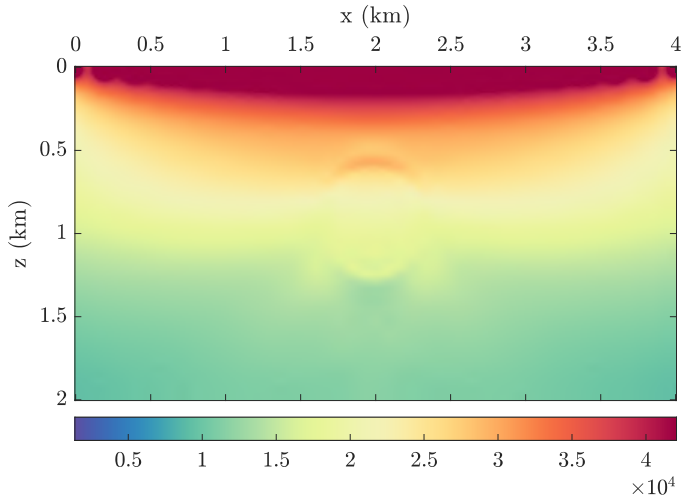

Figura 3.5: Diagonal da pseudo-Hessiana para a última iteração do método P-LBFGS.

3.4.2 Experimentos numéricos no modelo Marmousi

O pré-condicionamento pela diagonal da pseudo-Hessiana foi implementado no modelo Marmousi (VERSTEEG, 1994), apresentado na Figura 3.6.a. Este modelo contém alta complexidade geológica, com fortes mudanças horizontais e verticais de velocidade. A região de maior interesse é a do reservatório localizado no topo do anticlinal, aproximadamente a 2 km de profundidade na parte direita do modelo.

Nesta seção apenas são apresentados os resultados obtidos com o método LBFG, sem e com o pré-condicionamento do gradiente, pois demonstraram ser mais eficientes para atingir a convergência em relação aos outros métodos de otimização. O modelo inicial é apresentado na Figura 3.6.b, e a Tabela 3.1 mostra os parâmetros de aquisição e inversão estabelecidos neste experimento.

É simulada uma aquisição sísmica marinha onde a velocidade da camada de água embaixo da superfície é conhecida, e portanto o gradiente da função objetivo não é atualizado nestes pontos ao longo das iterações. Para a modelagem dos dados calculados foram empregados os mesmos parâmetros adotados na modelagem dos dados observados, cometendo o "crime inverso". Apesar do objetivo principal ser recuperar o campo de velocidades compressivas, o meio é parametrizado pelo campo de vagarosidades $\mathbf{m} = \frac{1}{c}$, inspirado na análise apresentada por ANAGAW e SACCHI (2018). No total foram realizadas 140 iterações, tomando como critério de parada adicional um valor da função objetivo de 1%.

Os campos de velocidade invertidos são apresentados na Figura 3.7. Adicionalmente, a evolução da função objetivo para ambos os testes é mostrada na Figura 3.8. Ambos os resultados recuperam corretamente a parte rasa do modelo e a região intermediária da parte esquerda, onde a geologia está constituída praticamente por camadas horizontais. No entanto, nenhuma abordagem consegue recuperar corretamente regiões mais complexas do modelo, especialmente a região em torno do reservatório. A complexidade do modelo geológico demanda a implementação de técnicas que estabilizem a inversão para possibilitar resultados mais próximos com o modelo verdadeiro e diminuir a dependência com o modelo inicial.

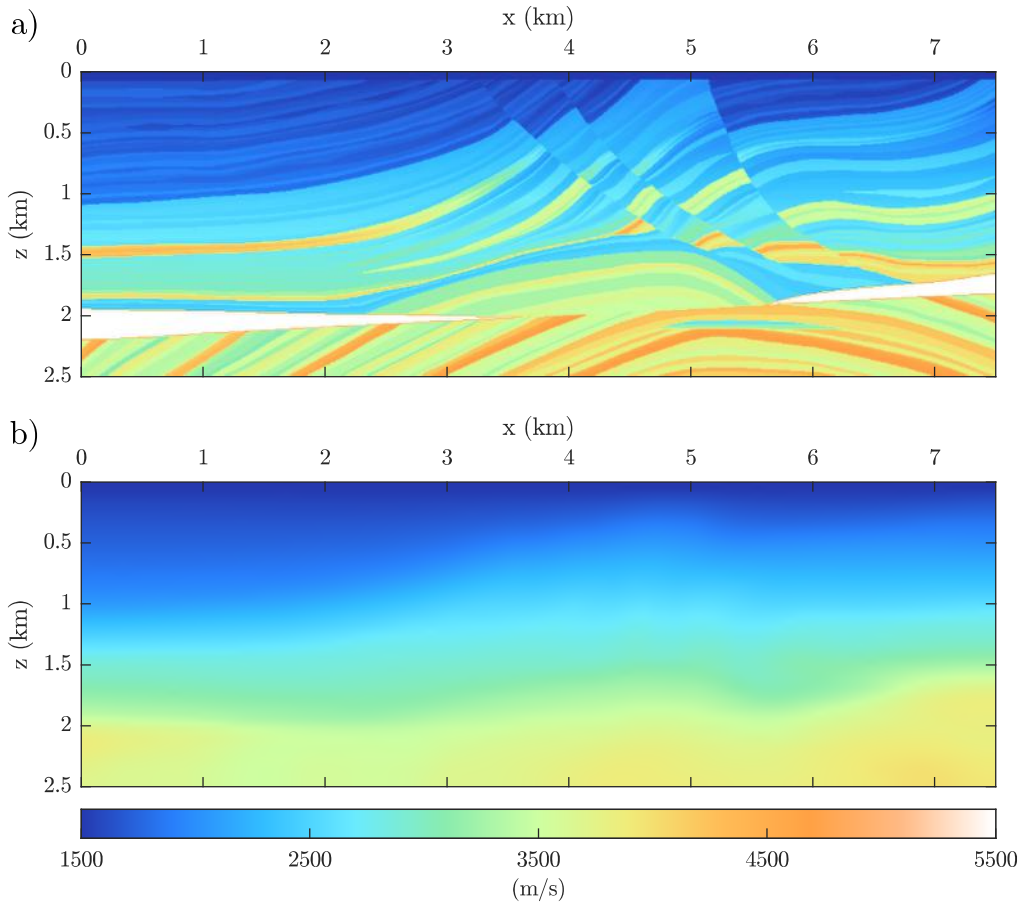

Figura 3.6: Modelo Marmousi. a) Modelo verdadeiro. b) Modelo inicial utilizado na inversão FWI.

Tabela 3.1: Parâmetros utilizados na modelagem e inversão do modelo Marmousi

Parâmetros	Valor
Número de pontos	751×250
Espaçamento da malha	10 m
Amostragem temporal	0.001
Tempo de gravação	5 segundos
Número de tiros	63
Espaçamento entre tiros	120 m
Profundidade dos tiros	20 m
Número de receptores	751
Espaçamento entre receptores	10 m
Profundidade dos receptores	20 m
Frequência de corte da fonte (Ricker)	30 Hz
Número de gradientes armazenados (LBFGS)	5
Número máximo de iterações	140
Critério de parada adicional	$\frac{E(\mathbf{m}_k)}{E(\mathbf{m}_0)} < 1\%$

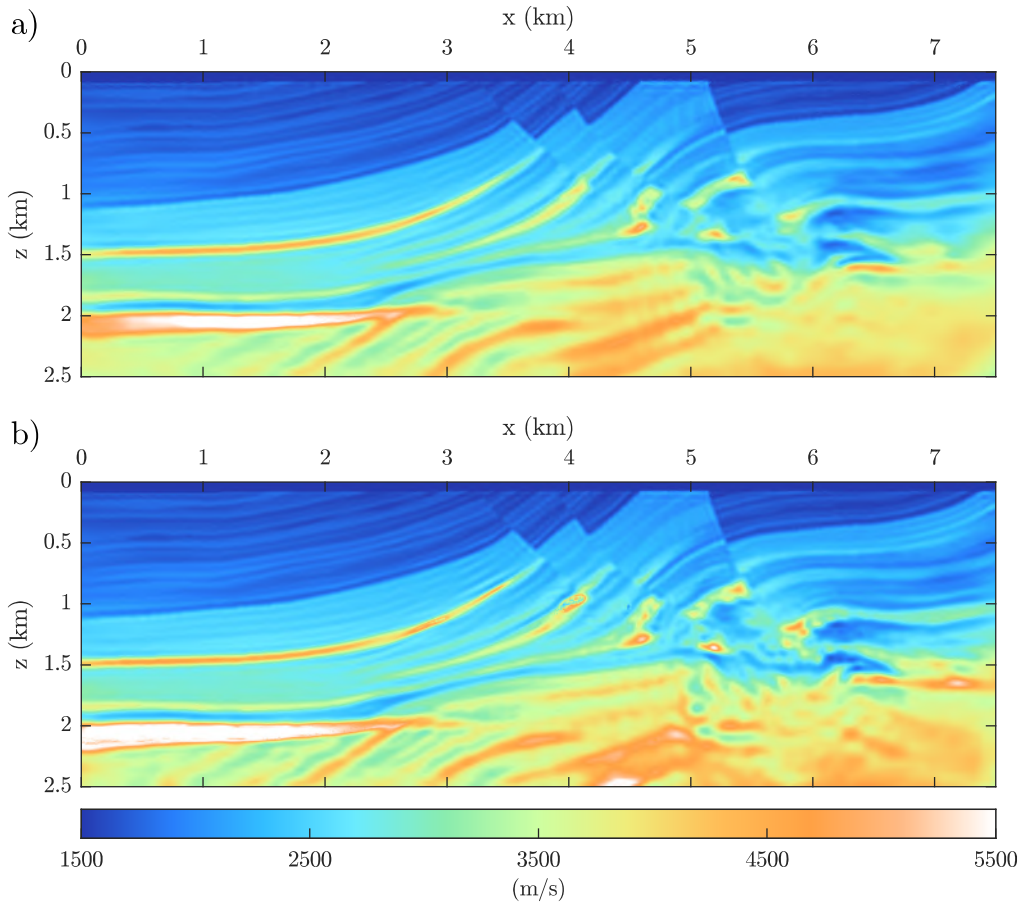

Figura 3.7: Modelo de velocidade recuperado a) sem pré-codicionamento do gradiente, e b) com pré-condicionamento.

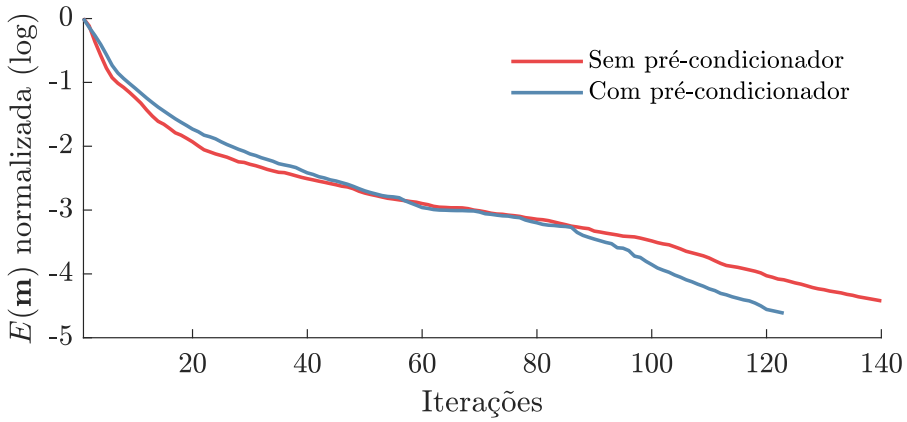

Figura 3.8: Evolução da função objetivo.

Por outro lado, a influência do pré-condicionador permitiu atingir a convergência antes de finalizar as 140 iterações pré-estabelecidas, acelerando o processo de inversão. Mesmo longe do modelo verdadeiro, esta abordagem permitiu se aproximar mais rápido da solução. Isto é verificado através da evolução do erro médio entre o

modelo obtido e o modelo verdadeiro, apresentada na Figura 3.9. O erro médio é definido como

$$\text{Erro médio} = \frac{1}{n_x n_z} \sum_{i}^{n_x} \sum_{j}^{n_z} |v_{i,j} - \hat{v}_{i,j}| \,, \tag{3.24}$$

onde $v_{i,j}$ e $\hat{v}_{i,j}$ são os valores da velocidade no ponto (i, j) nos modelos recuperado e exato, respectivamente, e n_x e n_z são o número de pontos do modelo nas direções horizontais e verticais, respectivamente.

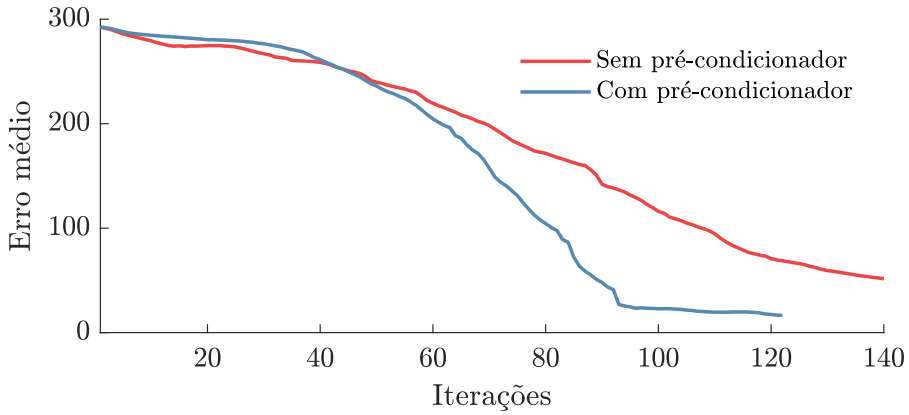

Figura 3.9: Variação do erro médio ao longo das avaliações do processo iterativo para o modelo Marmousi.

3.5 Estratégias multi-escala no domínio do tempo

Como mencionado anteriormente, a inversão FWI é um problema mal posto com mínimos locais, onde a função objetivo de mínimos quadrados pode ser pouco eficiente se o modelo inicial estiver longe do mínimo global. Inclusive, um bom modelo inicial pode não estar na região de atração do mínimo global, devido, principalmente, ao problema conhecido como salto de ciclo (*cycle-skipping*). Este problema refere-se ao ajuste errado dos dados produzido por parte do algoritmo de otimização local, quando a diferença entre os tempos de chegada dos dados observados e os dados calculados é maior do que meio período do comprimento de onda dominante (VIRIEUX e OPERTO, 2009).

Por outro lado, o subsolo é composto por elementos que variam amplamente em escala, pelo que faz sentido tentar resolver o problema da FWI em escalas separadas.

Para escalas maiores (i.e. frequências espaciais mais baixas), a presença de mínimos locais na função objetivo é menor e o modelo inicial tem maior probabilidade de estar dentro da região de atração do mínimo global. O fato de que a complexidade da função objetivo esteja diretamente relacionada com o conteúdo do número de onda do modelo é a base da abordagem multi-escala proposta por BUNKS *et al.* (1995). De forma iterativa, o problema é resolvido desde as escalas maiores até as menores. Em outras palavras, o processo de inversão começa considerando modelos suaves com baixo número de onda, e progressivamente, em iterações posteriores, as feições de alto número de onda são incorporadas na inversão.

A seguir são apresentadas duas estratégias multi-escala para resolver a inversão FWI no domínio do tempo.

3.5.1 Multiescala por filtragem em faixas de frequências

A primeira estratégia abordada consiste em realizar o processo de inversão em bandas de frequências separadas, obtidas através da implementação de um filtro passa-banda nos dados observados. A fonte também é filtrada nas bandas de frequências desejadas para garantir que os dados sintéticos tenham o mesmo conteúdo de frequência dos dados observados. A assinatura da fonte é assumida como conhecida ou determinada previamente à inversão.

Diversos filtros tem sido propostos para a filtragem dos dados sísmicos no contexto da abordagem multiescala. Por exemplo, BUNKS *et al.* (1995) empregaram um filtro tipo Hanning para bandas de frequência selecionadas arbitrariamente. Neste trabalho, foi considerado o filtro passa-baixa tipo Wiener proposto por BOONYASIRIWAT *et al.* (2009), que oferece melhores resultados quando a fonte original é conhecida, se comparado com outros filtros convencionais. O filtro é definido no domínio da frequência como

$$f_{\text{Wiener}}(\omega) = \frac{W_{\text{destino}}(\omega) W^{\dagger}_{\text{original}}(\omega)}{|W_{\text{original}}(\omega)|^2 + \beta^2}, \tag{3.25}$$

onde f_{Wiener} é o filtro Wiener, † é o complexo conjugado, W_{original} é a transformada de Fourier da *wavelet* de entrada, W_{destino} é a transformada da *wavelet* de baixa frequência, ω é a frequência angular e β é um operador de estabilização que evita a divisão entre zero.

Desta forma, o resultado da inversão da banda anterior serve como modelo inicial para a banda seguinte, que considera um maior conteúdo de frequências. Portanto, mais um passo é acrescentado no algoritmo da seção 3.3, considerando a inversão em cada banda de frequência. A Figura 3.10.b mostra o efeito do filtro Wiener para uma frequência de corte de 10 Hz, sobre um sismograma com 30 Hz de frequência de corte. A Figura 3.11 mostra o espectro de amplitude do dado original e do dado filtrado.

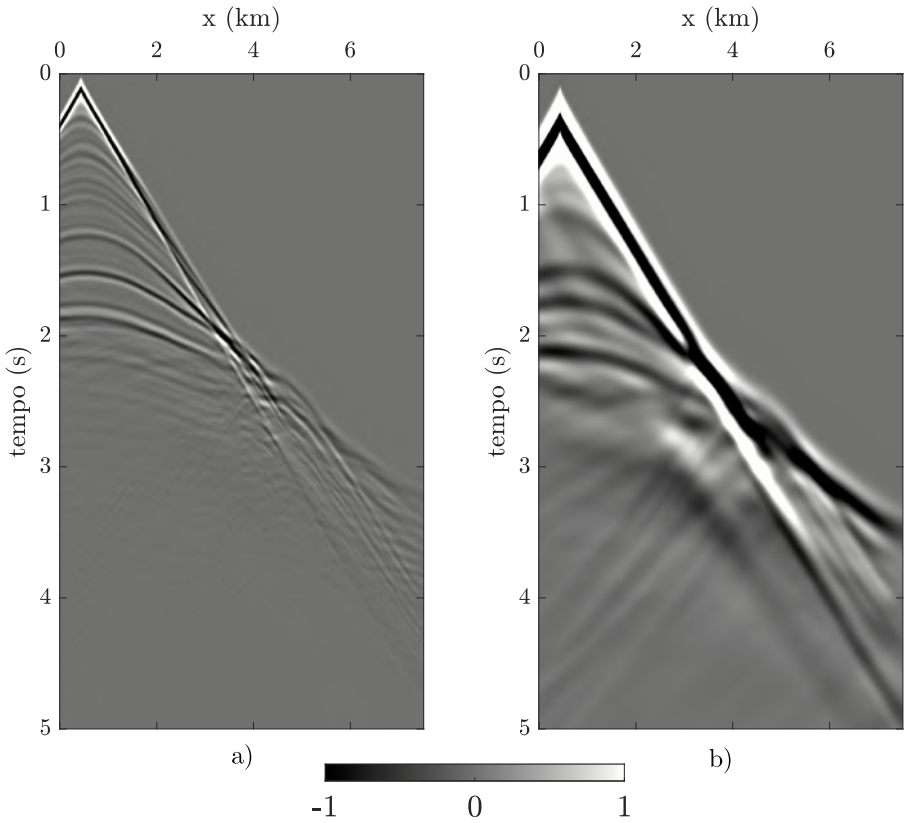

Figura 3.10: Filtragem dos dados pelo filtro Wiener. a) Dado original com frequência de corte de 30 Hz. b) Dado filtrado com frequência de corte de 10 Hz.

Diversos métodos têm sido propostos para garantir a seleção de bandas de frequência ótimas para a FWI no domínio do tempo, tentando reduzir a redundância de informação do número de onda nos dados (e.g. BOONYASIRIWAT *et al.*, 2009;

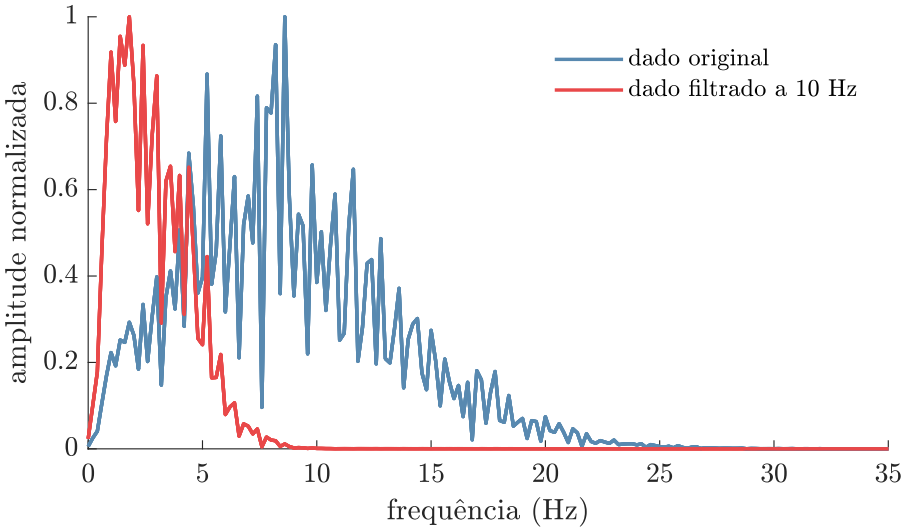

Figura 3.11: Espectros de amplitude dos sismogramas apresentados na Figura 3.10.

LIU *et al.*, 2017). Neste trabalho não foi considerado nenhum critério para a seleção de bandas. Os intervalos de frequência foram selecionadas de forma heurística.

3.5.2 Multiescala por janelamento de offset

MORA (1989) demonstrou que a FWI atua em dois modos: um modo de migração, relacionado aos números de onda altos do modelo que podem ser obtidos por migração iterativa, e um modo tomográfico, relacionado aos números de onda baixos do modelo que podem ser recuperados dos dados de transmissão. Se um conjunto de dados contiver principalmente reflexões de offsets curtos, somente os números de onda altos são reconstruídos pelo processo de FWI convencional. Geralmente, nos traços de longos offsets predomina a presença de ondas mergulhantes (refratadas) e reflexões pós-críticas com informação relacionada aos macro componentes do modelo de velocidade (ZHOU *et al.*, 2015). Se o offset do levantamento for longo o suficiente, é possível registrar os tempos de trânsito das ondas mergulhantes nas partes mais profundas do modelo. Por outro lado, uma das vantagens de resolver a FWI no domínio do tempo é que permite restringir a inversão a uma determinada faixa de eventos do campo de ondas através do janelamento no domínio dos dados.

Baseado nesta ideia, a segunda estratégia de inversão FWI abordada nesta dissertação consistiu em começar o processo de inversão considerando apenas os traços

de offset longo com o objetivo de reconstruir primeiro as componentes de baixo número de onda do modelo de velocidade, impondo uma janela que zera as componentes de offsets curtos. Uma vez que o macro modelo de velocidade é reconstruído, offsets menores são incorporados para posicionar corretamente os refletores. Assim, a função objetivo de mínimos quadrados pode ser reescrita na forma

$$\min_{\mathbf{m}\in\mathbb{R}^n} \; E(\mathbf{m}) = \frac{1}{2}\sum_{i}^{N} \left\|\mathbf{J}_i\left(\mathbf{d}_{cal}\left(\mathbf{m}\right) - \mathbf{d}_{obs}\right)\right\|_2^2, \tag{3.26}$$

onde $\mathbf{J}_i$ é o operador que restringe o cálculo dos resíduos para uma configuração específica de janelas de offset, e N é o número de janelas totais consideradas durante o processo de inversão. A Figura 3.12 mostra esquematicamente a estratégia de janelamento de offset para dois tiros diferentes de uma aquisição.

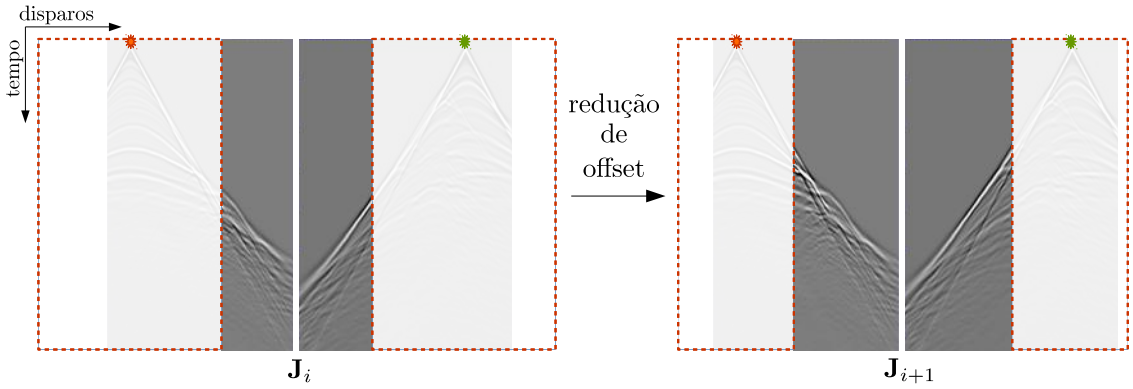

Figura 3.12: Janelamento de offset empregado na inversão para dois tiros perto dos extremos esquerdo e direito de um levantamento 2D, representados pela estrela vermelha e a estrela verde, respectivamente. A parte dos dados contida dentro da janela delimitada em vermelho é zerada durante o calculo dos resíduos.

3.5.3 Experimentos numéricos no modelo Marmousi

Nesta seção são apresentados os resultados dos experimentos numéricos realizados no modelo Marmousi, empregando as duas abordagens multiescala mencionadas anteriormente. As dimensões do modelo, os parâmetros da modelagem e o modelo inicial para a inversão são iguais aos descritos na seção 3.4.2. Ambos resultados foram obtidos com o algoritmo LBFGS e o gradiente foi pré-condicionado pela diagonal da pseudo-Hessiana.

Para a estratégia de filtragem de frequências, foram consideradas 7 bandas de frequência, começando a partir dos 3 Hz com intervalos de 4.5 Hz até cobrir a faixa completa de 30 Hz, estabelecendo um critério de parada de 20 iterações por cada banda de frequência.

No caso do janelamento de offset, empregou-se, de forma similar, 7 tamanhos diferentes de janelas retangulares. A inversão começou considerando uma janela com extensão de 7500 m (751 receptores), centrada na posição de cada fonte. A cada 20 iterações foi diminuído o tamanho da janela, aumentando o número de receptores aceitos em 15%, até abarcar o número total de receptores. A dimensão vertical de todas as janelas permaneceu fixa e igual ao tempo total de gravação.

Os modelos de velocidade obtidos pela filtragem de frequências e o janelamento de offset são apresentados nas Figuras 3.13.a e 3.13.b, respectivamente. A Figura 3.14 mostra o comportamento das funções objetivo normalizadas com relação ao número de iterações. Comparar a convergência das duas estratégias seria injusto, posto que as funções objetivo representam experimentos diferentes em cada caso. No entanto, em ambas estratégias é observada uma redução da função objetivo. Nota-se que a cada 20 iterações é produzido um pico correspondente ao incremento da banda de frequências (Figura 3.14.a), ou a uma diminuição nas dimensões da janela (Figura 3.14.b), segundo o caso.

Uma forma de comparar qual estratégia produziu o resultado mais próximo da solução em diferentes regiões do modelo é calculando o erro relativo em cada ponto, definido pela expressão:

$$\text{Erro relativo}_{i,j} = \frac{\hat{v}_{i,j} - v_{i,j}}{\hat{v}_{i,j}}, \tag{3.27}$$

onde $\hat{v}$ é o modelo verdadeiro e v o modelo obtido na última iteração. Os erros relativos para cada estratégia são ilustrados na Figura 3.15, onde verifica-se que as camadas de maior contraste e as regiões perto das bordas do modelo ficaram melhor reconstruídas para o experimento de filtragem de frequências. Este resultado pode ser explicado pelo fato de que a abordagem de filtragem considerou uma banda de

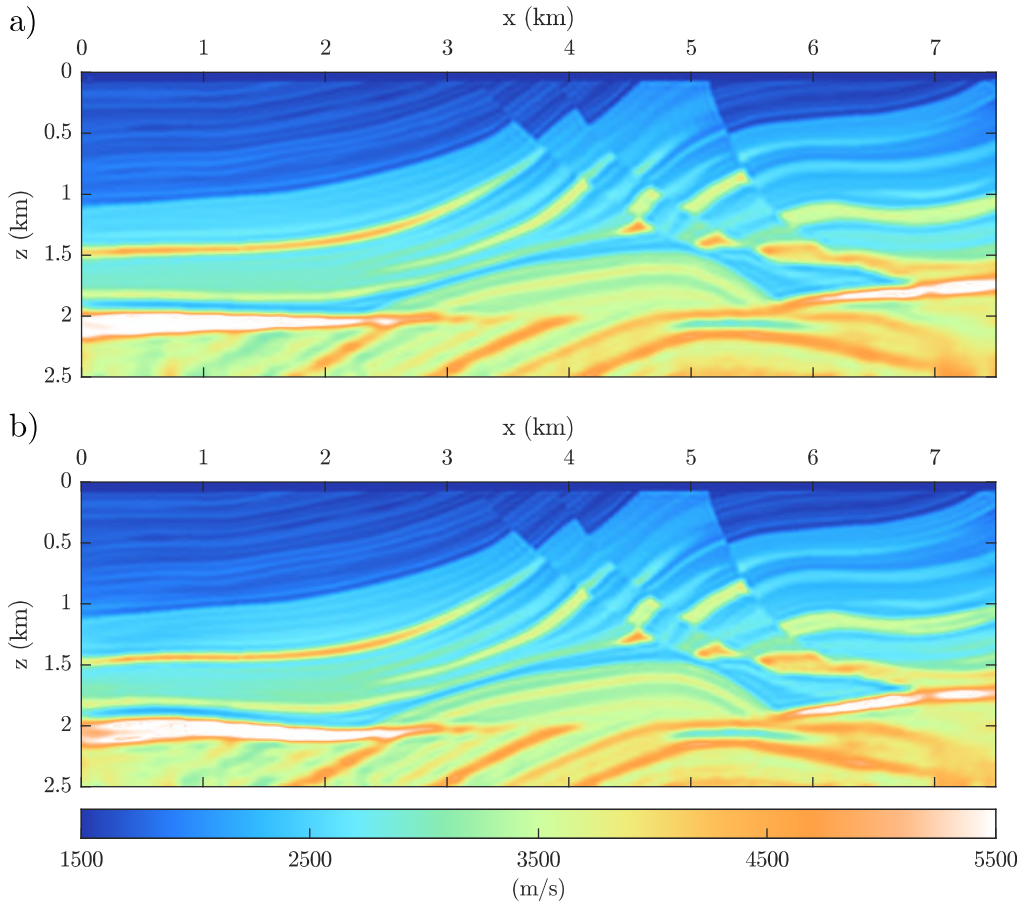

Figura 3.13: Resultado da inversão multiescala no modelo Marmousi. a) Multiescala por filtragem de frequências. b) Multiescala por janelamento de offset.

frequência inicial de até 3 Hz, considerada excepcionalmente baixa, enquanto que as primeiras iterações da estratégia por janelamento apresentam, além das ondas transmitidas, eventos não lineares correspondentes a reflexões tardias e múltiplas de ordens superiores que contaminam a inversão dos elementos de grande escala, pelo que a não linearidade nesta última estratégia é maior, prejudicando o resultado final. No entanto, em termos gerais, ambos os métodos apresentaram resultados coerentes com a geologia do modelo. A implementação de critérios de janelamento mais robustos, ou inclusive a combinação destas duas estratégias em um processo único (i.e. janelar os dados filtrados em frequência) poderia oferecer melhores resultados.

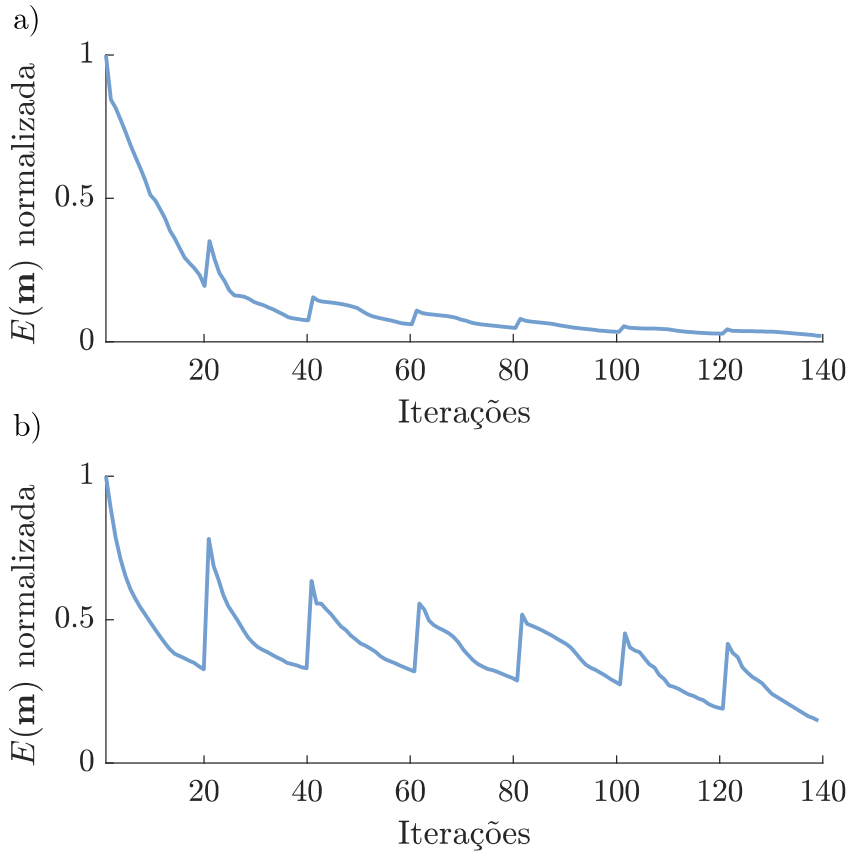

Figura 3.14: Evolução da função objetivo. a) Multiescala por filtragem de frequências. b) Multiescala por janelamento de offset.

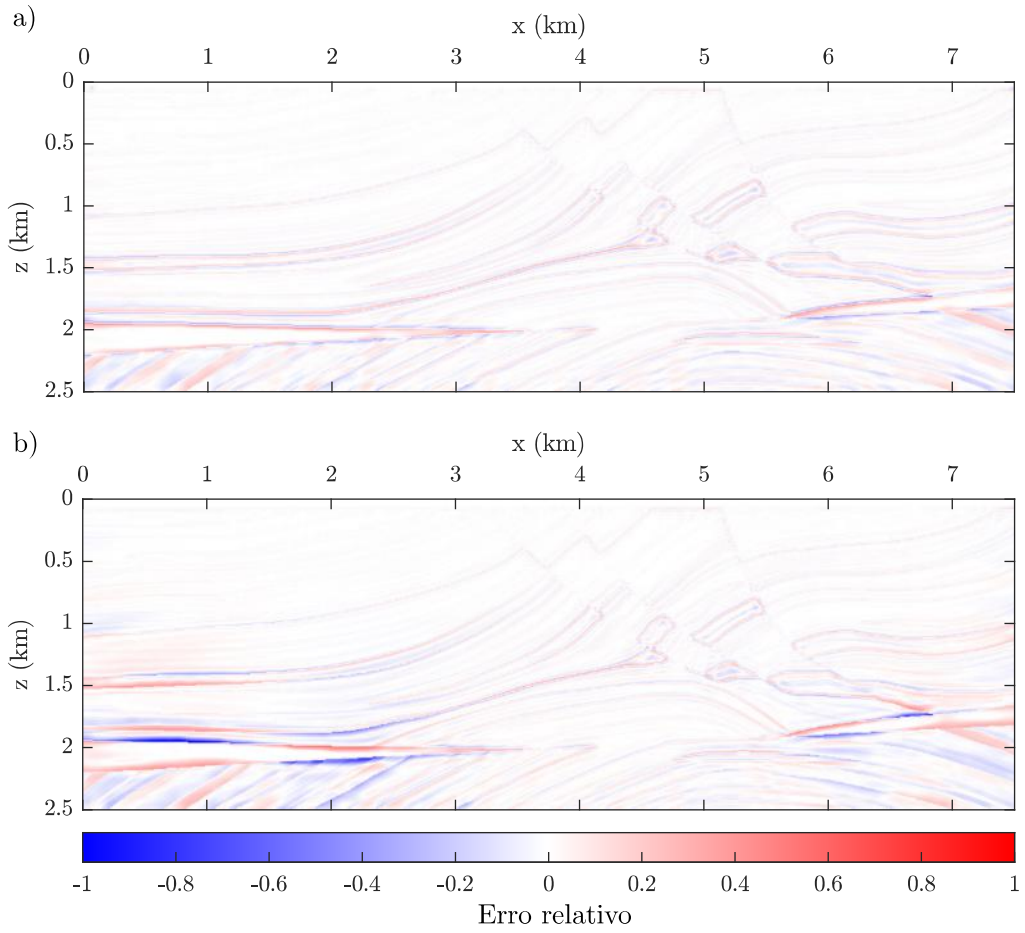

Figura 3.15: Erro relativo entre os modelos invertidos e o modelo verdadeiro. a) Multiescala por filtragem de frequências. b) Multiescala por janelamento de offset.

Capítulo 4

Migração reversa no tempo por mínimos quadrados

O esquema de inversão sísmica não linear apresentado no capítulo anterior pode ser adaptado alternativamente como problema inverso linear. Neste caso, ao invés de considerar modelos de vagarosidade como parâmetro da inversão, o problema visa recuperar as descontinuidades do modelo, representadas por perturbações de velocidade ou refletividade. A solução é o modelo que melhor ajusta os dados observados no sentido de mínimos quadrados, segundo a relação linear dada pelo operador **L**. Isto é conseguido através da adoção da equação da onda linearizada como problema direto e de um processo iterativo de migração conhecido como LSRTM. A LSRTM é complementar à FWI no sentido de que fornece modelos de alto número de onda com resolução melhorada, em comparação à técnica de migração RTM.

Existem dois subprocessos principais no algoritmo de LSRTM convencional: a migração RTM e a modelagem linear (também conhecida como demigração). Neste capítulo são descritos ambos os métodos de forma breve, para definir as bases da técnica de LSRTM no domínio do dado. Adicionalmente, são apresentados três experimentos numéricos com a finalidade de demonstrar a eficiência da técnica no que diz respeito à obtenção de imagens sísmicas com amplitudes melhor preservadas e maior conteúdo de frequência.

4.1 Linearização do problema direto

A equação da onda estabelece o vínculo entre a velocidade, a densidade e o campo de ondas sísmico. Porém, não existe um parâmetro explícito que represente os refletores, causadores dos eventos de espalhamento. É necessário então parametrizar a equação da onda em termos da relação entre o campo de ondas sísmico e os refletores. Para isso, é possível escolher entre duas abordagens: a primeira é a aproximação de Born e a segunda é a aproximação de Kirchhoff. YAO *et al.* (2017) demostraram que a imagem LSRTM baseada na aproximação de Kirchhoff é a derivada da imagem baseada na aproximação de Born, ou seja, que as imagens produzidas com os dois métodos têm uma diferença de fase de 90°.

Neste trabalho foi adotada a modelagem de Born como algoritmo de demigração, e, portanto, na seção seguinte é apresentada a modelagem do campo espalhado baseada na aproximação de Born de primeira ordem, para o caso da equação de onda acústica com densidade constante.

4.1.1 Modelagem do campo espalhado

Assumindo que o modelo de vagarosidade da subsuperfície, $s(\mathbf{x})$, pode ser representado como a soma entre o modelo de vagarosidade de fundo, $s_0(\mathbf{x})$, e a perturbação, $\delta m(\mathbf{x})$, definida como a refletividade, tem-se

$$s(\mathbf{x}) = s_0(\mathbf{x}) + \delta m(\mathbf{x}), \tag{4.1}$$

$$s^2(\mathbf{x}) = s_0^2(\mathbf{x}) + 2s_0(\mathbf{x})\delta m(\mathbf{x}) + \delta m^2(\mathbf{x}), \tag{4.2}$$

$$s^2(\mathbf{x}) \approx s_0^2(\mathbf{x}) + 2s_0(\mathbf{x})\delta m(\mathbf{x}). \tag{4.3}$$

De forma similar, o campo de ondas $u(\mathbf{x}, t)$ que satisfaz a equação da onda acústica,

$$\left(s^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) u = f, \tag{4.4}$$

pode ser fragmentado segundo a expressão

$$u(\mathbf{x},t) = u_0(\mathbf{x},t) + \delta u(\mathbf{x},t), \tag{4.5}$$

onde $u_0(\mathbf{x},t)$ é o campo incidente propagado na vagarosidade de fundo $s_0(\mathbf{x})$,

$$\left(s_0^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) u_0 = f, \tag{4.6}$$

e $\delta u(\mathbf{x},t)$, denominado campo espalhado, é definido como

$$\delta u(\mathbf{x},t) = u(\mathbf{x},t) - u_0(\mathbf{x},t). \tag{4.7}$$

Substituindo as equações 4.3 e 4.5 na Equação 4.4, obtém-se,

$$\left(\left(s_0^2 + 2s_0\delta m\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)(u_0 + \delta u) = f \tag{4.8}$$

ou, de forma equivalente,

$$\left(s_0^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)(u_0 + \delta u) = -2s_0\delta m \frac{\partial^2 (u_0 + \delta u)}{\partial t^2} + f. \tag{4.9}$$

Subtraindo o campo incidente (Equação 4.6) da Equação 4.9, a expressão que define explicitamente o campo espalhado, $\delta u(\mathbf{x},t)$, é dada por

$$\left(s_0^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\delta u = -2s_0\delta m \frac{\partial^2 (u_0 + \delta u)}{\partial t^2}. \tag{4.10}$$

Esta equação é não linear com relação a $\delta u(\mathbf{x},t)$ visto que o termo da fonte do lado direito da equação também depende do campo espalhado. Uma solução aproximada é dada pela aproximação de Born de primeira ordem: $u_0(\mathbf{x},t) + \delta u(\mathbf{x},t) \approx u_0(\mathbf{x},t)$ para $u_0(\mathbf{x},t) \gg \delta u(\mathbf{x},t)$, válida quando a refletividade do meio é pequena o suficiente para ignorar as múltiplas contidas em δu. Desta forma, a expressão que rege o campo

espalhado é escrita como

$$\left(s_0^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) \delta u \approx -2 s_0 \delta m \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}, \tag{4.11}$$

onde percebe-se que δu se propaga no meio de fundo, s_0, quando é excitado pela fonte proporcional ao produto entre o campo incidente, u_0, previamente calculado pela Equação 4.6, e à refletividade, δm. Como o campo δu não é considerado na fonte da Equação 4.11, apenas são modeladas as reflexões primárias produzidas nos pontos onde o campo incidente coincide com as perturbações do meio em profundidade.

Nota-se ainda, que o campo espalhado é escalado linearmente segundo o termo da refletividade. Portanto, a relação linear do problema direto em forma compacta pode ser estabelecida como

$$\mathbf{L}\delta\mathbf{m} = \delta\mathbf{d}, \tag{4.12}$$

onde $\delta\mathbf{d}$ é o campo espalhado registrado nas coordenadas dos receptores, e $\mathbf{L}$ representa a modelagem de Born, solução do sistema formado pelas equações 4.6 e 4.11. Desta maneira, a modelagem linear, e consequentemente a inversão linear, tornam-se possíveis. A linearidade representada pela Equação 4.12 indica que se um novo difrator for adicionado ao modelo $\delta\mathbf{m}$, então um único novo evento de difração será adicionado à resposta $\delta\mathbf{d}$.

Por outro lado, o modelo de refletividade pode ser representado por um conjunto de M pontos espalhadores da forma

$$\delta m(\mathbf{x}) = \sum_{i}^{M} \delta m \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i), \tag{4.13}$$

onde $\mathbf{x}_i$ indica a coordenada espacial do i-ésimo ponto espalhador. Assim, a solução da equação 4.11 é considerada como uma representação do princípio de Huygens, onde as reflexões registradas em superfície são o resultado da superposição do campo de onda espalhado por cada um dos pontos que compõem as perturbações do meio.

4.1.2 Derivada de Fréchet

Segundo o teorema de Green, a representação integral do campo espalhado descrito pela Equação 4.11, é definida como

$$\delta u(\mathbf{x}_r, t, \mathbf{x}_f) = \int g_0(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}) * f_{\delta u}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_f)\, \mathrm{d}\mathbf{x} \tag{4.14}$$

$$= \int g_0(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}) * \left(-2 s_0(\mathbf{x}) \delta m(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u_0(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_f)}{\partial t^2} \right) \mathrm{d}\mathbf{x}, \tag{4.15}$$

onde $*$ denota o operador de convolução e $g_0(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x})$ é a função de Green que satisfaz a equação da onda acústica propagada no meio de fundo, s_0, segundo a relação

$$\left(s_0(\mathbf{x})^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) g(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_f) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_f)\delta(t). \tag{4.16}$$

Substituindo a Equação 4.13 na Equação 4.15, calculando a integral, e dividindo por δm_i, tem-se a expressão que define a derivada parcial do dado calculado com respeito aos parâmetros do modelo, conhecida na literatura como a derivada de Fréchet (DAI *et al.*, 2012):

$$\frac{\delta u(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_f)}{\delta m_i} = g_0(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_i) * \left(-2 s_0(\mathbf{x}_i) \frac{\partial^2 u_0(\mathbf{x}_i, t; \mathbf{x}_f)}{\partial t^2} \right). \tag{4.17}$$

A derivada de Fréchet é fundamental para o cálculo do gradiente da função objetivo de mínimos quadrados, pois avalia a sensibilidade dos dados em relação a perturbações dos parâmetros físicos. Também é empregada na análise de resolução de imagens obtidas por migração RTM, LSRTM, ou a inversão FWI (SCHUSTER, 2017).

4.1.3 Validação da modelagem de Born

As condições que validam a aproximação de Born dependem das propriedades do meio de fundo e da perturbação. A validade do método em relação à modelagem sísmica é avaliada, por exemplo, em WU e XIE (2009) e MOSER (2012). Em termos

gerais, o modelo de fundo usado deve estar próximo do modelo verdadeiro para que a refletividade $\delta m(\mathbf{x})$ produza espalhamentos fracos. A seguir, são apresentados dois exemplos que demostram o desempenho da modelagem do campo espalhado pela modelagem de Born.

O primeiro exemplo consiste em um modelo homogêneo de velocidade $v_p = 1500$ m/s com dois pontos difratores de velocidade $v_p = 3000$ m/s, tal como mostrado na Figura 4.1. O modelo de fundo empregado na modelagem é uma camada homogênea com as mesmas propriedades do modelo perturbado, sem a presença dos pontos difratores. Portanto, os pontos difratores representam a refletividade do meio $\delta m(\mathbf{x}) = \delta m(\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)+\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_2))$, onde $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ indicam as posições dos difratores.

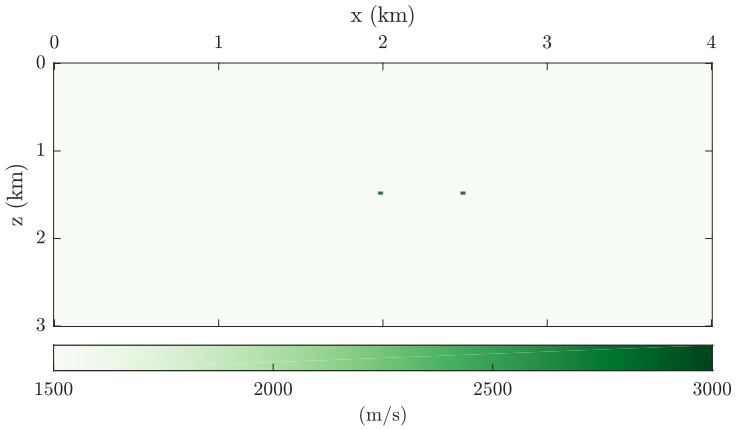

Figura 4.1: Modelo homogêneo com dois pontos difratores.

A Figura 4.2.a e a Figura 4.2.b apresentam, respectivamente, o sismograma calculado pela equação da onda completa depois de ter removido a onda direta (de acordo com a Equação 4.7), e o sismograma obtido pela modelagem de Born, para um tiro em superfície, localizado na parte central do modelo (x=2 km). Claramente, observa-se que a modelagem de Born não reproduz as múltiplas relacionadas à interação não linear entre os espalhamentos dos dois pontos difratores. A modelagem apenas limita-se a gerar as reflexões primárias do campo de ondas, o que é desejado durante o processo de migração e processamento convencional, pois as múltiplas são consideradas geralmente como ruído.

A Figura 4.3 mostra o traço extraído de um receptor na superfície, na mesma posição da fonte, onde é possível observar que a modelagem de Born não consegue

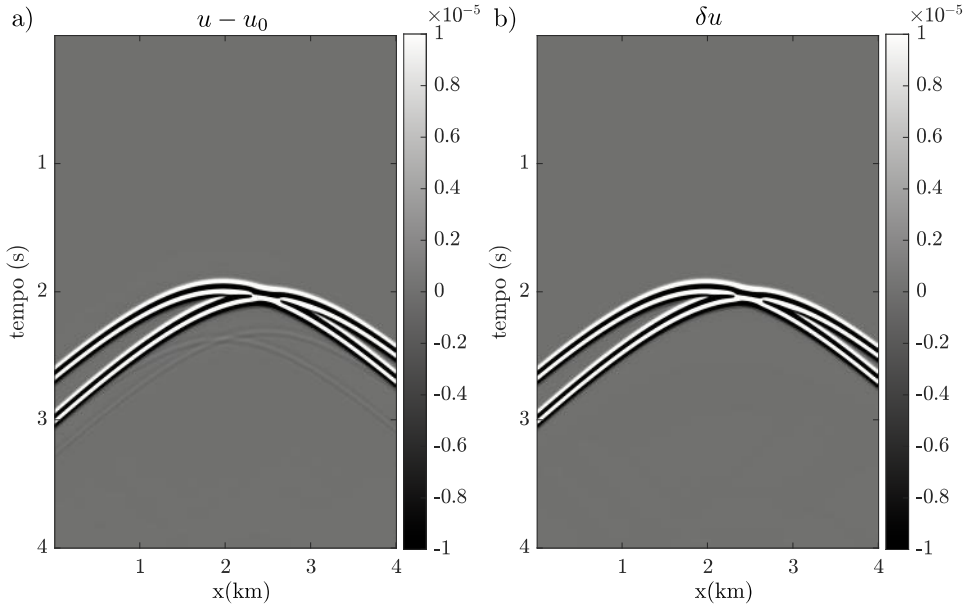

Figura 4.2: a) Sismograma obtido através da Equação 4.7. b) Sismograma obtido com a aproximação de Born.

preservar completamente as amplitudes do campo espalhado. Se o experimento é repetido mudando o valor da velocidade dos pontos difratores para $v_p = 1650$ m/s (apenas 10% acima do valor da camada homogênea), o que supõe um contraste menor com relação ao meio de fundo, a modelagem de Born consegue reproduzir melhor as amplitudes verdadeiras do campo espalhado, como apresentado na Figura 4.4. Nota-se que quanto maior for o valor da perturbação do modelo, menos precisa é a modelagem das amplitudes pois a suposição $u_0 \gg \delta u$ deixa de ser válida.

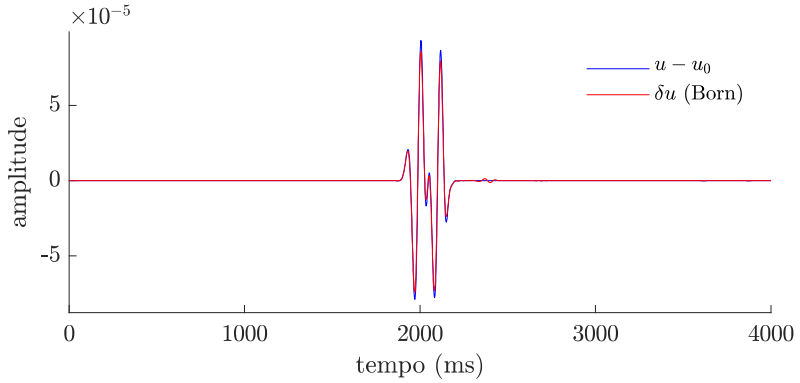

Figura 4.3: Comparação do traço central (x=2 km) entre os sismogramas da Figura 4.2, considerando pontos difratores com velocidade $v_p = 3000$ m/s.

O segundo exemplo considera um meio de três camadas homogêneas e paralelas, e três modelos de fundo diferentes, calculados através da suavização do modelo real

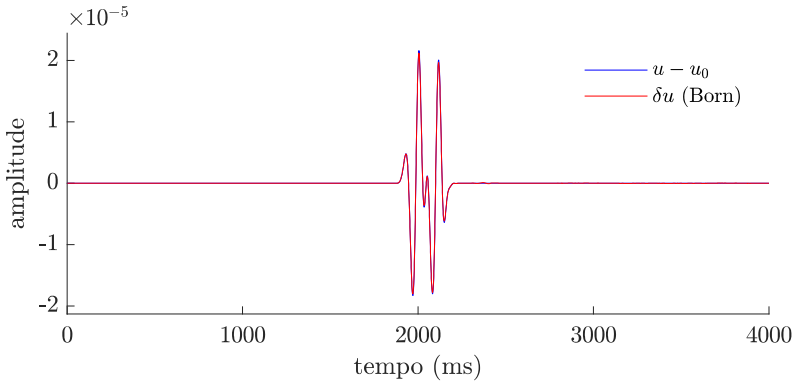

Figura 4.4: Comparação do traço central para o experimento dos pontos difratores, considerando perturbações de velocidade de $v_p = 1650$ m/s.

com filtros gaussianos de raios iguais a 50, 200 e 400 metros, como apresentado na Figura 4.5. Ressalta-se que a suavização é feita na vagarosidade e não na velocidade. Por outro lado, a Figura 4.6 exibe a comparação da modelagem do campo espalhado entre a equação de onda completa depois de ter removido a onda direta, e a modelagem de Born, no traço central do levantamento. Para modelos mais afastados do modelo verdadeiro, onde o contraste de vagarosidade é mais alto, nota-se a presença de maiores deslocamentos temporais dos eventos registrados. Tal sensibilidade aos erros no modelo de velocidade representa uma das principais limitações da modelagem de Born em relação ao algoritmo de LSRTM, posto que deslocamentos temporais muito grandes podem originar problemas de *cycle skipping* no ajuste iterativo dos dados, que levam a modelos de refletividade incoerentes e desfocados, e a taxas de convergência mais lentas (YU *et al.*, 2014).

Uma grande suposição do método LSRTM é que o modelo de fundo já é cinematicamente preciso e não será atualizado ao longo das iterações. Segundo BUNKS *et al.* (1995), a inversão linearizada é justificada quando o modelo de fundo está na vizinhança do mínimo global da função objetivo. Essa é uma suposição razoável para problemas de inversão sísmica onde a geologia não é muito complexa ou onde tem-se um bom conhecimento "a priori"do modelo. No entanto, em muitas aplicações práticas, o modelo de fundo é geralmente impreciso. Algumas das propostas para contornar estes problemas consistem em implementar técnicas tipo *Dynamic Time Warping* (DTW) (LUO e HALE, 2014), métodos de regularização (WU *et al.*,

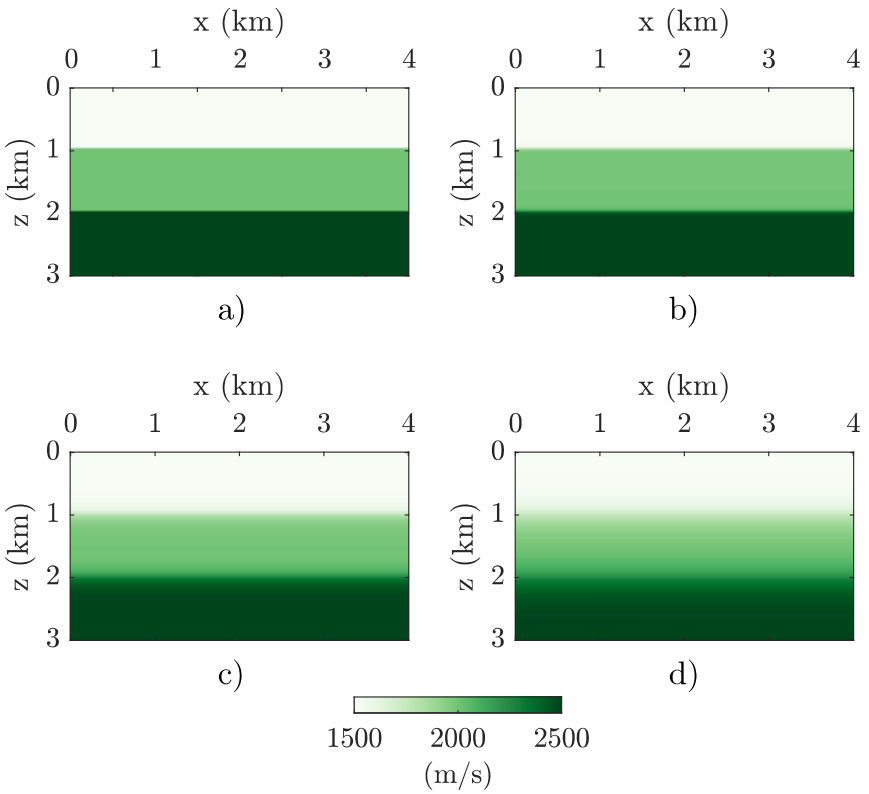

Figura 4.5: a) Modelo de três camadas horizontais e homogêneas (modelo perturbado). b) Modelo de fundo suavizado com janela gaussiana de raio = 50 m. c) Modelo de fundo suavizado com janela gaussiana de raio = 200 m. d) Modelo de fundo suavizado com janela gaussiana de raio = 400 m.

2016), ou em atualizar conjuntamente o modelo de fundo através de técnicas como a FWI, a análise de velocidade de migração (MVA), ou a tomografia de alta resolução (SCHUSTER, 2017). Outra abordagem consiste em resolver um sistema indeterminado de equações, onde uma imagem LSRTM é obtida para cada tiro, e no final da inversão todas as imagens são empilhadas para obter a seção migrada final. Esta estratégia faz com que a inversão LSRTM seja mais robusta em relação ao erro no modelo de velocidade (DAI e SCHUSTER, 2013).

Por outro lado, é importante mencionar que os resultados obtidos pela grande maioria de algoritmos de inversão LSRTM, que empregam a modelagem de Born convencional para gerar o dado sintético, contém informação AVO imprecisa (ZHANG *et al.*, 2015). Isto deve-se ao fato de que, por simplicidade e eficiência computacional, a equação de modelagem do campo espalhado é derivada sem levar em consideração a variação da refletividade com o ângulo de incidência, relacionados de forma

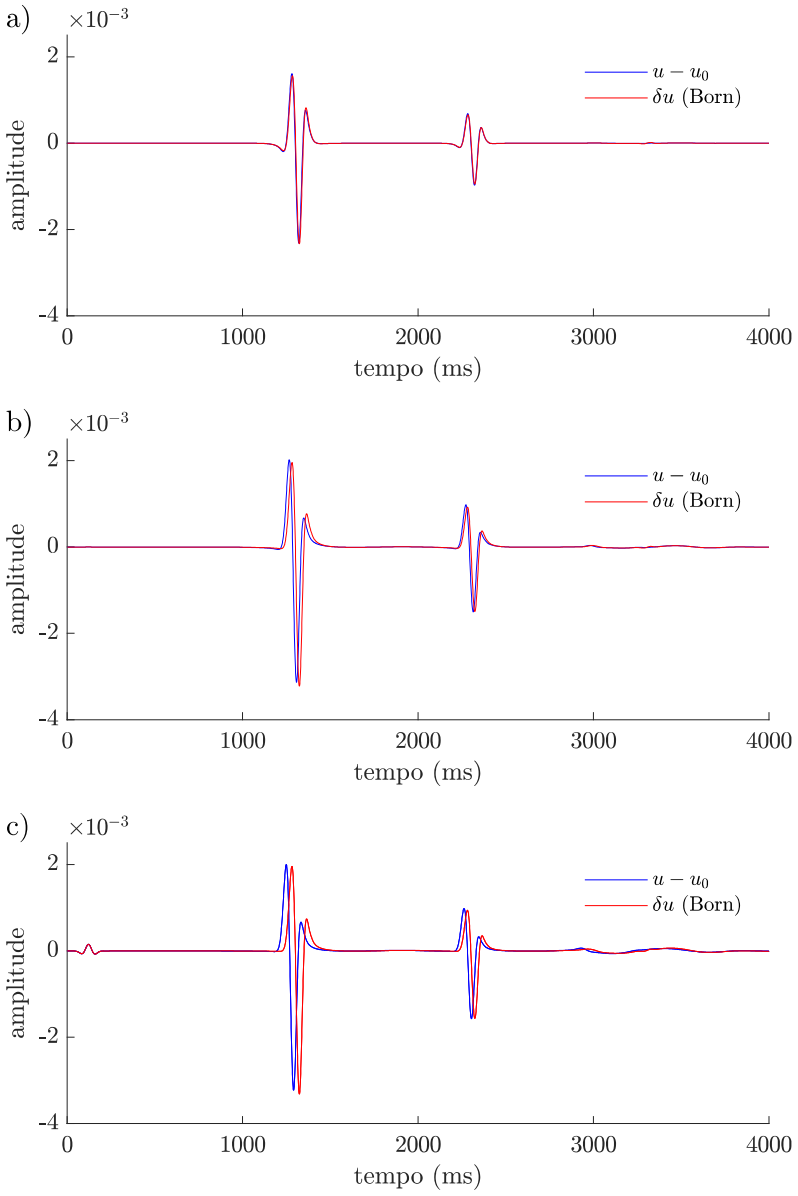

Figura 4.6: Comparação entre o campo espalhado calculado pela equação da onda completa e a modelagem de Born para o modelo de fundo suavizado com diferentes tamanhos de janela do filtro gaussiano. Os traços correspondem ao receptor posicionado na superfície em x=2 km. a) Comparação para o modelo da Figura 4.5.b. b) Comparação para o modelo da Figura 4.5.c. c)Comparação para o modelo da Figura 4.5.d.

não linear pelas equações de Zoeppritz (SHUEY, 1985). Portanto, o parâmetro de refletividade invertido neste trabalho é função do coeficiente de refletividade de offset zero, como demonstrado por WONG (2014) e SCHUSTER (2017). YAO e WU (2017) apresentam a formulação do problema direto que considera a refletividade dependente do ângulo de incidência, permitindo recuperar seções migradas com informação AVO correta, úteis para interpretação quantitativa.

4.2 Migração RTM como problema inverso

A migração RTM produz uma representação aproximada da refletividade do subsolo. A resolução da imagem obtida a uma determinada profundidade é controlada pelos parâmetros de aquisição como a assinatura de fonte, a largura de banda de frequência e a geometria de aquisição. As propriedades do meio na profundidade e acima dos refletores também afetam a qualidade da imagem (YAO e WU, 2015). A migração RTM em modelos geologicamente complexos e com dados adquiridos com cobertura insuficiente de fontes e receptores na superfície, produzem seções pobremente iluminadas e com baixo número de onda. Assim, é conveniente abordar a migração RTM como problema inverso.

LAILLY (1983), TARANTOLA (1984a) e posteriormente MORA (1989) foram os primeiros a constatar a semelhança entre o operador de migração RTM e o gradiente da função objetivo computado pelo método do estado adjunto. Com efeito, considerando a função objetivo que minimiza as diferenças entre o campo modelado e o campo observado,

$$\min_{\mathbf{m}\in\mathbb{R}^n} E(\mathbf{m}) = \frac{1}{2}\sum_f\sum_r\int_0^T \|\delta u - \delta d_{obs}\|^2 \,\mathrm{d}t \tag{4.18}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_f\sum_r\int_0^T \|\Delta d\|^2 \,\mathrm{d}t, \tag{4.19}$$

e a derivada com relação ao parâmetro δm_i, correspondente à i-ésima componente do gradiente $\nabla E(\mathbf{m})_i$,

$$\frac{\delta E(\mathbf{m})}{\delta m_i} = \sum_f\sum_r\int_0^T \left[\frac{\delta u}{\delta m_i}\Delta d\right] \mathrm{d}t, \tag{4.20}$$

a expressão da derivada de Fréchet (Equação 4.17) pode ser colocada em evidência, para obter a relação

$$\frac{\delta E(\mathbf{m})}{\delta m_i} = \sum_f\sum_r\int_0^T \left[\left(g_0(\mathbf{x}_r,t;\mathbf{x}_i) * \left(-2s_0(\mathbf{x}_i)\frac{\partial^2 u_0(\mathbf{x}_i,t;\mathbf{x}_f)}{\partial t^2}\right)\right)\Delta d\right] \mathrm{d}t. \tag{4.21}$$

Sabe-se, ademais, que a convolução garante a propriedade (YANG *et al.*, 2015b),

$$\int \left[g(t) * f(t)\right] h(t)\,\mathrm{d}t = \int \left(f(t)\left[g(-t) * h(t)\right]\mathrm{d}t, \tag{4.22}$$

de maneira que a equação para cada componente do gradiente pode ser reorganizada como

$$\frac{\delta E(\mathbf{m})}{\delta m_i} = \sum_f \sum_r \int_0^T \left[\left(-2s_0(\mathbf{x}_i)\frac{\partial^2 u_0(\mathbf{x}_i, t; \mathbf{x}_f)}{\partial t^2}\right)\left(g_0(\mathbf{x}_i, -t; \mathbf{x}_r) * \Delta d\right)\right]\mathrm{d}t, \tag{4.23}$$

onde o principio de reciprocidade da função de Green, $g_0(\mathbf{x}_r, -t; \mathbf{x}_i) = g_0(\mathbf{x}_i, -t; \mathbf{x}_r)$, foi empregado para trocar a coordenada do ponto difrator $\mathbf{x}_i$ (considerado como fonte espalhadora) pela do receptor localizado em $\mathbf{x}_r$. Tendo em conta todos os pontos do domínio $\mathbf{x}$, e apenas uma fonte, o gradiente da Equação 4.23 pode ser interpretado da forma seguinte (SCHUSTER, 2017):

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{m}} E(\mathbf{x}) &= \left[-2s_0(\mathbf{x})\overbrace{u_0(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_f)}^{D(\mathbf{x},t)=\text{campo incidente}} \otimes \overbrace{\sum_r g_0(\mathbf{x}, -t; \mathbf{x}_r) * \Delta \ddot{d}}^{U(\mathbf{x},t)=\text{campo reverso}}\right]_{|t=0} \\ &= -2s_0(\mathbf{x}) \sum_t D(\mathbf{x}, t) U(\mathbf{x}, t)\end{aligned} \tag{4.24}$$

O significado físico desta equação indica que o gradiente da função objetivo pode ser computado pela correlação no "lag zero"(denotado pelo símbolo $\otimes$) entre o campo de ondas incidente, u_0, e o campo resultante da propagação reversa dos resíduos, Δd, injetados na posição dos receptores $\mathbf{x}_r$, somados em todos os instantes de tempo. Ambos os campos são propagados no modelo de fundo $s_0(\mathbf{x})$. Exceptuando o fator $-2s_0(\mathbf{x})$, percebe-se que a Equação 4.24 é cinematicamente equivalente à definição clássica da migração RTM pré-empilhamento, que emprega a correlação cruzada entre os dois campos de onda, $D(\mathbf{x}, t)$ e $U(\mathbf{x}, t)$, como condição de imagem no domínio

do tiro comum (ROBEIN, 2010):

$$\delta m_{\text{mig}}(\mathbf{x}) = \sum_t D(\mathbf{x}, t) U(\mathbf{x}, t). \tag{4.25}$$

Se o modelo de fundo representa uma versão suavizada do modelo verdadeiro, durante a primeira iteração do algoritmo de inversão, o resíduo Δd apenas contém eventos refletidos do dado observado, pois a onda direta e as refrações registradas no campo incidente u_0 cancelam às do dado observado. Isto simula o processo de eliminação das ondas diretas e mergulhantes na migração RTM, consideradas como ruído de baixa frequência. Portanto, a migração RTM poderia ser entendida como o resultado do gradiente na primeira iteração do algoritmo de inversão de mínimos quadrados (SYMES, 2007). Essa conexão é particularmente válida com relação às ondas refletidas, mas é violada nos casos em que as ondas mergulhantes são críticas para o sucesso da inversão (i.e. quando o modelo de fundo precisa ser atualizado), como no caso da FWI (QIN *et al.*, 2015).

A Equação 4.23 pode ser colocada em evidência no contexto da inversão iterativa do modelo de vagarosidade $s(\mathbf{x})$. Tomando, por exemplo, o método de máxima descida como algoritmo de otimização, a atualização inicial para $k = 0$ tem a forma:

$$s_1(\mathbf{x}) = s_0(\mathbf{x}) + \alpha 2 s_0(\mathbf{x}) \sum_f \sum_r \int_0^T \left[\left(\frac{\partial^2 u_0(\mathbf{x}_i, t; \mathbf{x}_f)}{\partial t^2} \right) (g_0(\mathbf{x}_r, -t; \mathbf{x}_i) * \Delta d) \right] \mathrm{d}t \tag{4.26}$$

que pode ser reorganizada como

$$\delta m_{\text{ref}_1}(\mathbf{x}) \equiv s_1(\mathbf{x}) - s_0(\mathbf{x}) \tag{4.27}$$

$$= \alpha 2 s_0(\mathbf{x}) \sum_f \sum_r \int_0^T \times \left[\left(\frac{\partial^2 u_0(\mathbf{x}_i, t; \mathbf{x}_f)}{\partial t^2} \right) (g_0(\mathbf{x}_r, -t; \mathbf{x}_i) * \Delta d) \right] \mathrm{d}t \tag{4.28}$$

ou,

$$\delta m_{\text{ref}_1}(\mathbf{x}) = \alpha \delta m_{\text{mig}}(\mathbf{x}) \tag{4.29}$$

onde δm_{ref_1} é a imagem migrada atualizada que aproxima as distribuições de refletividade, δm_{mig} é a imagem obtida pela migração RTM, e o fator $-2s_0(\mathbf{x})$ é absorvido pelo passo α por conveniência notacional. Assim, o algoritmo de inversão LSRTM consiste em atualizar iterativamente a refletividade δm_{ref_k} até atingir a convergência. Neste caso, o dado sintético empregado no cálculo dos resíduos é o campo espalhado gerado pela modelagem linear descrita na seção anterior. Geralmente, o dado observado é pré-processado para tirar todos os eventos que a modelagem de Born não reproduz, como a onda direta, as refrações e as múltiplas. Diferentemente da inversão não linear, a função de Green do campo incidente permanece invariável durante todas as iterações porque $s_0(\mathbf{x})$ não é atualizado. Apenas é atualizada a distribuição de refletividade a cada iteração. Isto implica, ademais, que o operador da migração RTM, $\mathbf{L}^{\mathrm{T}}$, definido como o adjunto da modelagem de Born, permanece igual a cada iteração (SCHUSTER, 2017).

Generalizando a Equação 4.29 para qualquer método de otimização local que aproxime a curvatura da função objetivo, e expressando o problema de forma matricial, tem-se a relação

$$\Delta\mathbf{m}_{\text{ref}} = \mathbf{H}^{-1}\Delta\mathbf{m}_{\text{mig}} \tag{4.30}$$

$$\Delta\mathbf{m}_{\text{ref}} = \left[\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{L}\right]^{-1}\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\Delta\mathbf{d}, \tag{4.31}$$

que descreve o processo de migração como problema inverso de mínimos quadrados. Observa-se que o resultado obtido na migração RTM está relacionado à imagem da LSRTM através do inverso da matriz Hessiana $\left[\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{L}\right]^{-1}$. Uma outra forma de interpretar a inversa da matriz Hessiana, é como um filtro de deconvolução que focaliza e pondera as amplitudes da imagem migrada $\Delta\mathbf{m}_{\text{mig}}$ para aproximá-la do modelo verdadeiro $\Delta\mathbf{m}_{\text{ref}}$.

Neste trabalho, a matriz $\left[\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{L}\right]^{-1}$ é aproximada de forma iterativa, e o modelo de refletividade verdadeiro $\Delta\mathbf{m}_{\text{ref}}$ é invertido iterativamente pelo método LBFGS, de acordo com o algoritmo descrito na seção seguinte.

4.3 Algoritmo de inversão LSRTM

O algoritmo de inversão LSRTM desenvolvido neste trabalho pode ser resumido nos 7 passos seguintes:

1. Para cada fonte f e conjunto de receptores r, é calculado o resíduo inicial Δd, subtraindo o campo incidente registrado na superfície, u_0, do dado observado[1] Calcula-se também a função objetivo para o resíduo inicial, segundo a Equação 4.18.

2. Gera-se o gradiente δm_{mig} através da migração do resíduo Δd. Este passo é equivalente ao processo de migração RTM convencional.

3. Calcula-se o passo α que minimiza a função objetivo, por meio de um algoritmo de busca em linha, e a direção de atualização do modelo de vagarosidade, determinada pelo algoritmo LBFGS.

4. Estima-se o modelo de vagarosidade atualizado, $s_1(\mathbf{x})$. Posteriormente, o modelo $s_1(\mathbf{x})$ é subtraído do modelo de fundo $s_0(x)$ para se obter o modelo de refletividade atualizado, δm_{ref_1} (Equação 4.27).

5. Para cada fonte f e conjunto de receptores r, modela-se o dado calculado δu através da modelagem de Born, resolvendo as Equações 4.6 e 4.11, onde o termo da fonte do campo espalhado é o produto entre o campo incidente u_0 e o termo da refletividade, δm_{ref_1}, calculada no passo anterior.

6. Para o novo dado calculado δu, calcula-se o novo resíduo Δd e a nova função objetivo.

7. Se atingido o critério de parada, finaliza-se a inversão. Caso contrário, volta-se para o passo 2, onde o novo resíduo é migrado.

[1] Isto equivale a remover a onda direta e as refrações dos dados observados, uma vez que o modelo de fundo, $s_0(\mathbf{x})$, onde o campo incidente se propaga, é uma versão suave do modelo verdadeiro.

Nota-se que o processo de LSRTM demanda a solução de três modelagens da equação da onda para três tipos diferentes de fontes. A primeira fonte é a fonte sísmica que origina o campo de ondas incidente. A segunda modelagem cria o campo de ondas ascendente pela aproximação de Born. O terceiro tipo de propagação está relacionado à extrapolação dos resíduos em tempo reverso para gerar o gradiente. Isto representa um aumento do tempo computacional na ordem de $O(3k)$ em relação à migração RTM, onde k é o número de iterações da LSRTM (SCHUSTER, 2017). Junto à sensibilidade aos erros do modelo de fundo, o alto custo computacional representa a outra grande limitação do método e geralmente são implementadas diferentes técnicas de codificação de fase das fontes para combinar vários subconjuntos de famílias de tiro comum (CSG - *common-shot gathers*) em um ou vários *supergathers*, a cada iteração. Para isso, um termo de regularização deve ser acrescentado na função objetivo, a fim de estabilizar os artefatos produzidos na inversão simultânea dos tiros. Como nenhum termo de regularização ou técnica de *supergather* foi levada em consideração, neste trabalho foi empregada a abordagem convencional, em que o número total de fontes é modelado ao longo de todas as iterações.

4.4 Experimentos numéricos

Nesta seção são apresentados os resultados da inversão LSRTM aplicada em três modelos sintéticos 2D. As imagens obtidas na inversão, são comparadas com os resultados da migração RTM. Os primeiros dois testes consistem em imagear um modelo de camadas plano-paralelas e um modelo de pontos difratores incorporados numa região perto de um corpo de sal. Avaliou-se o desempenho da LSRTM sobre tais configurações simples com a finalidade de ter um entendimento sobre como este algoritmo opera no que diz respeito à redução de artefatos de migração, deconvolução da fonte e a ampliação do espectro de amplitude das imagens. O terceiro modelo, significativamente mais complexo e de maiores proporções, consiste em uma versão reamostrada do modelo Sigsbee2a (PAFFENHOLZ *et al.*, 2002).

Como já foi mencionado, no que se refere ao pré-processamento dos dados, é

comum remover a energia das múltiplas porque estas não podem ser preditas pela modelagem linear e são tratadas como ruído coerente nos dados. No entanto, para evitar o crime inverso, as múltiplas internas foram mantidas nos dados observados. Em outras palavras, os dados observados foram modelados com a equação da onda completa, e os dados sintéticos com a modelagem de Born. As condições de borda absorvente foram aplicadas em todas as bordas do modelo, e, portanto, os dados não contém nenhuma múltipla associada à superfície.

A fonte sísmica é assumida como conhecida durante a inversão. As ondas direta e refratadas, que não contribuem ao imageamento dos refletores, foram subtraídas dos dados observados, através da modelagem no meio de fundo.

A cada iteração, o gradiente é pré-condicionado pela inversa da diagonal da pesudo-Hessiana, como apresentado na seção 3.4. Um detalhe a ressaltar é que, como o modelo de fundo não varia, o pré-condicionador apenas precisa ser calculado uma vez durante todo o processo iterativo.

4.4.1 Modelo de camadas plano-paralelas

O modelo de camadas plano-paralelas, apresentado na Figura 4.7.a, é representado por uma malha regular de 500×226 pontos com espaçamento de 5 m entre os nós. O modelo é constituído pela camada da lâmina de água de 80 m de espessura, localizada no topo do modelo com velocidade $v_p = 1500$ m/s, seguida de duas camadas homogêneas de velocidade $v_p = 2000$ m/s, separadas por uma camada de velocidade $v_p = 2500$ m/s localizada a 600 m de profundidade, com espessura de 200 m. O modelo de fundo empregado na migração (Figura 4.7.b), é o meio verdadeiro sem a camada de alta velocidade. Assim, o objetivo do experimento é imagear o topo e a base da camada de alta velocidade.

Uma das razões pelas quais a migração por mínimos quadrados é atrativa, é a sua eficiência na reconstrução de modelos quando aplicada a dados incompletos e aquisições com amostragem pobre em tiros, já que ajuda a reduzir os artefatos de aquisição de maneira natural. Neste teste, o número de receptores é mantido

fixo e igual ao número de pontos do modelo na direção horizontal, mas apenas são modelados 11 tiros para simular uma aquisição sísmica com pouca cobertura de fontes. Os parâmetros da modelagem e inversão implementados são apresentados na Tabela 4.1.

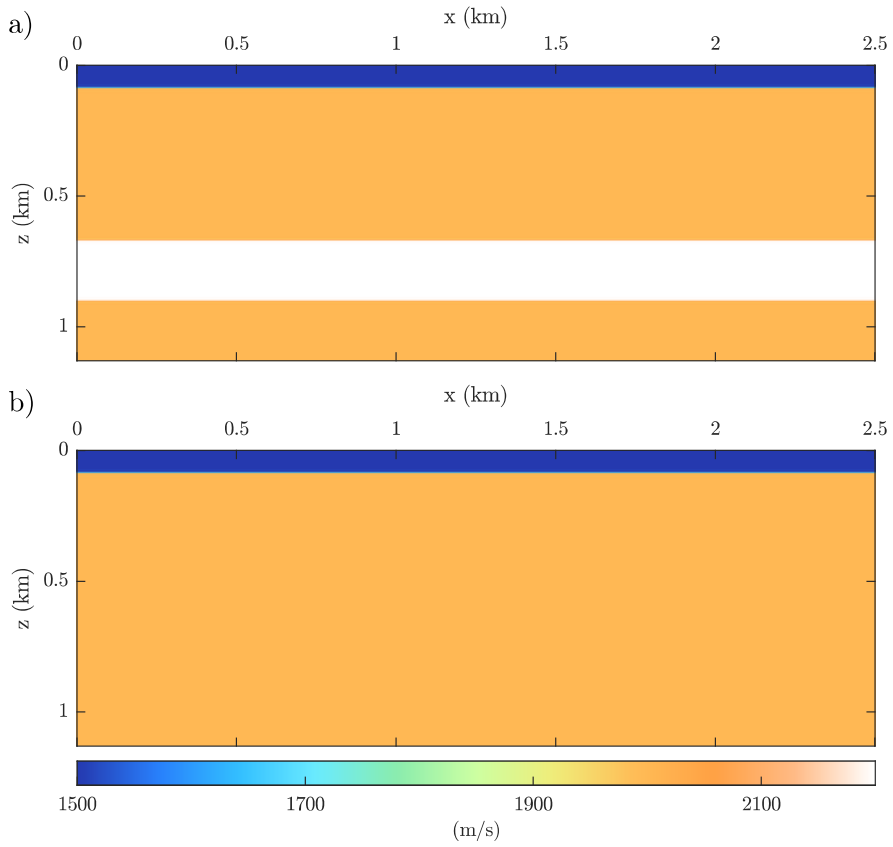

Figura 4.7: Modelo de quatro camadas plano-paralelas. a) Modelo verdadeiro. b) Modelo de fundo.

A Figura 4.8 mostra o resultado da migração RTM. As cores branca e preta representam valores de refletividade positiva e negativa, respectivamente. Na seção migrada é possível observar que tanto o topo quanto a base da camada de alta velocidade são parcialmente iluminados. As amplitudes de ambos os refletores são maiores na parte central do modelo devido ao fato de que um maior número de fontes contribuem na iluminação desta zona, se comparado com as regiões laterais. Além do mais, nota-se que a amplitude do refletor superior é maior do que a do inferior. Isto se deve ao o operador adjunto, $\mathbf{L}^{\mathrm{T}}$, que não preserva as amplitudes. Por último, percebe-se a presença de artefatos com forma elíptica acima do refletor superior, provenientes do operador de migração em meios homogêneos. A manifestação de tais

Tabela 4.1: Parâmetros utilizados na modelagem e inversão do modelo de camadas plano-paralelas

Parâmetros	Valor
Número de nós	500×226
Espaçamento da malha	5 m
Amostragem temporal	0.0005 segundos
Tempo de gravação	2.5 segundos
Número de tiros	11
Espaçamento entre tiros	250 m
Profundidade dos tiros	10 m
Número de receptores	500
Espaçamento entre receptores	5 m
Profundidade dos receptores	10 m
Frequência de corte da fonte (Ricker)	60 Hz
Número de gradientes armazenados (LBFGS)	5
Número máximo de iterações	100
Critério de parada adicional	$\frac{E(\mathbf{m}_k)}{E(\mathbf{m}_0)} < 1\%$

artefatos é consequência da pobre cobertura de fontes consideradas no experimento, que evita que as elipses de migração sejam colapsadas eficientemente.

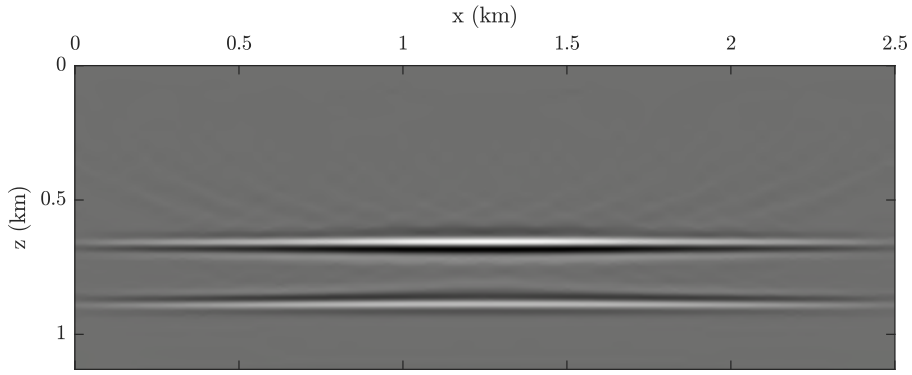

Figura 4.8: Resultado da RTM para o modelo de camadas planas paralelas

Por outro lado, a Figura 4.9 mostra o resultado da LSRTM depois de 10 iterações. Em comparação com a migração RTM, a imagem invertida apresenta refletores mais uniformes e significativamente melhor resolvidos em toda a extensão horizontal do modelo, incluindo as regiões perto das bordas. As amplitudes dos refletores também são melhor conservadas em profundidade, especialmente no caso do refletor inferior. Adicionalmente, os lóbulos que conformam os refletores, associados à assinatura da fonte, são mais finos, o que evidencia o efeito deconvolutivo da LSRTM.

Isto é traduzido em imagens com melhor resolução espacial, tal como indica o espectro de amplitude da Figura 4.10, onde é possível observar que o resultado obtido por LSRTM abarca um espectro mais amplo, tanto nas baixas quanto nas altas frequências.

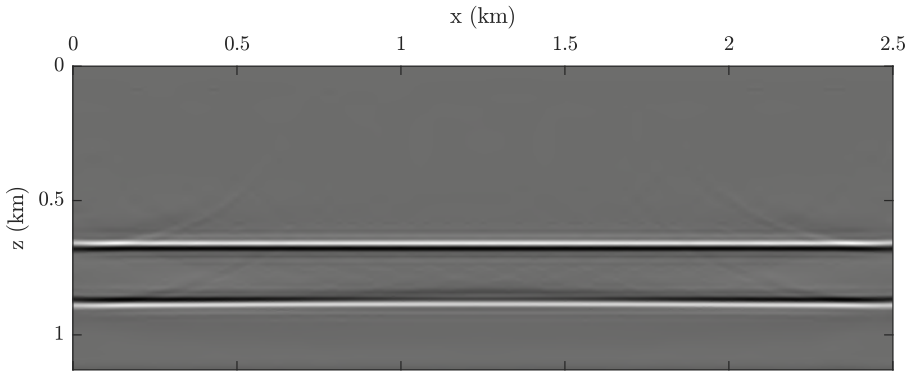

Figura 4.9: Resultado da LSRTM para o modelo de camadas planas paralelas depois de 10 iterações.

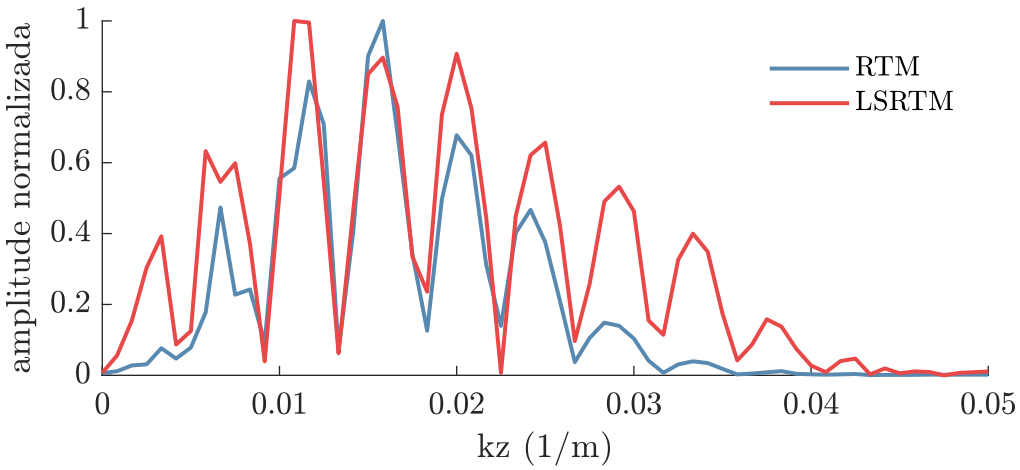

Figura 4.10: Comparação dos espectros de frequência espacial para os resultados da migração RTM (Figura 4.8) e LSRTM (Figura 4.9)

Mesmo que exista uma redução das elipses de migração mencionadas, ainda são preservados alguns destes artefatos nas partes laterais da imagem. Além do mais, existem reverberações de alta frequência com a mesma inclinação dos refletores horizontais. Estes artefatos estão associados às múltiplas remanentes nos resíduos que são retropropagadas e migradas ao longo das iterações, causando um efeito de ajuste excessivo dos dados na imagem final. Para remover este tipo de artefatos, é possível empregar, por exemplo, técnicas de regularização que levem em consideração

a orientação dos refletores (e.g. DE SOUZA *et al.*, 2019) e façam a inversão mais estável, ou empregar aproximações de Born de mais alta ordem.

Ainda por cima, a evolução da função objetivo apresentada na Figura 4.11, indica que o erro é reduzido drasticamente nas primeiras iterações. Aproximadamente depois das primeiras 10 iterações, não há redução no erro que justifique a continuação do processo iterativo. De fato, o ruído de alta frequência é acentuado em iterações posteriores, como mostra a Figura 4.12, para a iteração número 38, e os perfis verticais no meio da seção migrada da Figura 4.13. A iteração 38 corresponde à ultima iteração da inversão, parada por falha no algoritmo de busca em linha. Isto pode ser devido ao fato de que o modelo de fundo não representa uma versão suavizada do modelo verdadeiro, e que os dados calculados e os dados observados não foram modelados com a mesma equação. Como a modelagem não contempla todos os eventos do dado observado, o valor da função objetivo jamais chegará a zero.

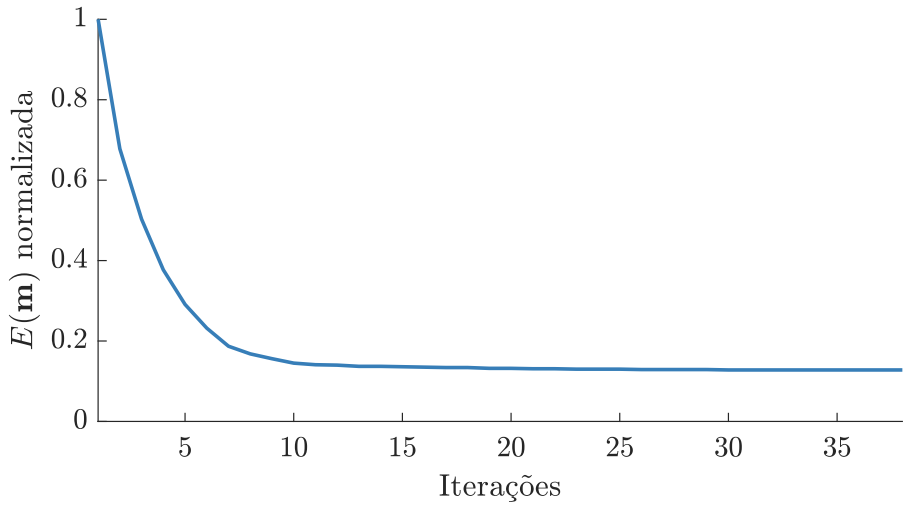

Figura 4.11: Evolução da função objetivo para o modelo de camadas plano-paralelas.

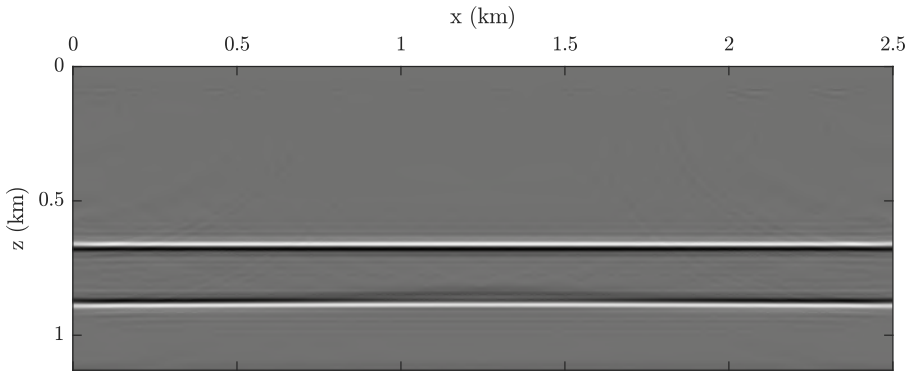

Figura 4.12: Resultado da LSRTM para o modelo de camadas planas paralelas depois de 38 iterações. A inversão ajusta excessivamente o dado, aumentando o ruído de alta frequência.

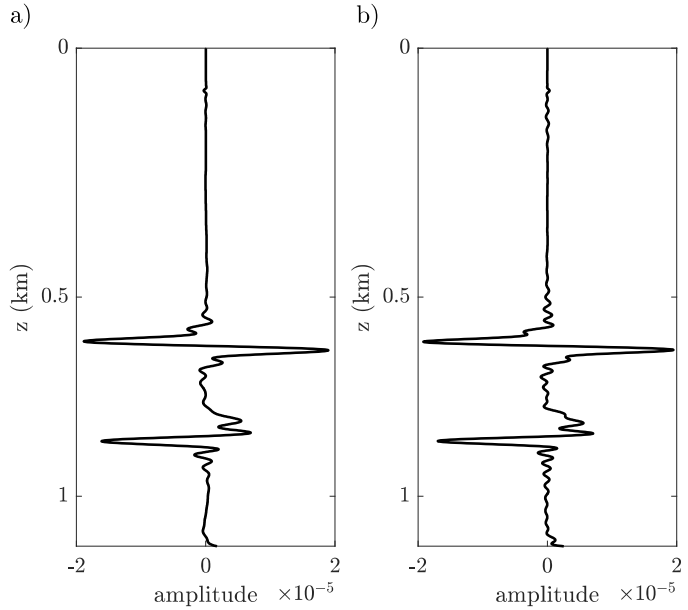

Figura 4.13: Perfis verticais da seção migrada na posição x = 1.25 km. a) Iteração 10. b) Iteração 38.

4.4.2 Modelo de pontos difratores com corpo de sal

O segundo teste consistiu em imagear 9 pontos difratores localizados na parte inferior (aproximadamente a 900 metros de profundidade) de uma região com uma distribuição de velocidade que varia suavemente até o embasamento de alta velocidade no fundo do modelo, e contém um corpo de sal de velocidade $v_p = 4500$ m/s, como ilustra a Figura 4.14. As dimensões do modelo são iguais às descritas no teste da seção anterior, assim como os parâmetros de modelagem e inversão (Tabela 4.1). O corpo de sal é assumido como interpretado corretamente, conhecendo sua

posição e dimensções exatas. Somente os pontos difratores são considerados como as perturbações a serem imageadas. Em outras palavras, o modelo de fundo é igual ao modelo verdadeiro sem a presença dos pontos difratores. Esta configuração foi escolhida para avaliar o desempenho da LSRTM no imageamento de objetivos de interesse perto e embaixo de estruturas salíferas com geometrias complexas, onde a iluminação é limitada. Ademais, os pontos difratores são elementos fundamentais na geração de imagens posto que podem ser empregados para construir qualquer refletor complexo. Em segundo lugar, eles dão uma medida direta da qualidade da imagem, particularmente da resolução.

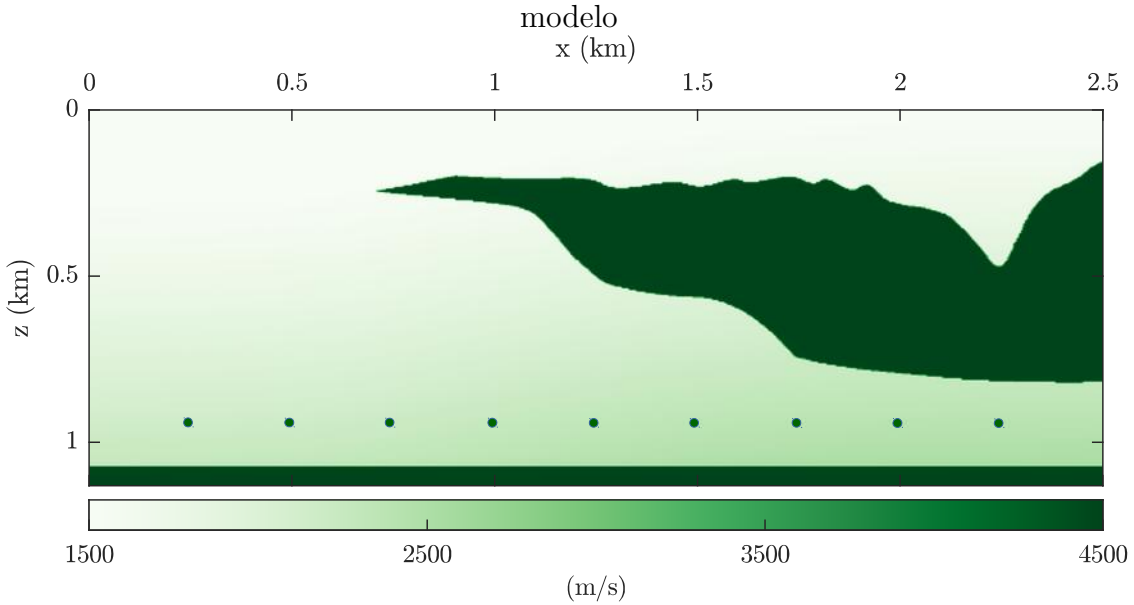

Figura 4.14: Modelo de pontos difratores com corpo de sal.

A Figura 4.15 mostra o resultado da migração RTM convencional, equivalente à primeira iteração do algoritmo LSRTM. O dado empregado para o imageamento contém apenas o campo ascendente produzido pelos pontos difratores, uma vez que os demais eventos registrados nos sismogramas são cancelados pela diferença entre o campo de fundo e o dado observado, como indica a Figura 4.19.c. Os pontos difratores são fracamente imageados, sendo os mais afetados aqueles posicionados na parte inferior direita do modelo, onde a iluminação é mais deficiente. As imagens dos pontos da parte esquerda do modelo apresentam inclinações, devido ao corpo de sal que desvia as ondas propagadas do lado direito do levantamento e portanto, a

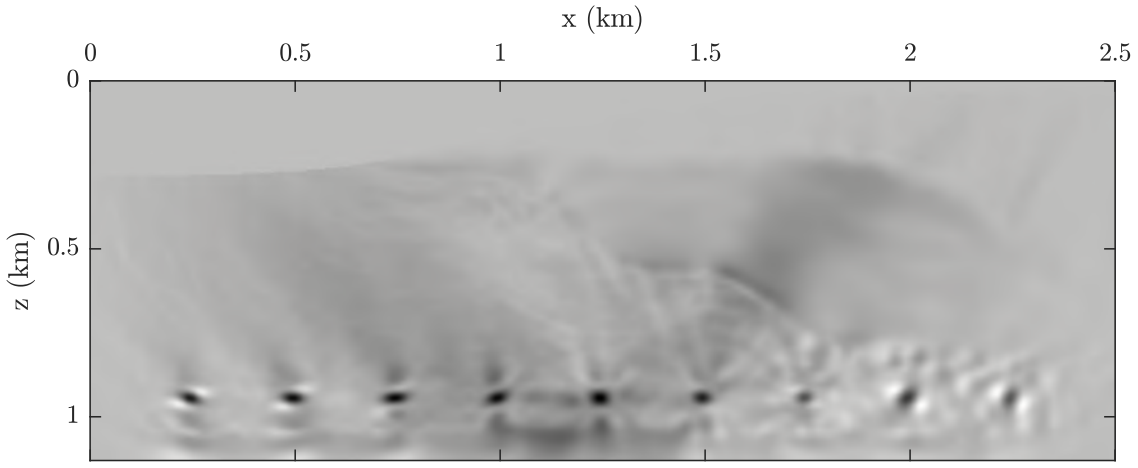

Figura 4.15: Resultado da RTM para o modelo de pontos difratores.

iluminação de tais pontos é assimétrica. Os pontos centrais são os melhores imageados e mais focalizados já que a camada de alta velocidade do embasamento produz o efeito de reflexão total interna para as fontes propagadas do lado esquerdo do levantamento. Uma evidência deste fenômeno é a presença do artefato de baixa frequência em forma de "V" no meio do modelo, correspondente ao operador de migração associado às ondas refletidas.

Por outro lado, percebe-se que a imagem está contaminada de ruído de baixa frequência e alta amplitude, produzido pelo grande contraste de velocidade no modelo. Um filtro laplaciano é implementado para tirar o ruído de baixa frequência e o resultado é apresentado na Figura 4.16. Pode-se notar que o ruído de baixa frequência é reduzido quase por completo, mas ainda permanecem na imagem artefatos de alta frequência, e os pontos difratores continuam tendo uma aparência desfocada e amplitudes desbalanceadas e assimétricas.

Em contrapartida, o resultado obtido pela inversão LSRTM é mostrado na Figura 4.17.a e 4.17.b, para as iterações número 20 (resultado preliminar) e 100 (resultado final), respectivamente. Adicionalmente, a Figura 4.18 mostra a evolução da função objetivo em relação ao número de iterações, onde verifica-se que o algoritmo converge até atingir o critério de parada de número máximo de iterações. De forma similar ao teste da seção anterior, a diminuição mais pronunciada do funcional é produzida nas primeiras iterações.

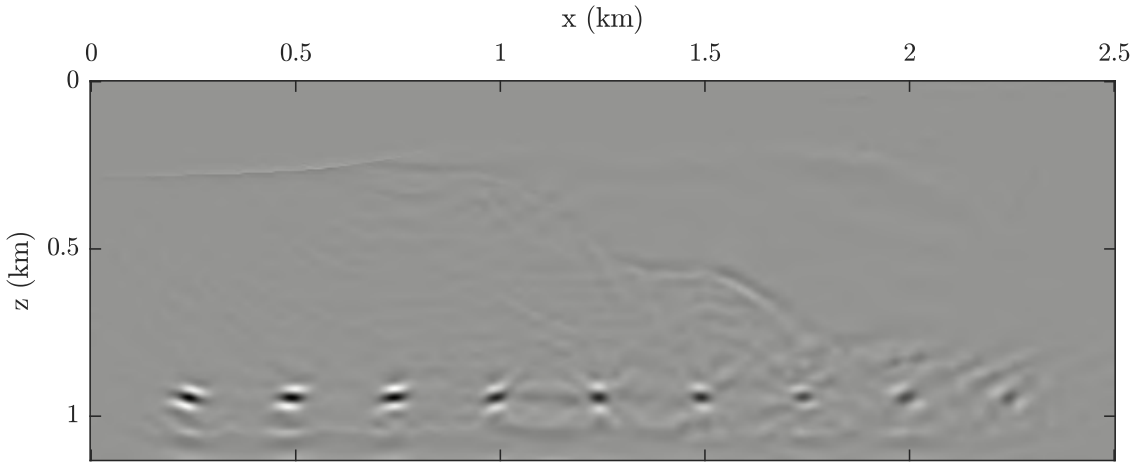

Figura 4.16: Seção RTM para o modelo de pontos difratores, depois de aplicado um filtro laplaciano.

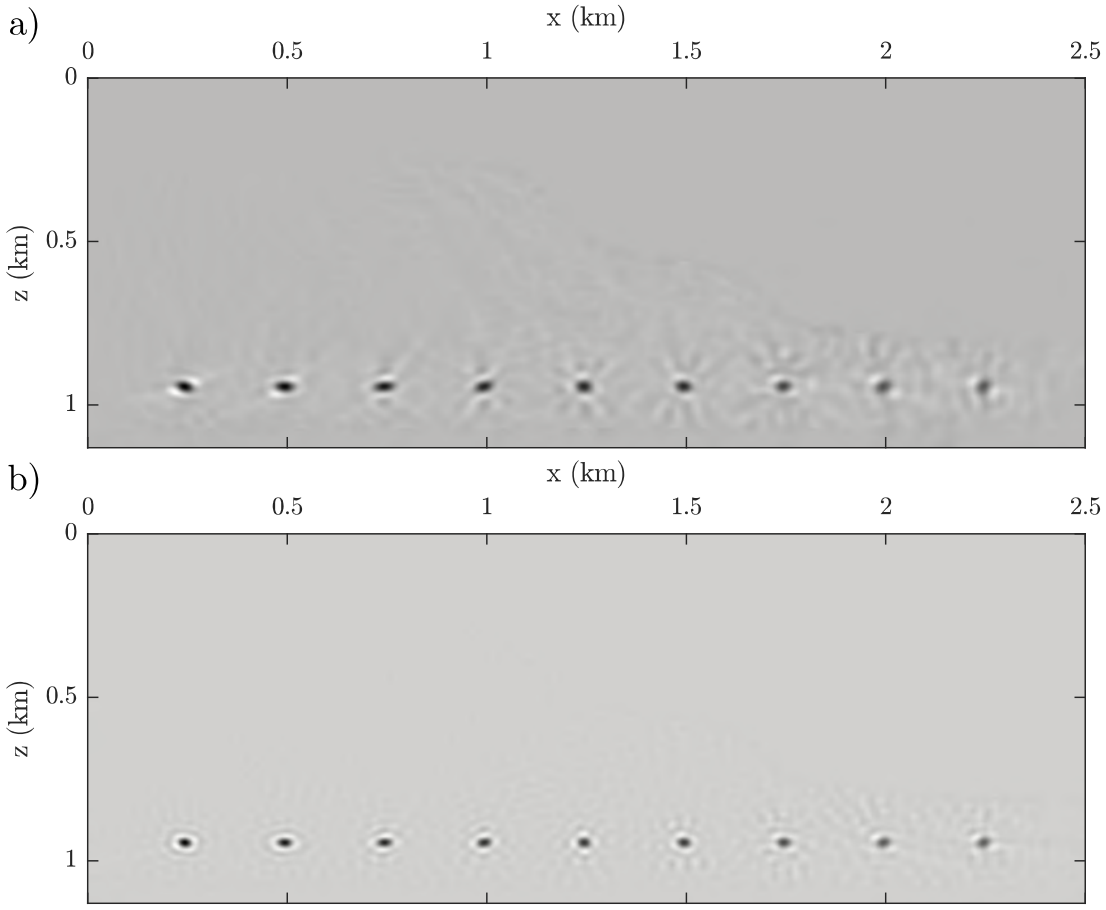

Figura 4.17: Resultado da LSRTM para o modelo de pontos difratores. a) 20 iterações. b) 100 iterações.

Em ambas as imagens da Figura 4.17, a melhora na resolução em relação ao foco dos pontos difratores é clara, além do realce das amplitudes, especialmente para os pontos menos iluminados e aqueles com iluminação assimétrica. O efeito

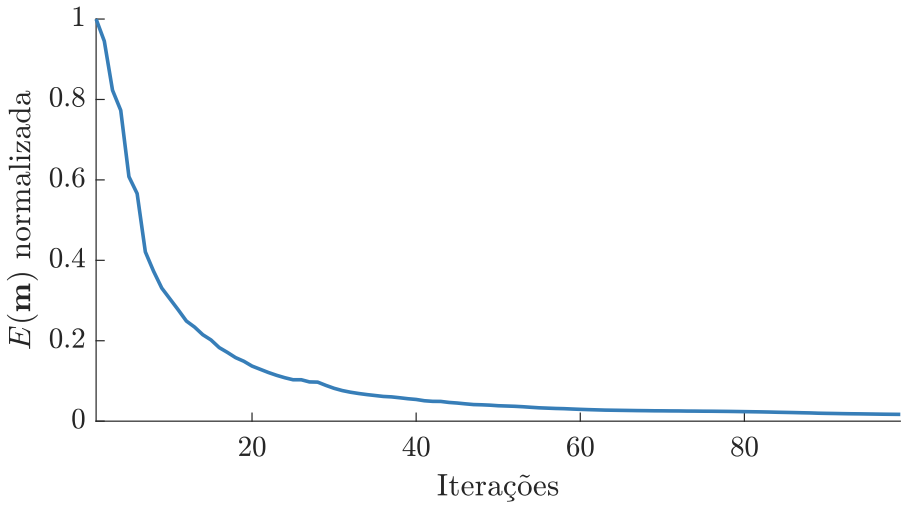

Figura 4.18: Evolução da função objetivo para o modelo de pontos difratores.

deconvolutivo é evidente no sentido de que a influência da assinatura da fonte na imagem é mínima, se comparado ao resultado da migração RTM (Figura 4.16). Comparando ambos os resultados da Figura 4.17, comprova-se que a contribuição das iterações posteriores é a de melhorar o foco dos pontos difratores e reduzir a presença dos elementos que não fazem parte da refletividade verdadeira, como por exemplo, o corpo de sal. Os artefatos que poluem a imagem migrada também são diminuídos quase na sua totalidade, segundo o observado na Figura 4.17.b.

Finalmente, a Figura 4.19 demonstra como o operador $\mathbf{L}$ aplicado ao modelo $\mathbf{\Delta m}$ obtido como resultado do processo de inversão, produz um dado sintético que se aproxima muito mais do observado, se comparado ao dado sintético obtido a partir da seção migrada com a RTM.

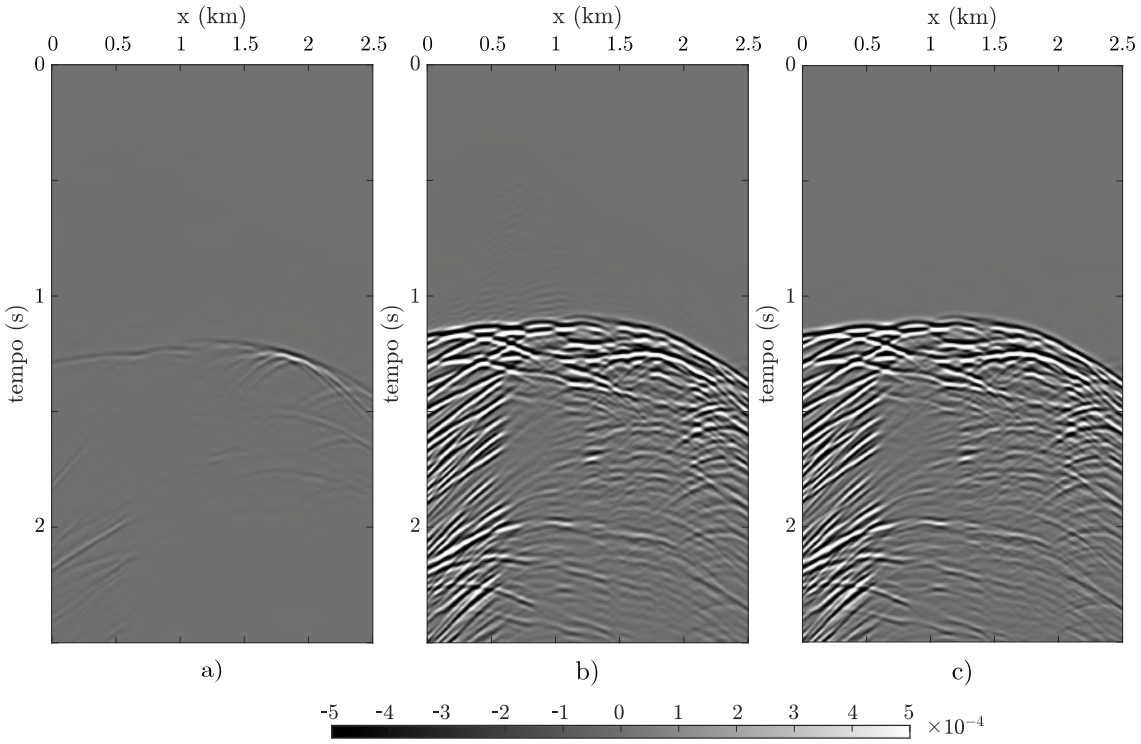

Figura 4.19: Comparação entre sismogramas sintéticos calculados com a modelagem de Born para um tiro posicionado em x = 625 m. a) Dado demigrado a partir da seção RTM inicial. b) Dado demigrado na iteração 100. c) Sismograma observado.

4.4.3 Modelo Sibgsbee2a

O teste final da inversão LSRTM foi realizado sobre uma versão adaptada do modelo Sigsbee2a, reamostrado em uma malha de diferenças finitas de dimensão 1200 × 400 pontos, com espaçamento de 5 metros entre os nós. Os dados observados são gerados usando o modelo de velocidade apresentado na Figura 4.20. Por sua vez, o modelo de fundo empregado na migração é apresentado na Figura 4.21. O modelo de refletividade verdadeiro é obtido através da diferença entre a vagarosidade verdadeira e a vagarosidade de fundo. O resultado é mostrado na Figura 4.22, depois de ser aplicado um filtro laplaciano.

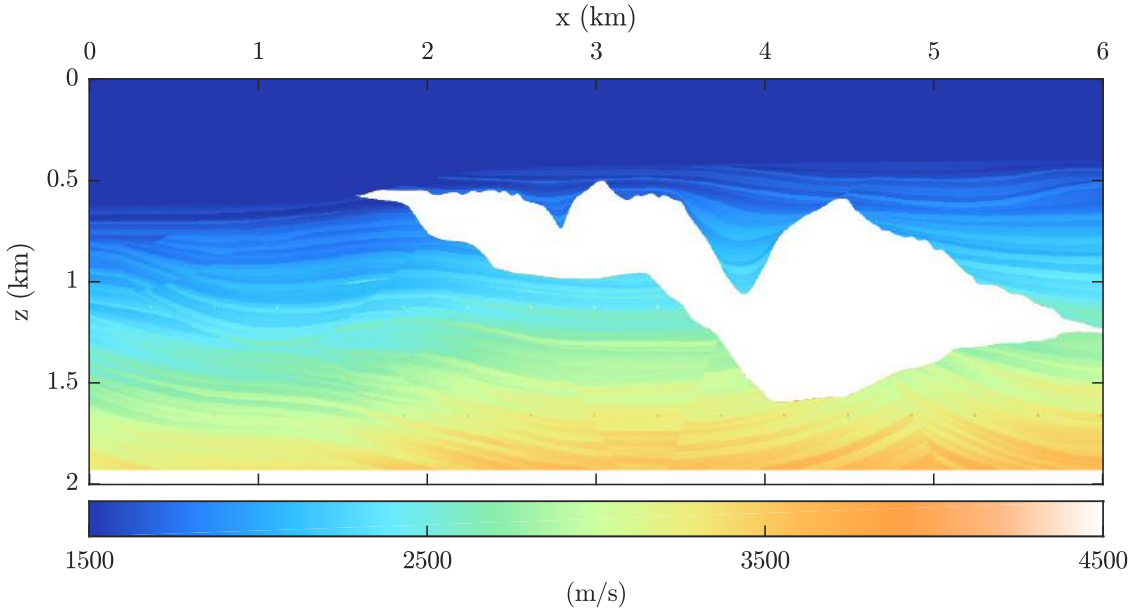

Figura 4.20: Modelo de velocidade verdadeiro.

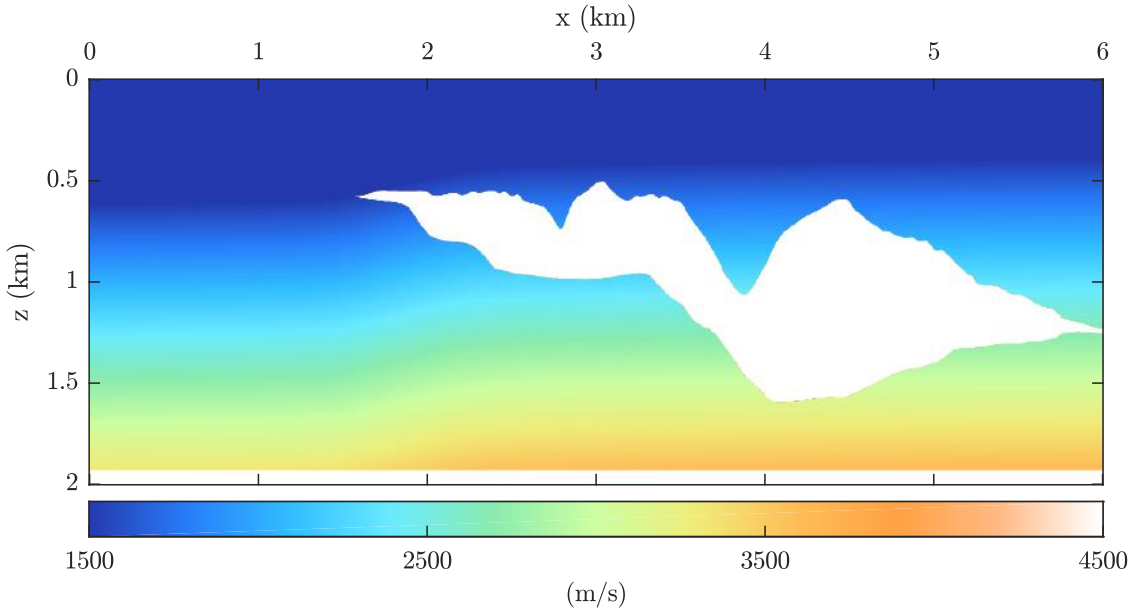

Figura 4.21: Modelo de fundo empregado na migração/inversão.

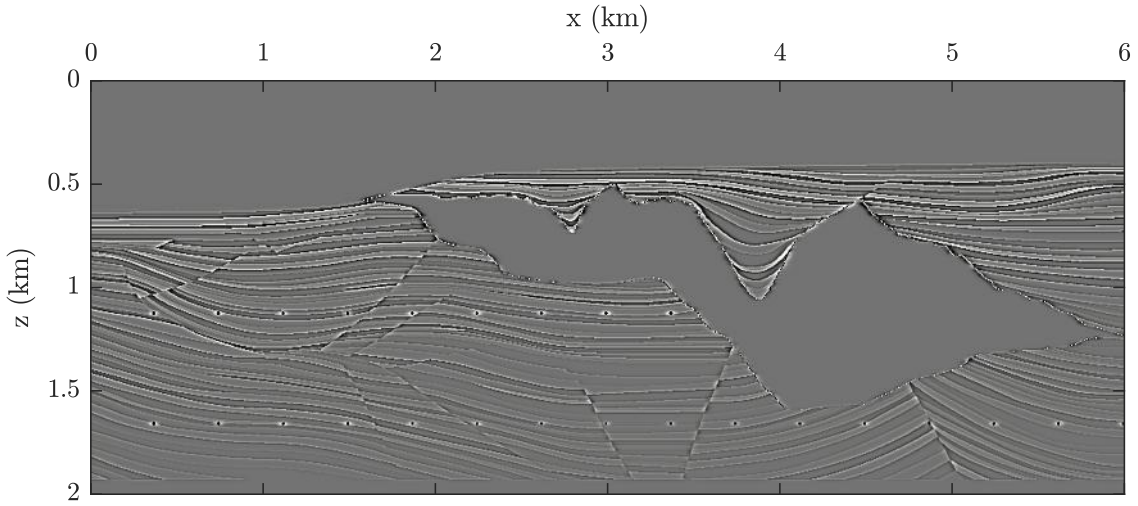

Figura 4.22: Modelo de refletividade verdadeiro.

Inicialmente, realizou-se a migração RTM convencional, simulando uma aquisição com 601 tiros, separados em intervalos de 10 metros. O resultado é apresentado na Figura 4.23, onde observa-se que os refletores estão contaminados por artefatos de baixa frequência, especialmente perto do corpo de sal. A Figura 4.24 ilustra a seção migrada depois de ter aplicado um filtro laplaciano. Nota-se que parte dos artefatos ainda persistem após a filtragem. Ademais, a interpretação dos horizontes tanto na parte esquerda, correspondente à sequência sedimentar, quanto na região perto do corpo de sal e em regiões profundas do modelo, está comprometida devido à baixa resolução da seção. Verifica-se que a presença do corpo de alta velocidade impede que o algoritmo convencional de migração RTM produza imagens confiáveis.

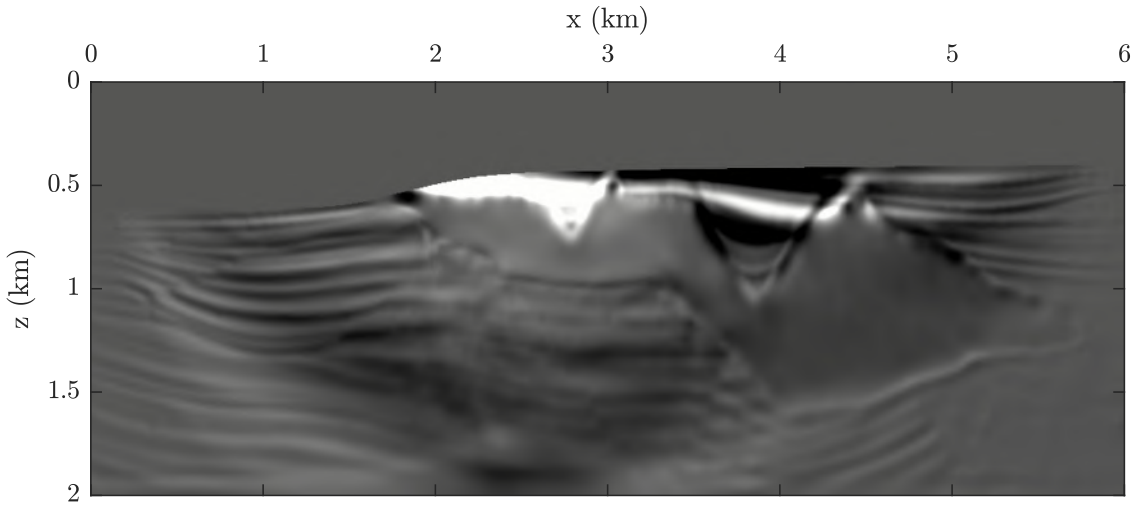

Figura 4.23: Seção RTM obtida com a migração de 601 tiros.

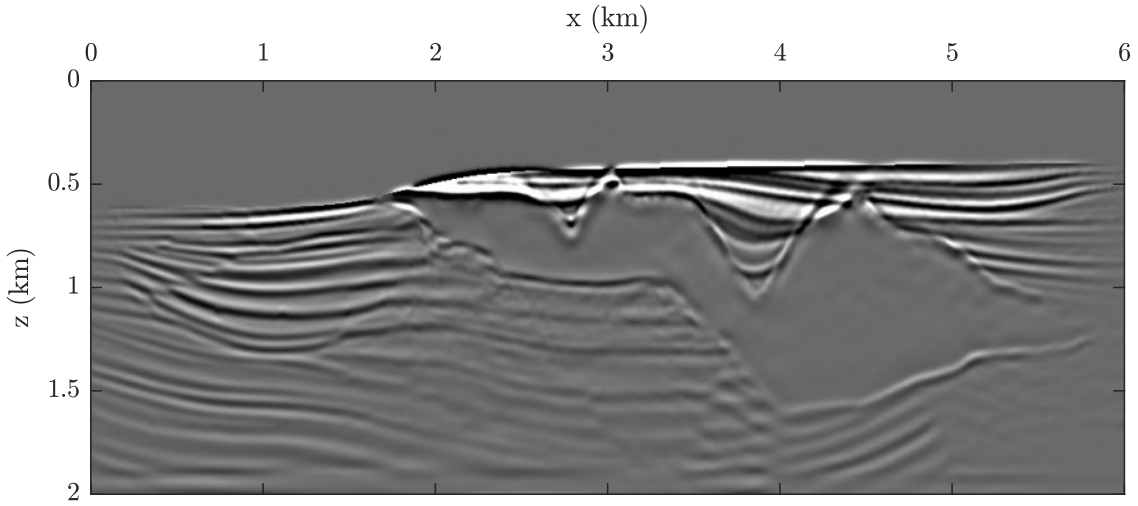

Figura 4.24: Seção RTM filtrada.

Como já foi mencionado, o custo computacional envolvido em múltiplas iterações da LSRTM é significativamente superior ao da RTM. Portanto, durante o processo iterativo foi considerado um subconjunto dos 601 tiros do levantamento original. A Figura 4.25 mostra o erro entre a seção RTM original e três subconjuntos com 301, 120 e 61 tiros. Os resultados apresentados a seguir, correspondem ao subconjunto de 61 tiros, distribuídos a cada 100 m na superfície.

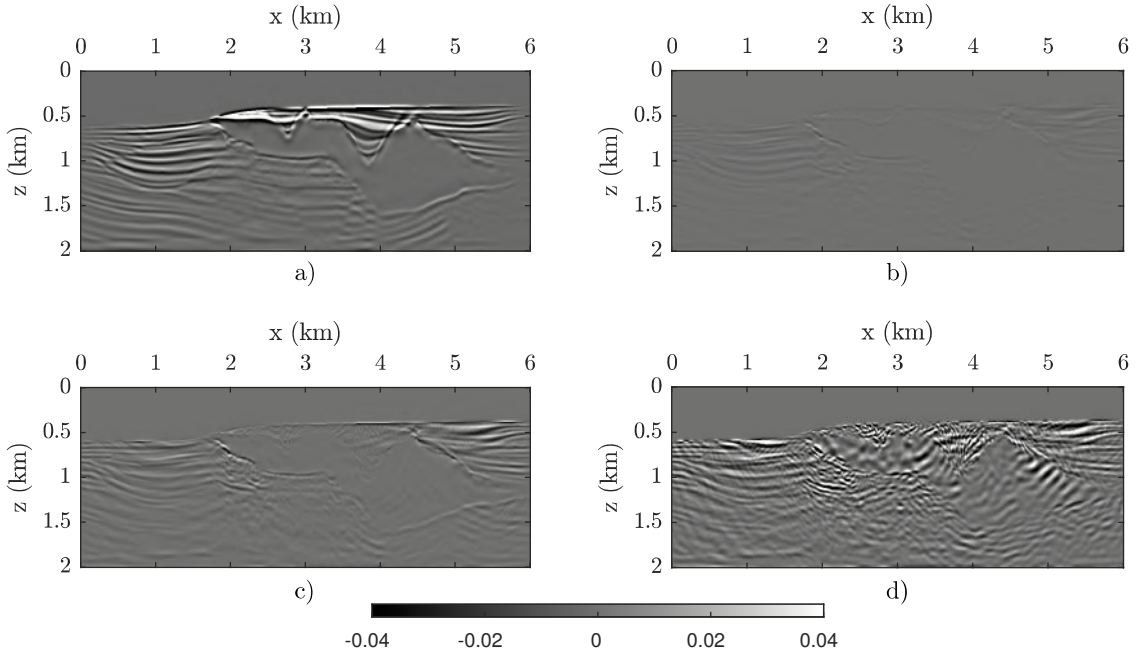

Figura 4.25: a) Seção RTM da Figura 4.24, obtida com 601 tiros. b), c) e d) mostram a diferença entre a seção em a) e as seções obtidas com 301, 120 e 61 tiros, respectivamente. A barra de erro indica a diferença em relação à seção em a).

Os parâmetros referentes à geometria de aquisição e à inversão LSRTM estão apresentados na Tabela 4.2

Tabela 4.2: Parâmetros utilizados na modelagem e inversão do modelo Sigsbee2a

Parâmetros	Valor
Número de pontos	1200×400
Espaçamento da malha	5 m
Amostragem temporal	0.0005 segundos
Tempo de gravação	10 segundos
Número de tiros	61
Espaçamento entre tiros	100 m
Profundidade dos tiros	10 m
Número de receptores	1200
Espaçamento entre receptores	5 m
Profundidade dos receptores	10 m
Frequência de corte da fonte (Ricker)	55 Hz
Número de gradientes armazenados (LBFGS)	5
Número máximo de iterações	25
Critério de parada adicional	$\frac{E(\mathbf{m}_k)}{E(\mathbf{m}_0)} < 1\%$

A imagem obtida como resultado do processo iterativo é apresentada na Figura 4.26. Se comparado à seção RTM convencional, as características do operador de inversão descritas nos dois testes anteriores podem ser identificadas. Em primeiro lugar, o resultado apresenta menos artefatos. Por exemplo, as grandes amplitudes no topo do sal são dramaticamente diminuídas. Ademais, as bordas do modelo são melhor reconstruídas, o que indica que a inversão consegue compensar regiões do modelo com baixa multiplicidade do sinal. Isto também é deixado em evidência na área do pré-sal, do lado direito inferior do modelo, onde refletores que não tinham sido imageados pelo operador de RTM, são recuperados apesar da falta de iluminação. A Figura 4.27 apresenta uma amplificação desta região, onde é possível observar como os refletores pobremente iluminados tem melhor continuidade e amplitudes mais balanceadas. Os difratores igualmente espaçados inseridos propositalmente no modelo de velocidade verdadeiro também fornecem indícios de que a focalização da imagem invertida é aprimorada. Adicionalmente, pode-se concluir que foi possível obter uma seção migrada com maior resolução, usando apenas um subconjunto do total de fontes empregadas na geração da seção RTM inicial (aproximadamente um

décimo do total de tiros).

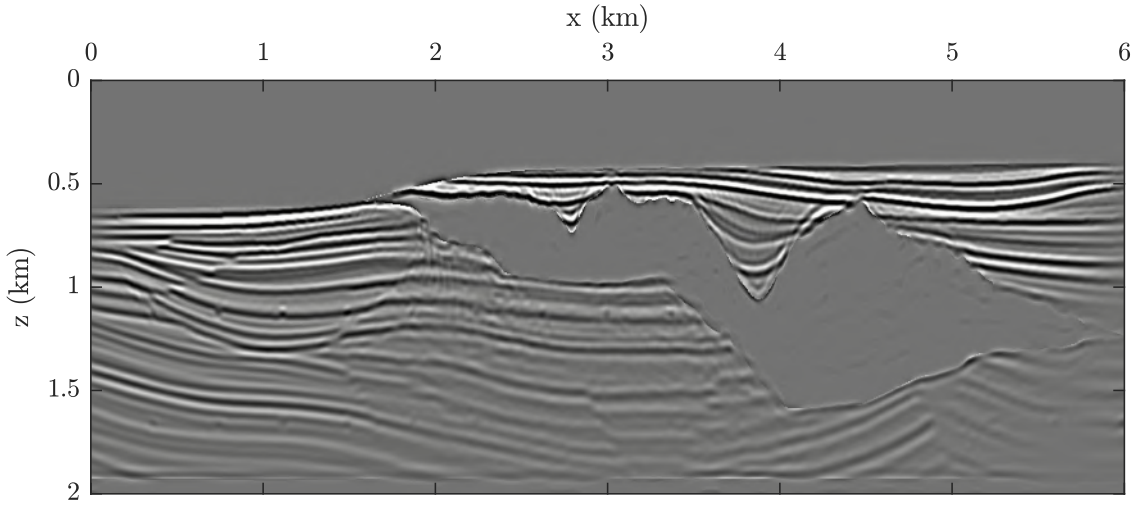

Figura 4.26: Seção LSRTM filtrada, na iteração 25. Este resultado deve ser comparado com a seção RTM da Figura 4.24

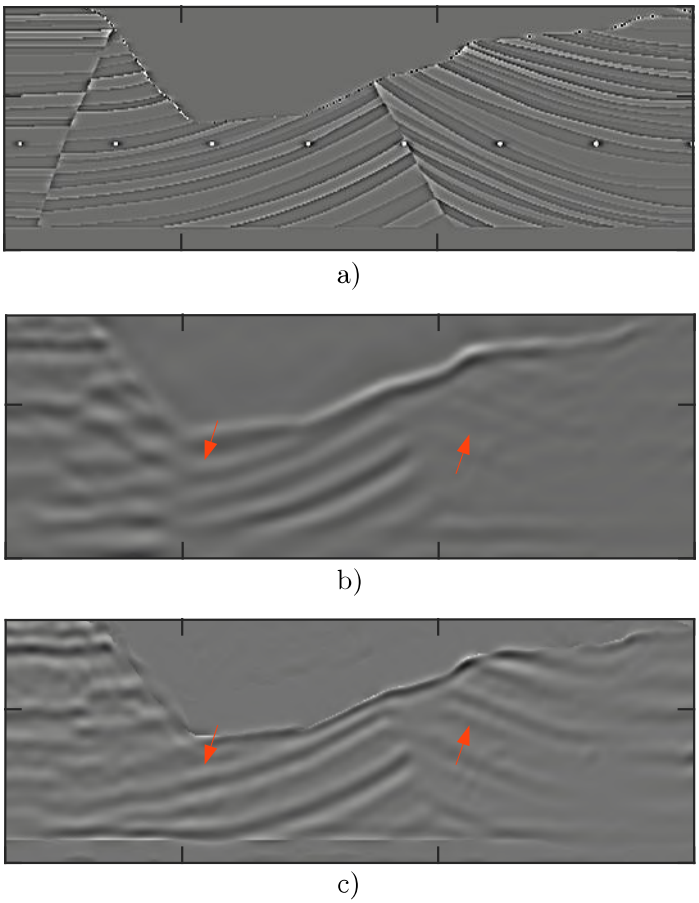

Figura 4.27: Amplificação da área do pré-sal. a) Modelo de refletividade verdadeiro. b) Seção RTM. c) Seção LSRTM. A inversão produz uma melhoria na continuidade dos refletores (seta esquerda) e preserva as amplitudes de refletores com pouca iluminação (seta direita).

Finalmente, para quantificar a acurácia da inversão em diferentes partes do modelo, foi calculado o fator de qualidade proposto por (WU e ALKHALIFAH, 2015):

$$\text{Correlação}_f = \sum_r \frac{\sum_t \delta u(\mathbf{x}_r, t)\delta d(\mathbf{x}_r, t)}{N_r \sqrt{\sum_t \delta u(\mathbf{x}_r, t)\delta u(\mathbf{x}_r, t) \sum_t \delta d(\mathbf{x}_r, t)\delta d(\mathbf{x}_r, t)}} \tag{4.32}$$

onde $\delta u(\mathbf{x}_r, t)$ e $\delta d(\mathbf{x}_r, t)$ são os dados calculado e observado para a fonte f, $\mathbf{x}_r$ é a posição de cada traço r relativa a cada fonte, e N_r é o número total de receptores por fonte. Se o modelo invertido consegue reproduzir exatamente os dados observados, então o valor da correlação é igual a 1 para todas as fontes. Este teste é particularmente útil no caso de dados reais onde não é possível comparar o modelo invertido com o modelo verdadeiro, uma vez que este último é desconhecido. A Figura 4.28 mostra a correlação entre os dados calculados e os dados observados para os 61 tiros modelados. Percebe-se que a distribuição de refletividade obtida pelo algoritmo de LSRTM consegue reproduzir com razoável precisão os dados observados.

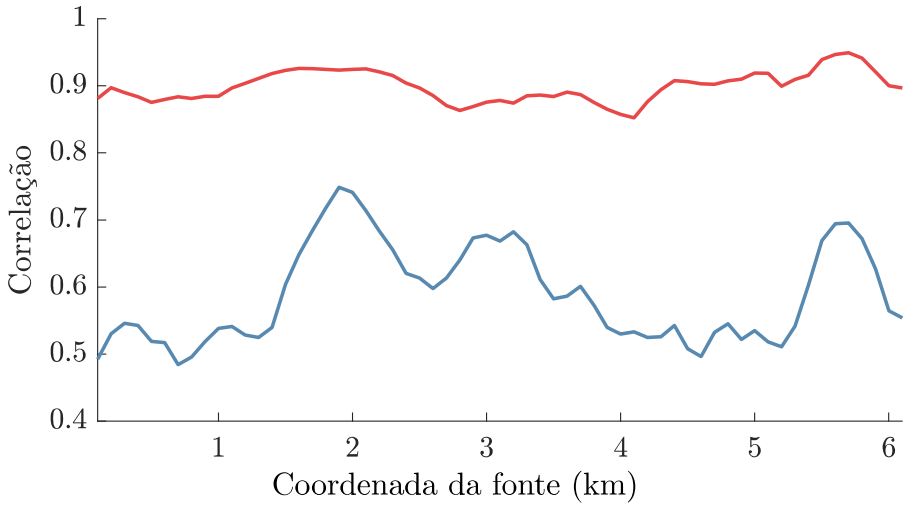

Figura 4.28: Correlação entre dados calculados e dados observados, segundo a posição dos tiros. Em azul, correlação para os dados calculados na primeira iteração. Em vermelho, correlação para os dados calculados na iteração 25.

Capítulo 5

Conclusões e trabalhos futuros

No presente trabalho foram abordadas as técnicas de inversão FWI e LSRTM, baseadas na modelagem da equação de onda, com a finalidade de reconstruir propriedades acústicas do subsolo a partir de medições sísmicas registradas em superfície. A estrutura de ambos os algoritmos é similar, porém, os objetivos da FWI e da LSRTM são diferentes em essência: a primeira busca recuperar o campo de velocidade completo, enquanto a segunda estima a refletividade verdadeira em função das perturbações do meio. Em segundo lugar, a FWI consegue inverter tanto os eventos refletidos quanto as ondas diretas e refratadas, atualizando o modelo de velocidade a cada iteração. Por outro lado, a LSRTM aprimora a resolução da seção migrada usando apenas as reflexões de primeira ordem, mantendo o modelo de fundo fixo durante todo o processo.

Os experimentos numéricos realizados com a inversão FWI mostraram que o emprego do gradiente pré-condicionado por um operador que aproxima o efeito da diagonal da Hessiana, acelera a convergência do processo iterativo e favorece a atualização das partes mais profundas do modelo. O operador adotado neste trabalho levou em consideração apenas a componente do lado das fontes na Hessiana aproximada, que equivale a compensar o gradiente por perdas de iluminação. O emprego de outros tipos de pré-condicionadores, como por exemplo, um que considere a componente do lado dos receptores, assim como a análise da influência destes operadores na direção de busca no decorrer do processo iterativo, é uma das propostas a serem

estudadas no futuro.

Também, foi demonstrado que o emprego de estratégias multiescala permitiu obter modelos de velocidade mais detalhados e próximos dos verdadeiros, uma vez que ajudam a reduzir a não linearidade do problema. As duas estratégias implementadas recuperaram satisfatoriamente a parte rasa do modelo Marmousi. Porém, a análise do erro relativo indicou que a estratégia de filtragem de frequências atingiu um resultado mais preciso nas regiões de alto contraste de velocidade, especialmente na parte inferior do modelo. Em relação ao custo computacional, uma alternativa interessante em relação à estratégia de janelamento de offsets, consiste em simular uma menor quantidade de disparos nas primeiras iterações, onde o tamanho da janela é maior e a influência das fontes localizadas na parte central do levantamento é praticamente nula. Uma vez que o tamanho da janela é reduzido, é possível considerar um número de fontes maior. Outra alternativa de inversão multiescala, consiste em combinar as duas estrategias apresentadas de forma simultânea.

Por outro lado, a inversão LSRTM é resolvida frequentemente com algoritmos de inversão linear tipo gradiente e um passo calculado de forma analítica, requerendo que os operadores de migração e modelagem linear sejam exatamente adjuntos para garantir a convergência. No entanto, neste trabalho foi demonstrado que é possível obter distribuições de refletividade com resolução melhorada através do algoritmo LBFGS, que emprega a busca em linha para calcular o passo a cada iteração, evitando assim problemas de convergência associados a operadores pseudo-adjuntos.

Em relação aos experimentos numéricos realizados na inversão LSRTM, foi possível obter seções com melhoras significativas no imageamento dos horizontes, especialmente em regiões perto do corpo de sal do modelo Sigsbee2a. A redução de artefatos presentes nas seções RTM convencionais também foi atingida através da inversão. Tais artefatos produzem sinal na modelagem por demigração, que é suprimido na diminuição dos resíduos em iterações posteriores. Mesmo tendo um ganho considerável no balanceamento das amplitudes, focalização e na redução de ruído de baixa frequência, conclui-se que é necessário incorporar técnicas de regularização

para diminuir os artefatos de alta frequência produzidos pelo excessivo ajuste dos dados.

Os resultados obtidos no capítulo 4 assumem que os modelos de fundo empregados na migração são suficientemente próximos do modelo real. Porém, tanto o modelo de fundo quanto a refletividade deveriam ser invertidos de forma conjunta. Abordagens que combinem o uso da FWI com a LSRTM são outro ponto a levar em consideração em estudos posteriores.

As conclusões deste trabalho se aplicam unicamente a modelos acústicos e isotrópicos da Terra, e não se estendem a cenários mais complexos que consideram, entre outros fatores, fenômenos de anisotropia, atenuação, elasticidade e ruído nos dados. Portanto, a adaptação dos métodos empregados para aplicações em modelos mais realistas, é uma das direções a serem consideradas no futuro.

Referências Bibliográficas

AKI, K., RICHARDS, P. G., 1980, *Quantitative seismology : theory and methods*. W. H. Freeman San Francisco.

AKI, K., CHRISTOFFERSSON, A., HUSEBYE, E. S., 1977, "Determination of the three-dimensional seismic structure of the lithosphere", *Journal of Geophysical Research*, v. 82, n. 2, pp. 277–296.

ALMOMIN, A., 2016, *Tomographic full waveform inversion*. Tese de Doutorado, Stanford University.

ANAGAW, A. Y., SACCHI, M. D., 2018, "Model parametrization strategies for Newton-based acoustic full waveform inversion", *Journal of Applied Geophysics*, v. 157, pp. 23 – 36. ISSN: 0926-9851.

BAYSAL, E., KOSLOFF, D. D., SHERWOOD, J. W. C., 1983, "Reverse time migration", *Geophysics*, v. 48, n. 11, pp. 1514–1524.

BERTERO, M., PIKE, R., 1992, *Inverse Problems in Scattering and Imaging*. Malvern physics series. Taylor & Francis. ISBN: 9780750301435.

BIONDI, B., ALMOMIN, A., 2013, "Tomographic full-waveform inversion (TFWI) by combining FWI and wave-equation migration velocity analysis", *The Leading Edge*, v. 32, n. 9, pp. 1074–1080.

BIONDI, B., SYMES, W. W., 2004, "Angle-domain common-image gathers for migration velocity analysis by wavefield-continuation imaging", *Geophysics*, v. 69, n. 5, pp. 1283–1298.

BISHOP, T. N., BUBE, K. P., CUTLER, R. T., et al., 1985, "Tomographic determination of velocity and depth in laterally varying media", *Geophysics*, v. 50, n. 6, pp. 903–923.

BLEISTEIN, N., 1984, *Mathematical methods for wave phenomena*. Computer science and applied mathematics. Academic Press. ISBN: 9780121056506.

BOONYASIRIWAT, C., VALASEK, P., ROUTH, P., et al., 2009, "An efficient multiscale method for time-domain waveform tomography", *Geophysics*, v. 74, n. 6 (nov), pp. WCC59–WCC68. ISSN: 0016-8033.

BORDING, P. R., 2004, "Finite difference modeling - nearly optimal sponge boundary conditions". In: *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2004*, pp. 1921–1924. Society of Exploration Geophysicists.

BUNKS, C., SALECK, F. M., ZALESKI, S., et al., 1995, "Multiscale seismic waveform inversion", *Geophysics*, v. 60, n. 5, pp. 1457–1473.

CERJAN, C., KOSLOFF, D., KOSLOFF, R., et al., 1985, "A nonreflecting boundary condition for discrete acoustic and elastic wave equations", *Geophysics*, v. 50, n. 4 (apr), pp. 705–708. ISSN: 0016-8033.

CHEN, K., SACCHI, M. D., 2017, "Elastic least-squares reverse time migration via linearized elastic full-waveform inversion with pseudo-Hessian preconditioning", *Geophysics*, v. 82, n. 5, pp. S341–S358. ISSN: 0016-8033.

CHEN, K., SACCHI, M. D., 2018, "The importance of including density in elastic least-squares reverse time migration: multiparameter crosstalk and convergence", *Geophysical Journal International*, v. 216, n. 1 (09), pp. 61–80. ISSN: 0956-540X.

CHEN, Y., DUTTA, G., DAI, W., et al., 2017, "Q-least-squares reverse time migration with viscoacoustic deblurring filters", *Geophysics*, v. 82, n. 6, pp. S425–S438.

CHIU, S. K. L., KANASEWICH, E. R., PHADKE, S., 1986, "Three-dimensional determination of structure and velocity by seismic tomography", *Geophysics*, v. 51, n. 8, pp. 1559–1571.

CLAERBOUT, J. F., 1985, *Imaging the Earth's Interior*. Oxford, UK, UK, Blackwell Scientific Publications, Ltd. ISBN: 0-86542-304-0.

CLAERBOUT, J. F., 1992, *Earth soundings analysis: Processing versus inversion*, v. 6. Blackwell Scientific Publications, Ltd.

CLAERBOUT, J. F., 1995, *Basic Earth Imaging*. Stanford Exploration Project.

CLAERBOUT, J. F., DOHERTY, S. M., 1972, "Downward continuation of moveout corrected seismograms", *Geophysics*, v. 37, n. 5, pp. 741–768.

CORCORAN, C., PERKINS, C., LEE, D., et al., 2007, "A wide-azimuth streamer acquisition pilot project in the Gulf of Mexico", *The Leading Edge*, v. 26, n. 4, pp. 460–468.

CRASE, E., PICA, A., NOBLE, M., et al., 1990, "Robust elastic nonlinear waveform inversion: Application to real data", *Geophysics*, v. 55, n. 5, pp. 527–538.

DAI, W., SCHUSTER, G. T., 2013, "Plane-wave least-squares reverse-time migration", *Geophysics*, v. 78, n. 4, pp. S165–S177.

DAI, W., FOWLER, P., SCHUSTER, G. T., 2012, "Multi-source least-squares reverse time migration", *Geophysical Prospecting*, v. 60, n. 4, pp. 681–695.

DAI, Y., YUAN, Y., 1999, "A Nonlinear Conjugate Gradient Method with a Strong Global Convergence Property", *SIAM Journal on Optimization*, v. 10, n. 1, pp. 177–182.

DE SOUZA, R. V. M., PETERS, F. C., MANSUR, W. J., et al., 2019, "GII regularization technique for seismic data inversion", *Journal of Applied Geophysics*, v. 160, pp. 229–235. ISSN: 09269851.

DUARTE, O., 2010, *Dicionário enciclopédico inglês-português de geofísica e geologia*. Sociedade Brasileira de Geofísica. ISBN: 9788588690141.

ETGEN, J., GRAY, S. H., ZHANG, Y., 2009, "An overview of depth imaging in exploration geophysics", *Geophysics*, v. 74, n. 6, pp. WCA5–WCA17.

FENG, Z., SCHUSTER, G. T., 2017, "Elastic least-squares reverse time migration", *Geophysics*, v. 82, n. 2, pp. S143–S157.

FICHTNER, A., TRAMPERT, J., 2011, "Hessian kernels of seismic data functionals based upon adjoint techniques", *Geophysical Journal International*, v. 185, n. 2, pp. 775–798.

FLETCHER, R. P., NICHOLS, D., BLOOR, R., et al., 2016, "Least-squares migration — Data domain versus image domain using point spread functions", *The Leading Edge*, v. 35, n. 2, pp. 157–162.

GAUTHIER, O., VIRIEUX, J., TARANTOLA, A., 1986, "Two-dimensional nonlinear inversion of seismic waveforms : Numerical results", *Geophysics*, v. 51, n. 7, pp. 1387–1403.

GEOLTRAIN, S., BRAC, J., 1993, "Can we image complex structures with first-arrival traveltime?" *Geophysics*, v. 58, n. 4, pp. 564–575.

GRAY, S. H., ETGEN, J., DELLINGER, J., et al., 2001, "Seismic migration problems and solutions", *Geophysics*, v. 66, n. 5, pp. 1622–1640. ISSN: 0016-8033.

GUITTON, A., 2004, "Amplitude and kinematic corrections of migrated images for nonunitary imaging operators", *Geophysics*, v. 69, n. 4, pp. 1017–1024.

GUO, P., MCMECHAN, G. A., 2018, "Compensating Q effects in viscoelastic media by adjoint-based least-squares reverse time migration", *Geophysics*, v. 83, n. 2, pp. S151–S172.

GUO, Q., ALKHALIFAH, T., 2017, "Elastic reflection-based waveform inversion with a nonlinear approach", *Geophysics*, v. 82, n. 6 (nov), pp. R309–R321. ISSN: 0016-8033.

HADAMARD, J., 1902, "Sur les problemes aux derive espartielles et leur signification physique", *Bulletin of Princeton University*, v. 13, pp. 1–20.

HERRMANN, F. J., LI, X., 2012, "Efficient least-squares imaging with sparsity promotion and compressive sensing", *Geophysical Prospecting*, v. 60, n. 4, pp. 696–712.

HU, W., ABUBAKAR, A., HABASHY, T. M., et al., 2011, "Preconditioned nonlinear conjugate gradient method for frequency domain full-waveform seismic inversion", *Geophysical Prospecting*, v. 59, n. 3, pp. 477–491. ISSN: 00168025.

HUANG, W., 2015, *Mapping subsurface structures by least-squares inversion of seismic data*. Tese de Doutorado, University of Houston.

JANNANE, M., BEYDOUN, W., CRASE, E., et al., 1989, "Wavelengths of earth structures that can be resolved from seismic reflection data", *Geophysics*, v. 54, n. 7, pp. 906–910. ISSN: 0016-8033.

JI, J., 2009, "An exact adjoint operation pair in time extrapolation and its application in least-squares reverse-time migration", *Geophysics*, v. 74, n. 5, pp. H27–H33. ISSN: 0016-8033.

JONES, I., 2010, *An introduction to velocity model building*. Houten, The Netherlands : Eage Publications. ISBN: 9781680156980.

KEYS, R. G., 1985, "Absorbing boundary conditions for acoustic media", *Geophysics*, v. 50, n. 6, pp. 892–902. ISSN: 0016-8033.

KÜHL, H., SACCHI, M. D., 2003, "Least-squares wave-equation migration for AVP/AVA inversion", *Geophysics*, v. 68, n. 1, pp. 262–273.

LAILLY, P., 1983, "The seismic inverse problem as a sequence of before stack migrations". In: *Conference on inverse scattering: theory and application*, pp. 206–220. Siam Philadelphia, PA.

LAMBARE, G., GUILLAUME, P., MONTEL, J. P., 2014, "Recent Advances in Ray-based Tomography". In: *76th Conference and Exhibition, EAGE*, pp. 16–19.

LAMBARÉ, G., VIRIEUX, J., MADARIAGA, R., et al., 1992, "Iterative asymptotic inversion in the acoustic approximation", *Geophysics*, v. 57, n. 9, pp. 1138–1154.

LIU, H., ALMOMIN, A., LUO, Y., 2019, "Reverse Time Adjoint Migration", *Geophysics*, (feb), pp. 1–57. ISSN: 0016-8033.

LIU, W., ZHAO, B., WEI ZHOU, H., et al., 2011, "Wave-equation global datuming based on the double square root operator", *Geophysics*, v. 76, n. 3, pp. U35–U43.

LIU, Y., TENG, J., XU, T., et al., 2017, "Effects of Conjugate Gradient Methods and Step-Length Formulas on the Multiscale Full Waveform Inversion in Time Domain: Numerical Experiments", *Pure and Applied Geophysics*, v. 174, n. 5, pp. 1983–2006. ISSN: 14209136.

LUO, S., HALE, D., 2014, "Least-squares migration in the presence of velocity errors", *Geophysics*, v. 79, n. 4, pp. S153–S161. ISSN: 0016-8033.

MARFURT, K. J., 1984, "Accuracy of finite-difference and finite-element modeling of the scalar and elastic wave equations", *Geophysics*, v. 49, n. 5 (may), pp. 533–549. ISSN: 0016-8033.

MENKE, W., 1989, *Geophysical Data Analysis: Discrete Inverse Theory*. International Geophysics. Elsevier Science. ISBN: 9780080507323.

MÉTIVIER, L., BROSSIER, R., OPERTO, S., et al., 2015, "Acoustic multiparameter FWI for the reconstruction of P-wave velocity, density and attenuation: preconditioned truncated Newton approach". In: *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2015*, pp. 1198–1203. Society of Exploration Geophysicists, aug.

MÉTIVIER, L., BROSSIER, R., 2016, "The SEISCOPE optimization toolbox: A large-scale nonlinear optimization library based on reverse communication", *Geophysics*, v. 81, n. 2, pp. F1–F15. ISSN: 0016-8033.

MÉTIVIER, L., BROSSIER, R., VIRIEUX, J., et al., 2013, "Full waveform inversion and the truncated Newton method", *SIAM Journal on Scientific Computing*, v. 35, n. 2, pp. B401–B437.

MORA, P., 1987, "Nonlinear two-dimensional elastic inversion of multioffset seismic data", *Geophysics*, v. 52, n. 9, pp. 1211–1228.

MORA, P., 1988, "Elastic wave-field inversion of reflection and transmission data", *Geophysics*, v. 53, n. 6, pp. 750–759.

MORA, P., 1989, "Inversion = Migration + Tomography", *Geophysics*, v. 54, n. 12, pp. 1575–1586.

MOSER, T. J., 2012, "Review of ray-Born forward modeling for migration and diffraction analysis", *Studia Geophysica et Geodaetica*, v. 56, n. 2 (Apr), pp. 411–432. ISSN: 1573-1626.

MÉTIVIER, L., VIRIEUX, J., BROSSIER, R., et al., 2016, "Measuring the misfit between seismograms using an optimal transport distance: application to full waveform inversion", *Geophysical Journal International*, v. 205, n. 1 (02), pp. 345–377. ISSN: 0956-540X.

NEMETH, T., WU, C., SCHUSTER, G. T., 1999, "Least-squares migration of incomplete reflection data", *Geophysics*, v. 64, n. 1, pp. 208–221.

NOCEDAL, J., WRIGHT, S., 2006, *Numerical optimization*. Springer Science & Business Media.

NOLET, G., 1987, *Seismic tomography*. D. Reidel Publishing.

PAFFENHOLZ, J., MCLAIN, B., ZASKE, J., et al., 2002, "Subsalt multiple attenuation and imaging: Observations from the Sigsbee2B synthetic dataset". In: *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2002*, pp. 2122–2125. Society of Exploration Geophysicists, jan.

PLESSIX, R.-E., MULDER, W. A., 2004, "Frequency-domain finite-difference amplitude-preserving migration", *Geophysical Journal International*, v. 157, n. 3 (06), pp. 975–987. ISSN: 0956-540X.

PLESSIX, R. E., 2006. "A review of the adjoint-state method for computing the gradient of a functional with geophysical applications". ISSN: 0956540X.

POLAK, E., RIBIERE, G., 1969, "Note sur la convergence de méthodes de directions conjuguées", *R.I.R.O.*, v. 3, n. 16, pp. 35–43.

PRATT, R. G., 1999, "Seismic waveform inversion in the frequency domain, Part 1: Theory and verification in a physical scale model", *Geophysics*, v. 64, n. 3, pp. 888–901.

PRATT, R. G., SHIPP, R. M., 1999, "Seismic waveform inversion in the frequency domain, Part 2: Fault delineation in sediments using crosshole data", *Geophysics*, v. 64, n. 3, pp. 902–914.

PRATT, R. G., SHIN, C., HICK, G. J., 1998, "Gauss–Newton and full Newton methods in frequency–space seismic waveform inversion", *Geophysical Journal International*, v. 133, n. 2 (05), pp. 341–362. ISSN: 0956-540X.

QIN, B., ALLEMAND, T., LAMBARÉ, G., 2015, "Full waveform inversion using preserved amplitude reverse time migration", pp. 1252–1257.

QU, Y., HUANG, J., LI, Z., et al., 2017, "Attenuation compensation in anisotropic least-squares reverse time migration", *Geophysics*, v. 82, n. 6, pp. S411–S423.

RAMM, A. G., 1986, "Non-uniqueness of the solution to an inverse problem in geophysics", *Inverse Problems*, v. 2, n. 2 (may), pp. L23–L25.

REEVES, C. M., FLETCHER, R., 1964, "Function minimization by conjugate gradients", *The Computer Journal*, v. 7, n. 2 (01), pp. 149–154. ISSN: 0010-4620.

REYNOLDS, A. C., 1978, "Boundary Condictions for the Numerical Solution of Wave Propagation Problems", .

RICKETT, J. E., 2003, "Illumination-based normalization for wave-equation depth migration", *Geophysics*, v. 68, n. 4, pp. 1371. ISSN: 00168033.

ROBEIN, E., 2010, *Seismic Imaging: A Review of the Techniques, Their Principles, Merits and Limitations*. Education tour series. EAGE Publications. ISBN: 9789073781788.

SANTOS, L. A., 2012, *Inversão tomográfica sequencial para o campo de velocidades sísmicas baseada em difrações e critérios geológicos*. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

SANTOSA, F., SYMES, W., 1999, "Computation of the Newton Hessian for least-squares solution of inverse problems in reflection seismology", *Inverse Problems*, v. 4 (01), pp. 211.

SCHUSTER, G., 2017, *Seismic inversion*. SEG.

SCHUSTER, G. T., 1993, "Least-squares cross-well migration". In: *SEG Technical Program Expanded Abstracts 1993*, pp. 110–113.

SHIN, C., JANG, S., MIN, D. J., 2001, "Improved amplitude preservation for prestack depth migration by inverse scattering theory", *Geophysical Prospecting*, v. 49, n. 5, pp. 592–606. ISSN: 00168025.

SHUEY, R. T., 1985, "A simplification of the Zoeppritz equations", *Geophysics*, v. 50, n. 4 (apr), pp. 609–614. ISSN: 0016-8033.

SIRGUE, L., 2006, "The Importance of Low Frequency and Large Offset in Waveform Inversion". In: *68th EAGE Conference and Exhibition incorporating SPE EUROPEC 2006*, p. A037, 06.

SIRGUE, L., I. BARKVED, O., VAN GESTEL, J.-P., et al., 2009, "3D Waveform Inversion on Valhall Wide-azimuth OBC". In: *71st EAGE Conference and Exhibition incorporating SPE EUROPEC 2009*, 06.

SIRGUE, L., PRATT, R. G., 2004, "Efficient waveform inversion and imaging: A strategy for selecting temporal frequencies", *Geophysics*, v. 69, n. 1, pp. 231–248.

STOLT, R. H., 1978, "MIGRATION BY FOURIER TRANSFORM", *Geophysics*, v. 43, n. 1, pp. 23–48.

SYMES, W. W., 2007, "Reverse time migration with optimal checkpointing", *Geophysics*, v. 72, n. 5, pp. SM213–SM221. ISSN: 0016-8033.

TAN, S., HUANG, L., 2014a, "Least-squares reverse-time migration with a wavefield-separation imaging condition and updated source wavefields", *Geophysics*, v. 79, n. 5, pp. S195–S205.

TAN, S., HUANG, L., 2014b, "Least-squares reverse-time migration with a wavefield-separation imaging condition and updated source wavefields", *Geophysics*, v. 79, n. 5, pp. S195–S205.

TANG, Y., 2009, "Target-oriented wave-equation least-squares migration/inversion with phase-encoded Hessian", *Geophysics*, v. 74, n. 6, pp. WCA95–WCA107.

TARANTOLA, A., 2005, *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*. Other Titles in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics. ISBN: 9780898717921.

TARANTOLA, A., 1984a, "Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation", *Geophysics*, v. 49, n. 8, pp. 1259–1266.

TARANTOLA, A., 1984b, "Linearized inversion of seismic reflection data", *Geophysical Prospecting*, v. 32, n. 6, pp. 998–1015.

TARANTOLA, A., 1987, *Inverse Problem Theory: Methods For Data Fitting and Model Parameter Estimation*. Elsevier, 1987.

TROMP, J., TAPE, C., LIU, Q., 2005, "Seismic tomography, adjoint methods, time reversal and banana-doughnut kernels", *Geophysical Journal International*, v. 160, n. 1, pp. 195–216. ISSN: 0956540X.

TU, N., HERRMANN, F. J., 2015, "Fast least-squares imaging with surface-related multiples: Application to a North Sea data set", *The Leading Edge*, v. 34, n. 7, pp. 788–794.

VERSTEEG, R., 1994, "The Marmousi experience: Velocity model determination on a synthetic complex data set", *The Leading Edge*, v. 13, n. 9, pp. 927–936.

VIGH, D., STARR, E. W., KAPOOR, J., 2009, "Developing Earth models with full waveform inversion", *The Leading Edge*, v. 28, n. 4, pp. 432–435. ISSN: 1070-485X.

VIRIEUX, J., OPERTO, S., 2009, "An overview of full-waveform inversion in exploration geophysics", *Geophysics*, v. 74, n. 6, pp. WCC1–WCC26. ISSN: 0016-8033.

WANG, P., HUANG, S., WANG, M., 2017, "Improved subsalt images with least-squares reverse time migration", *Interpretation*, v. 5, n. 3, pp. SN25–SN32.

WAPENAAR, C. P. A., 1996, "Inversion versus migration: A new perspective to an old discussion", *Geophysics*, v. 61, n. 3, pp. 804–814.

WARNER, M., GUASCH, L., 2016, "Adaptive waveform inversion: Theory", *Geophysics*, v. 81, n. 6 (nov), pp. R429–R445. ISSN: 0016-8033.

WARNER, M., RATCLIFFE, A., NANGOO, T., et al., 2013, "Anisotropic 3D full-waveform inversion", *Geophysics*, v. 78, n. 2 (mar), pp. R59–R80. ISSN: 0016-8033.

WONG, M., 2014, *IMAGING WITH MULTIPLES BY LEAST-SQUARES REVERSE TIME MIGRATION*. Tese de Doutorado, STANFORD UNIVERSITY.

WONG, M., BIONDI, B. L., RONEN, S., 2015, "Imaging with primaries and free-surface multiples by joint least-squares reverse time migration", *Geophysics*, v. 80, n. 6, pp. S223–S235.

WOODWARD, M. J., NICHOLS, D., ZDRAVEVA, O., et al., 2008, "A decade of tomography", *Geophysics*, v. 73, n. 5, pp. VE5–VE11.

WU, D., YAO, G., CAO, J., et al., 2016, "Least-squares RTM with L1 norm regularisation", *Journal of Geophysics and Engineering*, v. 13, n. 5, pp. 666–673. ISSN: 17422140.

WU, R.-S., XIE, X.-B., 2009, "Modeling primaries of acoustic/elastic waves by one-return approximation", *The Leading Edge*, v. 28, n. 5 (may), pp. 576–581. ISSN: 1070-485X.

WU, Z., ALKHALIFAH, T., 2015, "Simultaneous inversion of the background velocity and the perturbation in full-waveform inversion", *Geophysics*, v. 80, n. 6 (nov), pp. R317–R329. ISSN: 0016-8033.

YANG, J., LIU, Y., DONG, L., 2015a, "Frequency domain least-squares reverse time migration with a modified scattering-integral approach". pp. 4164–4169, a.

YANG, J., LI, Y. E., CHENG, A., et al., 2017, "Least-squares extended reverse time migration in the presence of velocity errors". In: *SEG 2017 Workshop: Full-waveform Inversion and Beyond, Beijing, China, 20-22 November 2017*, pp. 68–71.

YANG, P., GAO, J., WANG, B., 2015b, "A graphics processing unit implementation of time-domain full-waveform inversion", *Geophysics*, v. 80, n. 3, pp. F31–F39. ISSN: 0016-8033.

YANG, P., BROSSIER, R., MÉTIVIER, L., et al., 2016, "A review on the systematic formulation of 3-D multiparameter full waveform inversion in viscoelastic medium", *Geophysical Journal International*, v. 207, n. 1, pp. 129–149. ISSN: 1365246X.

YAO, G., WU, D., 2015, "Least-squares reverse-time migration for reflectivity imaging", *Science China Earth Sciences*, v. 58, n. 11, pp. 1982–1992. ISSN: 16747313.

YAO, G., WU, D., 2017, "Reflection full waveform inversion", *Science China Earth Sciences*, v. 60, n. 10, pp. 1783–1794. ISSN: 18691897.

YAO, G., DA SILVA, N. V., WU, D., 2017, "Forward modelling formulas for least-squares reverse-time migration", *Exploration Geophysics*, v. 49, n. 4, pp. 506–518. ISSN: 18347533.

YILMAZ, O., 2001, *Seismic Data Analysis*, v. 10, *Investigations in Geophysics*. 2 ed ed. Tulsa, USA, Society Of Exploration Geophysicists.

YU, J., SCHUSTER, G. T., DUTTA, G., et al., 2014, "Making the most out of least-squares migration", *The Leading Edge*, v. 33, n. 9, pp. 954–960. ISSN: 1070-485X.

ZHANG, D., SCHUSTER, G. T., 2014, "Least-squares reverse time migration of multiples", *Geophysics*, v. 79, n. 1, pp. S11–S21.

ZHANG, Y., DUAN, L., XIE, Y., 2015, "A stable and practical implementation of least-squares reverse time migration", *Geophysics*, v. 80, n. 1, pp. V23–V31.

ZHDANOV, M. S., 2015, *Inverse Theory and Applications in Geophysics*. ISBN: 9780444626745.

ZHEN-CHUN, L., ZHEN-BO, G., KUN, T., 2014, "Least-Squares Reverse Time Migration in Visco-Acoustic Media", *Chinese Journal of Geophysics*, v. 57, n. 1, pp. 79–94.

ZHOU, H.-W., 2014, *Practical Seismic Data Analysis*. Cambridge University Press.

ZHOU, W., BROSSIER, R., OPERTO, S., et al., 2015, "Full waveform inversion of diving & reflected waves for velocity model building with impedance inversion based on scale separation", *Geophysical Journal International*, v. 202, n. 3, pp. 1535–1554. ISSN: 1365246X.